Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(1), 145-151
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.81016

Hans汉斯

Constructions of Nearly Optimal Codebooks Based on Cyclotomic Classes of Order Four

Rui Ma[1], Wanfeng Qi[1], Lingli Tang[2]

[1]School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
[2]College of Science, Dalian Minzu University, Dalian Liaoning
Email: qiwf@lnnu.edu.cn

Received: Jan. 2nd, 2019; accepted: Jan. 17th, 2019; published: Jan. 24th, 2019

Abstract

Codebooks meeting the Welch bound are widely used in many research areas and applications. However, it is usually difficult to construct codebooks exactly meeting the Welch bound. A good substitute is to construct asymptotically optimal (N,K) codebooks which can approach codebooks meeting the Welch bound when N is large enough. In this paper, we construct a new class of codebook nearly meeting the Welch bound by using almost difference sets which consists of 4 order cyclotomic classes.

Keywords

Codebook, Welch Bound, Cyclotomic Class, Almost Difference Set

基于4阶分圆类的近似最佳码本的构造

马 瑞[1]，亓万锋[1]，唐玲丽[2]

[1]辽宁师范大学，数学学院，辽宁 大连
[2]大连民族大学，理学院，辽宁 大连
Email: qiwf@lnnu.edu.cn

收稿日期：2019年1月2日；录用日期：2019年1月17日；发布日期：2019年1月24日

摘 要

最佳码本在许多理论与实践中有着重要的应用。但构造最佳码本相对困难。一种替代方法是构造渐进最优码本，使得当码字足够长时，构造的渐进最优码本与最优码本足够接近。本文中利用基于四阶分圆类的几乎差集构造一类新的近似最佳码本。

文章引用: 马瑞, 亓万锋, 唐玲丽. 基于 4 阶分圆类的近似最佳码本的构造[J]. 应用数学进展, 2019, 8(1): 145-151.
DOI: 10.12677/aam.2019.81016

关键词

码本，Welch界，分圆类，几乎差集

1. 引言

一个参数为(N,K)码本C是N个单位复向量构成的序列$\{c_0,c_1,\cdots,c_N\}$，对于每个子码本$c_i=(c_{i,0},c_{i,1},\cdots,c_{i,K})^{\mathrm{T}}$称为码字。码本$C$的最大相关值[1]定义为

$$I_{\max}(C)=\max_{0\le i<j\le N-1}\left|c_ic_j^H\right|,$$

其中c^H表示复向量c的共轭转置。在许多应用中，码本的性质与$I_{\max}(C)$大小紧密相关。特别的，希望码本C的最大互相关尽可能地小。Welch [1]指出给定参数(N,K)后，码本的最大互相关有下界I_W：

引理 1 [1]. 对于任意的参数为(N,K)的码本(N,K)且满足$N\ge K$，

$$I_{\max}(C)\ge I_W=\sqrt{\frac{N-K}{(N-1)K}},$$

等号成立当且仅当对于任意的(i,j)且$i\ne j$有$\left|c_ic_j^H\right|=\sqrt{\frac{N-K}{(N-1)K}}$，这时称$C$为最佳码本。

构造最佳码本十分困难，Fickus 和 Mixon 给出了一些已有的最佳码本[2]。一种替代方法是构造近似最佳码本，使得当N足够大时，近似最佳码本的最大互相关值与最佳码本的足够接近。近似最佳码本的构造相对简单，并且在很多场合中与最佳码本性质近似。目前已有的方法主要可以归纳为采用几乎差集法[3] [4]、域上特征和法[5] [6]和 bent 函数法[7]等。张和冯[8]给出了八阶分圆类上的几乎差集构造的近似最佳码本。Hu 和 Wu [9]采用定义了在差集的笛卡尔积上的近似最佳码本。本文将 Hu 和 Wu 的方法进行推广，构造了四阶分圆类对应的几乎差集的笛卡尔积上的近似最佳码本。

2. 基础知识

设G是一个有限交换群，D是群G的k阶子集。定义$\Gamma_D(\omega)=|D+\omega\cap D|$，其中$D+\omega=\{d+\omega:d\in D\}$。$D$被称为有限交换群$G$中参数为$(v,k,\lambda,t)$的几乎差集合，如果$G$中的$t$个非零元$\omega$对应的$\Gamma_D(\omega)$取值为$\lambda$，其它$(v-1-t)$个非零元$\omega$对应的$\Gamma_D(\omega)$取值为$\lambda+1$。

F_q是q阶有限域，$q=p^m$，p是F_q的特征。设α是F_q的一个本原元，$F_q^*=F_q\setminus\{0\}=\langle\alpha\rangle$。对有限域$F_q$，存在$q$个从$F_q$到复平面单位圆上的同态$\chi$，满足

$$\chi(x+y)=\chi(x)\chi(y),\forall x,y\in F_q.$$

这种同态称为有限域F_q的加法特征，简称特征[10]。这q个特征的集合记为$\hat{F}_q$。如果$\chi(x)\equiv 1,\forall x\in F_q$，则称为平凡特征。设$D$是$F_q$的子集，定义$\chi(D)=\sum_{x\in D}\chi(x)$，对两个不同的特征$\chi_1,\chi_2$，定义$(\chi_1\chi_2)(g):=\chi_1(g)\chi_2(g),\forall g\in F_q$，仍然是$F_q$是的特征[10]。

对有限域 F_q， $q=ef+1\left(e\geq 2,f\geq 2\right)$，可将其非零元素均分为e个子集： $C_l^{(e,q)}=\alpha^l\left\langle\alpha^e\right\rangle,0\leq l\leq e-1$ 。 $C_l^{(e,q)}$ 称为 e 阶分圆类，显然有 $F_q^*=\bigcup_{l=0}^{e-1}C_l^{(e,q)}$， $\left|C_l^{(e,q)}\right|=f$ 。

引理 1 [11]：设 $q=4f+1$，f 是奇数。$q=s^2+4t^2$ 是其二次划分，且 $s=1\pmod 4$，t 的符号由选取的本原元决定。则当 $C_0^{(4,q)}\cup C_1^{(4,q)}$ 是 $\left(q,\frac{q-1}{2},\frac{q-5}{4},\frac{q-1}{2}\right)$ 几乎差集当且仅当 $t=\pm 1$。此时有

$$\Gamma_D(x)=\begin{cases}\dfrac{q-3-2t}{4},\ \forall x\in C_0^{(4,q)}\cup C_2^{(4,q)},\\ \dfrac{q-3+2t}{4},\ \forall x\in C_1^{(4,q)}\cup C_3^{(4,q)}.\end{cases}$$

我们首先估计任意非平凡特征 χ 在集合 $C_0^{(4,q)}\cup C_1^{(4,q)}$ 的值。实际上该值 Ding 等人在文[11]中已经给出，我们重新整理可以得到：

引理 2 [11]：有限域 F_q，则有

$$\left|\chi\left(C_0^{(4,q)}\cup C_1^{(4,q)}\right)\right|=\frac{\sqrt{q}\pm 1}{2},\ \left|\chi\left(C_2^{(4,q)}\cup C_3^{(4,q)}\right)\right|=\frac{\sqrt{q}\pm 1}{2}.$$

证明：设 $c\in C_m^{(4,q)}$，则 $cC_i^{(4,q)}=\left\{cx,x\in C_i^{(4,q)}\right\}=C_{(m+i)\bmod 4}^{(4,q)}$。

$$\begin{aligned}\left|\chi\left(cC_0^{(4,q)}\cup cC_1^{(4,q)}\right)\right|^2&=\sum_{x\in C_0^{(4,q)}\cup C_1^{(4,q)}}\chi(cx)\sum_{y\in C_0^{(4,q)}\cup C_1^{(4,q)}}\chi(-cy)\\&=\sum_{x,y\in C_0^{(4,q)}\cup C_1^{(4,q)}}\chi(cx-cy)\\&=\frac{q-1}{2}+\sum_{\substack{x,y\in C_0^{(4,q)}\cup C_1^{(4,q)}\\ y\neq x}}\chi(cx-cy).\end{aligned}$$

根据引理 1 有

$$\begin{aligned}&\left|\chi\left(cC_0^{(4,q)}\cup cC_1^{(4,q)}\right)\right|^2\\&=\frac{q-1}{2}+\frac{q-3-2t}{4}\chi\left(cC_0^{(4,q)}\cup cC_2^{(4,q)}\right)+\frac{q-3+2t}{4}\chi\left(cC_1^{(4,q)}\cup cC_3^{(4,q)}\right)\\&=\frac{q-1}{2}+\frac{q-3-2t}{4}\chi\left(C_{m\bmod 2}^{(2,q)}\right)+\frac{q-3+2t}{4}\chi\left(C_{(m+1)\bmod 2}^{(2,q)}\right)\\&=\frac{q-1}{2}+\frac{q-3-2t}{4}\chi\left(C_{m\bmod 2}^{(2,q)}\right)+\frac{q-3+2t}{4}\left(-1-\chi\left(C_{m\bmod 2}^{(2,q)}\right)\right)\\&=\frac{q+1-2t}{4}-t\chi\left(C_{m\bmod 2}^{(2,q)}\right).\end{aligned}$$

Ding 等[11]证明了 $\chi\left(C_0^{(2,q)}\right)=\frac{-1\mp\sqrt{q}}{2}$， $\chi\left(C_1^{(2,q)}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{q}}{2}$。于是

$$\left|\chi\left(cC_0^{(4,q)}\cup cC_1^{(4,q)}\right)\right|^2=\frac{q+1-2t}{4}-t\frac{-1\mp\sqrt{q}}{2}=\frac{q\pm 2\sqrt{q}+1}{4}.$$

所以 $\left|\chi\left(C_0^{(4,q)}\cup C_1^{(4,q)}\right)\right|=\frac{\sqrt{q}\pm 1}{2}$， $\left|\chi\left(C_2^{(4,q)}\cup C_3^{(4,q)}\right)\right|=\frac{\sqrt{q}\pm 1}{2}$。

3. 构造码本

设 F_{q_i} 是有限域，$i=1,2,\cdots,n$ 且都满足引理 1 的条件。$D_i=C_0^{(4,q_i)}\cup C_1^{(4,q_i)}$ 是 F_{q_i} 中参数为 $\left(q_i,\frac{q_i-1}{2},\frac{q_i-5}{4},\frac{q_i-1}{2}\right)$ 的几乎差集，$1\le i\le n$。$\bar{D}_i=C_2^{(4,q_i)}\cup C_3^{(4,q_i)}\cup\{0\}$。对 $i=1,2,\cdots,n$，令 $\chi_{i,j_i}\in\hat{F}_{q_i},j_i=0,1,\cdots,q_i-1$，且 $\chi_{i,0}$ 是相应的平凡特征。设 $F=F_{q_1}\times F_{q_2}\times\cdots\times F_{q_n}$。对 $\forall\left(g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_n}\right)\in F$。$\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)\left(g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_n}\right):=\chi_{1,j_1}\left(g_{i_1}\right)\chi_{1,j_2}\left(g_{i_{21}}\right)\cdots\chi_{1,j_n}\left(g_{i_n}\right)$。这时 $\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}$ 是 F 上的特征。这种特征的集合记为 $\hat{F}$。显然有 $\left|\hat{F}\right|=q_1q_2\cdots q_n$。

现在我们构造 F 一个的子集 D。设 $E_1=D_1$，对于任意的 $1\le i\le n$，设

$$E_{i+1}:=\left(E_i\times\bar{D}_{i+1}\right)\cup\left(\bar{E}_i\times D_{i+1}\right).$$

最后，设 $D=E_n,K=|D|$。用数学归纳法容易得到 $\left|E_i\right|=\frac{q_1q_2\cdots q_i-1}{2},1\le i\le n$，$K=|D|=\frac{q_1q_2\cdots q_n-1}{2}$。

定义 3. 上面的集合 D，我们定义码本：

$$C_D=\left\{C_{j_1,j_2,\cdots,j_n},j_i=0,1,\cdots,q_i-1,i=1,2,\cdots,K\right\}. \tag{1}$$

对于每个 $\left(j_1,j_2,\cdots,j_n\right)$，

$$\begin{aligned}C_{j_1,j_2,\cdots,j_n}&=\frac{1}{\sqrt{K}}\left(\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)\left(g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_n}\right)\right)_{i=1}^{K}\\&=\frac{1}{\sqrt{K}}\left(\chi_{1,j_1}\left(g_{i_1}\right)\chi_{1,j_2}\left(g_{i_{21}}\right)\cdots\chi_{1,j_n}\left(g_{i_n}\right)\right)_{i=1}^{K}.\end{aligned} \tag{2}$$

下面我们证明码本 C_D 是几乎最佳码本，证明的关键是计算最大相关值 $I_{\max}\left(C_D\right)$。因为码本 C_D 中的码字 $C_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 是定义在 D 上的，所以需要估计特征在 D 中元素值的累加和。

引理 4. 对于 F 中的特征 $\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}$，$j_i=0,1,\cdots,q_i-1$，$i=1,2,\cdots,n$ 有

$$\begin{aligned}&\left|\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)(D)\right|\\&\le\begin{cases}K, & \left(j_1,j_2,\cdots,j_n\right)=(0,0,\cdots,0),\\ \dfrac{\left|1+\sqrt{q_1}\right|\cdots\left|1+\sqrt{q_n}\right|}{2}, & \left(j_1,j_2,\cdots,j_n\right)\ne(0,0,\cdots,0).\end{cases}\end{aligned}$$

证明：我们用数学归纳法证明该引理。

若 $n=1$ 时，若 χ_{1,j_1} 是平凡特征，显然有 $\chi_{1,j_1}(D)=K$；若 χ_{1,j_1} 不是平凡特征，则根据引理 2 知 $\left|\chi_{1,j_1}(D)\right|\le\frac{\sqrt{q}+1}{2}$，那么以上的结果成立。

现假设 $n-1$ 时结果是正确的，下面分析 n 的情况。

如果 $\left(j_1,j_2,\cdots,j_n\right)=(0,0,\cdots,0)$，那么 $\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}$ 是平凡特征。因此，以上结果是正确的。如果 $\left(j_1,j_2,\cdots,j_n\right)\ne(0,0,\cdots,0)$，则又分为以下三种情形：

1) $\left(j_1,j_2,\cdots,j_n\right)=(0,0,\cdots,0)$，$j_n\ne0$

$$
\begin{aligned}
&\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)(D)\\
&=\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)\left(\left(E_{n-1}\times\bar{D}_n\right)\cup\left(\bar{E}_{n-1}\times D_n\right)\right)\\
&=\left|E_{n-1}\right|\chi_{n,j_n}\left(\bar{D}_n\right)+\left|\bar{E}_{n-1}\right|\chi_{n,j_n}\left(D_n\right)\\
&=-\left|E_{n-1}\right|\chi_{n,j_n}\left(D_n\right)+\left|\bar{E}_{n-1}\right|\chi_{n,j_n}\left(D_n\right)\\
&=\chi_{n,j_n}\left(D_n\right).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\left|\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)(D)\right|=\left|\chi_{n,j_n}\left(D_n\right)\right|=\frac{\left|1+\sqrt{q_n}\right|}{2}<\frac{\left|1+\sqrt{q_1}\right|\cdots\left|1+\sqrt{q_n}\right|}{2}.
$$

2) $\left(j_1,j_2,\cdots,j_{n-1}\right)\neq(0,0,\cdots,0)$， $j_n=0$

在这种情况中我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)(D)\\
&=\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)\left(\left(E_{n-1}\times\bar{D}_n\right)\cup\left(\bar{E}_{n-1}\times D_n\right)\right)\\
&=\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}}\right)\left(E_{n-1}\right)\left|\bar{D}_n\right|+\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}}\right)\left(\bar{E}_{n-1}\right)\left|D_n\right|\\
&=\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}}\right)\left(E_{n-1}\right)\left|\bar{D}_n\right|-\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}}\right)\left(E_{n-1}\right)\left|D_n\right|\\
&=\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}}\right)\left(E_{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

再根据假设有

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)(D)\right|\\
&=\left|\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}}\right)\left(E_{n-1}\right)\right|\\
&\le\frac{\left|1+\sqrt{q_1}\right|\cdots\left|1+\sqrt{q_{n-1}}\right|}{2}\\
&<\frac{\left|1+\sqrt{q_1}\right|\cdots\left|1+\sqrt{q_n}\right|}{2}.
\end{aligned}
$$

3) $\left(j_1,j_2,\cdots,j_n\right)\neq(0,0,\cdots,0)$

在这种情况中我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)(D)\\
&=\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)\left(\left(E_{n-1}\times\bar{D}_n\right)\cup\left(\bar{E}_{n-1}\times D_n\right)\right)\\
&=(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}})\left(E_{n-1}\right)\chi_{n,j_n}\left(\bar{D}_n\right)\\
&\quad+\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}}\right)\left(\bar{E}_{n-1}\right)\chi_{n,j_n}\left(D_n\right)\\
&=-2\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}}\right)\left(E_{n-1}\right)\chi_{n,j_n}\left(D_n\right).
\end{aligned}
$$

所以根据假设及引理 2 有

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n,j_n}\right)(D)\right| \\
&=\left|-2\left(\chi_{1,j_1}\otimes\chi_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1,j_{n-1}}\right)\left(E_{n-1}\right)\chi_{n,j_n}\left(D_n\right)\right| \\
&\le 2\frac{\left|1+\sqrt{q_1}\right|\cdots\left|1+\sqrt{q_{n-1}}\right|}{2}\frac{\left|1+\sqrt{q_n}\right|}{2} \\
&<\frac{\left|1+\sqrt{q_1}\right|\cdots\left|1+\sqrt{q_n}\right|}{2}.
\end{aligned}
$$

定理 5. C_D 是由(1)式定义的码本。则 C_D 的参数为 $\left(q_1q_2\cdots q_n,\dfrac{q_1q_2\cdots q_n-1}{2}\right)$ 且有

$$
I_{\max}\left(C_D\right)\le\frac{\left|1+\sqrt{q_1}\right|\cdots\left|1+\sqrt{q_n}\right|}{q_1q_2\cdots q_n-1}.
$$

证明：设 $C_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 和 $C_{j_1',j_2',\cdots,j_n'}$ 是 C_D 中的两个码本且 $\left(j_1,j_2,\cdots,j_n\right)\ne\left(j_1',j_2',\cdots,j_n'\right)$。由(2)式我们可以得到

$$
\begin{aligned}
&\left|C_{j_1,j_2,\cdots,j_n}C^H_{j_1',j_2',\cdots,j_n'}\right| \\
&=\frac{1}{K}\left|\sum_{i=1}^{K}\chi_{1,j_1}\left(g_{i_1}\right)\chi_{2,j_2}\left(g_{i_2}\right)\cdots\chi_{n,j_n}\left(g_{i_n}\right)\overline{\chi}_{1,j_1'}\left(g_{i_1}\right)\overline{\chi}_{2,j_2'}\left(g_{i_2}\right)\cdots\overline{\chi}_{n,j_n'}\left(g_{i_n}\right)\right| \\
&=\frac{1}{K}\left|\sum_{i=1}^{K}\left(\chi_{1,j_1}\overline{\chi}_{1,j_1'}\right)\left(g_{i_1}\right)\left(\chi_{2,j_2}\overline{\chi}_{2,j_2'}\right)\left(g_{i_2}\right)\cdots\left(\chi_{n,j_n}\overline{\chi}_{n,j_n'}\right)\left(g_{i_n}\right)\right| \\
&=\frac{1}{K}\left|\sum_{i=1}^{K}\left(\left(\chi_{1,j_1}\overline{\chi}_{1,j_1'}\right)\otimes\left(\chi_{2,j_2}\overline{\chi}_{2,j_2'}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\chi_{n,j_n}\overline{\chi}_{n,j_n'}\right)\right)\left(g_{i_1},g_{i_2},\cdots,g_{i_n}\right)\right|.
\end{aligned}
$$

由于 $\left(j_1,j_2,\cdots,j_n\right)\ne\left(j_1',j_2',\cdots,j_n'\right)$，$\left(\chi_{1,j_1}\overline{\chi}_{1,j_1'}\right)\left(\chi_{2,j_2}\overline{\chi}_{2,j_2'}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\chi_{n,j_n}\overline{\chi}_{n,j_n'}\right)$ 是 F 的非平凡特征。利用引理 4 即可得证：

注 6. 对于一个参数为 $\left(q_1q_2\cdots q_n,\dfrac{q_1q_2\cdots q_n-1}{2}\right)$ 的码本。易算得

$$
I_w=\frac{\sqrt{q_1q_2\cdots q_n+1}}{q_1q_2\cdots q_n-1}.
$$

因此

$$
1\le\frac{I_{\max}\left(C_D\right)}{I_w}=\frac{\left|1+\sqrt{q_1}\right|\cdots\left|1+\sqrt{q_n}\right|}{\sqrt{q_1q_2\cdots q_n+1}}\to 1.
$$

当所有 $q_i\to\infty,1\le i\le n$。

推论 7. 当定理 5 中所用的有限域都相同时，不妨设都是 F_q。此时对应的 $\left(q^n,\dfrac{q^n-1}{2}\right)$ 密码本满足：

$$
I_{\max}\left(C_D\right)\le\frac{\left|1+\sqrt{q}\right|^n}{q^n-1}.
$$

对应的 Welch 界是 $I_w=\dfrac{\sqrt{q^n+1}}{q^n-1}$。因此，

$$1 \le \frac{I_{\max}(C_D)}{I_w} = \frac{\left|1+\sqrt{q}\right|^n}{\sqrt{q^n+1}} \to 1 .$$

基金项目

国家自然科学基金(No. 61502217)。

参考文献

[1] Welch, L. (1974) Lower Bounds on the Maximum Cross Correlation of Signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, **20**, 397-399. https://doi.org/10.1109/TIT.1974.1055219

[2] Fickus, M. and Mixon, D.G. (2016) Tables of the Existence of Equiangular Tight Frames. arXiv:1504.00253v2.

[3] Li, C., Yue, Q. and Huang, Y. (2015) Two Families of Nearly Optimal Codebooks. *Designs*, *Codes and Cryptography*, **75**, 43-57. https://doi.org/10.1007/s10623-013-9891-7

[4] Zhang, A.X. and Feng, K.Q. (2012) Construction of Cyclotomic Codebooks Nearly Meeting the Welch Bound. *Designs*, *Codes and Cryptography*, **63**, 209-224. https://doi.org/10.1007/s10623-011-9549-2

[5] Heng, Z., Ding, C. and Yue, Q. (2017) New Constructions of Asymptotically Optimal Codebooks with Multiplicative Characters. *IEEE Transactions on Information Theory*, **63**, 6179-6187. https://doi.org/10.1109/TIT.2017.2693204

[6] Heng, Z. (2018) Nearly Optimal Codebooks Based on Generalized Jacobi Sums. *Discrete Applied Mathematics*, **250**, 227-240. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.05.017

[7] Heng, Z. and Yue, Q. (2017) Codebooks Achieving the Levenshtein Bound from Generalized Bent Functions over Z_4. *Cryptography and Communications*, **9**, 41-53. https://doi.org/10.1007/s12095-016-0194-5

[8] 张爱仙, 冯克勤. 一类近似最佳码本的构造[J]. 中国科学: 信息科学, 2015(12): 1632-1639.

[9] Hu, H. and Wu, J. (2014) New Constructions of Codebooks Nearly Meeting the Welch Bound with Equality. *IEEE Transactions on Information Theory*, **60**, 1348-1355. https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2292745

[10] Lidl, R. and Niederreiter, H. (1984) Finite Fields. Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Ding, C.S. (2006) Complex Codebooks from Combinatorial Designs. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 4229-4235. https://doi.org/10.1109/TIT.2006.880058