

Weighted C-N Scheme of Homogeneous Fractional Diffusion Equations and Its Correction

Zhu Chen, Fenghui Huang*

Department of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: *huangfh@scut.edu.cn, 1012420749@qq.com

Received: Oct. 1st, 2019; accepted: Oct. 17th, 2019; published: Oct. 24th, 2019

Abstract

For the homogeneous time fractional diffusion equation, the accuracy of the numerical method will decrease when the exact solution is not smooth enough. In this case, we consider a weighted Crank-Nicolson scheme (masked as weighted C-N scheme) and its correction. After correcting the first step of the weighted C-N scheme, the second-order time accuracy can be restored. Then we give the detailed convergence analysis, and numerical examples verify the effectiveness of the scheme.

Keywords

Time Fractional Diffusion Equation, Crank-Nicolson Scheme, Convergence

齐次分数阶扩散方程的加权C-N格式及其修正

陈 著, 黄凤辉*

华南理工大学数学学院, 广东 广州
Email: *huangfh@scut.edu.cn, 1012420749@qq.com

收稿日期: 2019年10月1日; 录用日期: 2019年10月17日; 发布日期: 2019年10月24日

摘 要

对于齐次时间分数阶扩散方程, 在精确解不光滑时, 数值方法精度会下降。针对这种情况, 本文提出加权Crank-Nicolson格式(简记为加权C-N格式)及其修正格式, 在精确解不光滑时, 修正原格式的第1步后,

*通讯作者。

可恢复方法的时间2阶精度。本文接着给出详细的收敛性分析, 并且数值算例验证了方法的有效性。

关键词

时间分数阶扩散方程, Crank-Nicolson格式, 收敛性

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

分数阶微分方程的数值方法的精度常依赖于精确解的光滑性。针对精确解不光滑的情况, 许多学者开始研究数值方法的修正格式, 以保持离散格式的高精度。例如, Lubich [1] [2] [3]给出基于 1 阶和 2 阶向后差分格式两种修正方法, 并给出收敛性分析。Yan [4] [5]考虑 L1 格式的修正格式, 并提出基于分段 2 次插值的新型离散格式, 然后给出其修正格式。Tadjeeran [6]提出分数阶扩散方程的 2 阶 C-N 格式, Jin [7]接着考虑分数阶 C-N 格式的修正。在本文中, 我们考虑齐次分数阶扩散方程的加权 C-N 格式, 并针对精确解不光滑的情况提出比较简单的修正方法, 只需修正原格式的第 1 步, 即可保持格式的 2 阶时间精度。本文接着给出修正格式的收敛性分析, 最后通过数值算例验证方法的有效性。

本文考虑如下齐次分数阶扩散方程:

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha u(x,t) - Au(x,t) = 0, & L < x < R, \quad 0 < t \leq T \\ u(x,0) = u_0, & L < x < R \\ u(L,t) = b_L(t), \quad u(R,t) = b_R(t), & 0 < t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1$, ${}^C_0D_t^\alpha u(x,t)$ 是 Caputo 时间分数阶导数, 其定义为:

$${}^C_0D_t^\alpha u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds, & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{du(x,t)}{dt}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

算子 A 表示有界正则区域上的自伴正定二阶椭圆偏微分算子[4], 满足

$$\|(z-A)^{-1}\| \leq C|z|^{-1}, \quad \forall z \in \Sigma_\omega = \{z \neq 0 : |\arg z| < \omega\}, \quad \omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad (3)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 L_2 范数, 记 ${}^R_0D_t^\alpha u(x,t)$ 为 Riemman-Liouville 导数, 则有 ${}^R_0D_t^\alpha (u(x,t) - u_0) = {}^C_0D_t^\alpha u(x,t)$ 。

2. 加权 C-N 格式及其修正格式

令 $V(t) = u(t) - u_0$, 则方程(1)可表示为:

$${}^C_0D_t^\alpha V(x,t) - AV(x,t) = Au_0 \quad (4)$$

令 τ 为时间步长, $t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N, 0 \leq t_n \leq T, h$ 为空间步长, $x_i = L + ih, i = 0, 1, \dots, M, L \leq x_i \leq R$ 。

$\bar{\delta}_i^\alpha V(t_n) := \tau^{-\alpha} \sum_{j=0}^n b_{n-j} V^j$ 表示 ${}^R_0D_t^\alpha u(x,t)$ 的向后 Euler 卷积逼近, 其生成函数为:

$$\tilde{b}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \xi^j = (1-\xi)^\alpha \tag{5}$$

分数阶导数的逼近格式在 t_n 时刻的时间精度为 1 阶, 在 $t_n - \frac{\alpha}{2}\tau$ 时刻的时间精度为 2 阶, 对 $AV(t)$ 在 t_n 时刻和 t_{n-1} 时刻作线性拉格朗日插值, 可得 $t_n - \frac{\alpha}{2}\tau$ 时刻的逼近格式 $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)AV^n + \frac{\alpha}{2}AV^{n-1}$ 。带入方程 (4), 可得加权 C-N 格式:

$$\tau^{-\alpha} \sum_{j=0}^n b_{n-j} V^j - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)AV^n - \frac{\alpha}{2}AV^{n-1} = Au_0, \quad n = 1, 2, \dots, N \tag{6}$$

在精确解不光滑的情况下, 加权 C-N 格式达不到 2 阶时间精度。我们对加权 C-N 格式(6)的第 1 步得初值条件添加一个权系数 c_0 , 适当选取 c_0 可使离散格式保持 2 阶精度, 加权 C-N 修正格式如下:

$$\begin{cases} \tau^{-\alpha} \sum_{j=0}^n b_{n-j} V^j - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)AV^n - \frac{\alpha}{2}AV^{n-1} = (1+c_0)Au_0, & n = 1 \\ \tau^{-\alpha} \sum_{j=0}^n b_{n-j} V^j - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)AV^n - \frac{\alpha}{2}AV^{n-1} = Au_0, & n = 2, \dots, N \end{cases} \tag{7}$$

3. 加权 C-N 修正格式的收敛性分析

为了证明加权 C-N 修正格式的收敛性分析, 我们先给出 3 个引理。

引理 1: 定义式子:

$$\mu(z) = \frac{1 - e^{-\tau z}}{\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}e^{-\tau z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{c_0 e^{-\tau z} + \frac{e^{-\tau z}}{1 - e^{-\tau z}}}{1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}e^{-\tau z}} \tag{8}$$

本文统一令 $z \in \Gamma_\tau$, $\Gamma_\tau = \left\{z \in \Gamma : |\Im z| \leq \frac{\pi}{\tau}\right\} \subseteq \Sigma_\omega$ [1], 当权系数 $c_0 = \frac{1-\alpha}{2}$ 时, 则有:

$$|\mu(z) - 1| \leq C\tau^2 |z|^2 \tag{9}$$

其中 C 为正常数。

证明: 令 $w = \tau z$, $f(w) = \mu(z) - 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(w) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(w) = c_0 + \frac{\alpha-1}{2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f''(w) \neq 0$, 所以 $\mu(w) - 1 = O(w^2)$, 即可证得 $|\mu(z) - 1| \leq C\tau^2 |z|^2$ 。

引理 2: 定义式子:

$$K(z) = z^{-1} (z^\alpha - A)^{-1} A \tag{10}$$

$$z_\tau = \frac{1 - e^{-\tau z}}{\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}e^{-\tau z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{11}$$

则下式成立:

$$\|K(z)\| \leq C|z|^{-1} \tag{12}$$

$$\|K(z_\tau)\| \leq C|z|^{-1} \tag{13}$$

其中 $\|\bullet\|$ 表示 L_2 范数, C 为正常数。

证明: 令 $w = \tau z$, 则 $w \rightarrow 0$ 时, $\tau z_\tau = O(w)$, 所以 $c|\tau z| \leq |\tau z_\tau| \leq C|\tau z|$, 即 $c|z| \leq |z_\tau| \leq C|z|$ 。
由引理 1 可得 $z \in \Sigma_\omega, z^\alpha \in \Sigma_\omega$, 将 z, z^α 带入式(3)可得:

$$\left\| (z^\alpha - A)^{-1} \right\| \leq C|z|^{-\alpha} \tag{14}$$

$$\left\| (z_\tau^\alpha - A)^{-1} \right\| \leq C|z|^{-\alpha} \tag{15}$$

且下式成立:

$$(z^\alpha - A)^{-1} A = z^\alpha (z^\alpha - A)^{-1} - I \tag{16}$$

带入式(10)即可证得式(12)和(13):

$$\|K(z)\| = |z|^{-1} \left\| z^\alpha (z^\alpha - A)^{-1} - I \right\| \leq C|z|^{-1} \tag{17}$$

$$\|K(z_\tau)\| = |z_\tau|^{-1} \left\| z_\tau^\alpha (z_\tau^\alpha - A)^{-1} - I \right\| \leq C|z|^{-1} \tag{18}$$

引理 3: z, z^α 分别由引理 1 和引理 2 定义, 则下式成立:

$$\|K(z_\tau) - K(z)\| \leq C\tau^2 |z| \tag{19}$$

证明: 令 $w = \tau z$, $g(w) = \tau(z_\tau - z)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(w) = \lim_{x \rightarrow 0} g'(w) = \lim_{x \rightarrow 0} g''(w) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g'''(w) \neq 0$, ($0 < \alpha < 1$), 所以可得 $g(w) = O(w^3)$, 即:

$$|z_\tau - z| \leq C\tau^2 z^3 \tag{20}$$

由 $|z_\tau^\alpha - z^\alpha| \leq C|z|^{2\alpha-1} |z_\tau - z| \leq C\tau^2 |z|^{2+\alpha}$ ([8]引理 B.1), 且由式(16)及可得:

$$\begin{aligned} \|K(z_\tau) - K(z)\| &= \left\| z_\tau^{-1} (z_\tau^\alpha - A)^{-1} A - z^{-1} (z^\alpha - A)^{-1} A \right\| \\ &\leq |z_\tau|^{-1} \left\| (z_\tau^\alpha - A)^{-1} A - (z^\alpha - A)^{-1} A \right\| + |z_\tau^{-1} - z^{-1}| \left\| (z^\alpha - A)^{-1} A \right\| \\ &\leq |z_\tau|^{-1} \left\| z_\tau^\alpha (z_\tau^\alpha - A)^{-1} - z^\alpha (z^\alpha - A)^{-1} \right\| + |z_\tau^{-1} - z^{-1}| \left\| z^\alpha (z^\alpha - A)^{-1} - I \right\| \\ &\leq C|z|^{-1} |z_\tau^\alpha - z^\alpha| \left\| (z_\tau^\alpha - A)^{-1} \right\| + C|z|^{-1} |z|^\alpha \left\| (z_\tau^\alpha - A)^{-1} - (z^\alpha - A)^{-1} \right\| + C \frac{|z - z_\tau|}{|zz_\tau|} \\ &\leq C\tau^2 |z|^{-1} |z|^{2+\alpha} |z|^{-\alpha} + C|z|^{2\alpha-1} \left\| (z^\alpha - z_\tau^\alpha) (z_\tau^\alpha - A)^{-1} (z^\alpha - A)^{-1} \right\| + C\tau^2 |z| \leq C\tau^2 |z| \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $(z_\tau^\alpha - A)^{-1} - (z^\alpha - A)^{-1} = (z^\alpha - z_\tau^\alpha) (z_\tau^\alpha - A)^{-1} (z^\alpha - A)^{-1}$, 即证得引理 3。

为了给出收敛性分析, 接下来我们分别借助 Laplace 变换和 Cauchy 积分公式, 给出齐次分数阶扩散方程(4)的精确解和加权 C-N 修正格式(7)的数值解。对方程(4)作 Laplace 变换可得:

$$\hat{V}(z) = z^{-1} (z^\alpha - A)^{-1} Au_0 \tag{22}$$

对式(21)作 Laplace 逆变换可得方程(4)的精确解:

$$V(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{tz} z^{-1} (z^\alpha - A)^{-1} Au_0 dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{tz} K(z) u_0 dz \tag{23}$$

其中 $\Gamma = \{z : |\arg z| = \theta\} \subseteq \Sigma_\omega$, $\theta \in \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$ [4].

考虑加权 C-N 修正格式(7), 式子两边同乘 ξ^n , 并关于 n 求和, $n = 1, 2, \dots$, 令 $\tilde{V}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} V^n \xi^n$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n b_{n-j} V^j\right) \xi^n = \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \xi^j\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} V^n \xi^n\right)$, 由式(5)可得:

$$\tau^{-\alpha} \tilde{b}(\xi) \tilde{V}(\xi) - \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \xi\right) A \tilde{V}(\xi) = \left(c_0 \xi + \frac{\xi}{1-\xi}\right) A u_0 \tag{24}$$

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{c_0 \xi + \frac{\xi}{1-\xi}}{1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \xi} \cdot \left[\left(\frac{1-\xi}{\tau \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \xi\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha} - A \right]^{-1} A u_0 \tag{25}$$

令 $\xi = e^{-\tau z}$, 由 Cauchy 积分公式及式(8)、(10)和(11)可得加权 C-N 修正格式的数值解:

$$\begin{aligned} V^n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \xi^{-n-1} \tilde{V}(\xi) d\xi = \frac{\tau}{2\pi i} \int_{\Gamma_\tau} e^{tnz} \tilde{V}(e^{-\tau z}) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\tau} e^{tnz} \mu(z) K(z_\tau) u_0 dz \end{aligned} \tag{26}$$

定理 1 $V(t_n), V^n$ 分别为 $t = t_n$ 时刻方程(4)的精确解和加权 C-N 修正格式(7)的数值解, 则下式成立:

$$\|V(t_n) - V^n\| \leq C \tau^2 t_n^{-2} \|u_0\| \tag{27}$$

证明: $\|V(t_n) - V^n\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\tau} e^{tnz} [K(z) - \mu(z)K(z_\tau)] u_0 dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma/\Gamma_\tau} e^{tnz} K(z) u_0 dz \right\| \leq \|I\| + \|II\|$, 而 $\|\mu(z)K(z_\tau) - K(z)\| \leq |\mu(z) - 1| \|K(z_\tau)\| + \|K(z_\tau) - K(z)\|$, 由引理 1 和引理 2 可得:

$$\|\mu(z)K(z_\tau) - K(z)\| \leq C \tau^2 |z| \tag{28}$$

接着考虑 $\|I\|, \|II\|$, 令 $r = t_n |z|$, c 为正常数, 则:

$$\begin{aligned} \|I\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\tau} |e^{tnz}| \|\mu(z)K(z_\tau) - K(z)\| \cdot \|u_0\| dz \\ &\leq C \int_{\Gamma_\tau} |e^{tnz}| \tau^2 |z| \|u_0\| dz \\ &\leq C \tau^2 \int_0^\infty e^{-cr} r t_n^{-1} t_n^{-1} \|u_0\| dr \\ &\leq C \tau^2 t_n^{-2} \|u_0\| \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \|II\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma/\Gamma_\tau} |e^{tnz}| \|K(z)\| \|u_0\| dz \\ &\leq C \int_{\frac{1}{\tau}}^\infty e^{-c t_n |z|} |z|^{-2} |z| dz \\ &\leq C \tau^2 \int_0^\infty e^{-cr} r t_n^{-1} t_n^{-1} \|u_0\| dr \\ &\leq C \tau^2 t_n^{-2} \|u_0\| \end{aligned} \tag{30}$$

则可证得 $\|V(t_n) - V^n\| \leq C \tau^2 t_n^{-2} \|u_0\|$, 即权系数取 $c_0 = \frac{1-\alpha}{2}$ 时, 加权 C-N 修正格式为时间 2 阶精度。

4. 数值算例

数值算例 1: 考虑如下齐次分数阶扩散方程:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) - \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \\ u(x,0) = \sin(2\pi x), & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 < t \leq T \end{cases} \quad (31)$$

该方程的精确解为 $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \sin(2\pi x)$, u 在 $t=0$ 时不光滑。不同时间步长的误差如表 1 所示, 不同 α 下的误差与对应步长的对数关系如图 1 所示, 其中空间步长取 $h=10^{-4}, T=1$, 统一取离散误差为 L_2 误差 $\|V(t_N) - V^N\|$ 。

Table 1. L_2 error of weighted C-N scheme (6) and weighted C-N modified scheme (7)

表 1. 加权 C-N 格式(6)和加权 C-N 修正格式(7)的 L_2 误差

| τ | $\alpha = 0.1$ | | $\alpha = 0.5$ | | $\alpha = 0.8$ | |
|--------|----------------|------------|----------------|------------|----------------|------------|
| | (a) | (b) | (a) | (b) | (a) | (b) |
| 1/10 | 8.0376e-04 | 7.7824e-05 | 0.0023 | 3.0382e-04 | 0.0016 | 3.3967e-04 |
| 1/20 | 4.0058e-04 | 1.8380e-05 | 0.0012 | 7.3746e-05 | 8.5045e-04 | 8.4019e-05 |
| 1/40 | 1.9993e-04 | 4.4646e-06 | 5.9778e-04 | 1.8159e-05 | 4.3870e-04 | 2.0892e-05 |
| 1/80 | 9.9870e-05 | 1.0964e-06 | 3.0039e-04 | 4.5010e-06 | 2.2271e-04 | 5.2043e-06 |
| 1/160 | 4.9913e-05 | 2.6781e-07 | 1.5057e-04 | 1.1162e-06 | 1.1219e-04 | 1.2938e-06 |

表 1 给出不同 α 及不同时间步长取值下, 两种方法所得的误差。方法(a)为加权 C-N 格式离散, 方法(b)为加权 C-N 修正格式离散, 由表 1 可以看出, 两种格式误差均收敛, 且修正后的误差更小, 方法更精确。

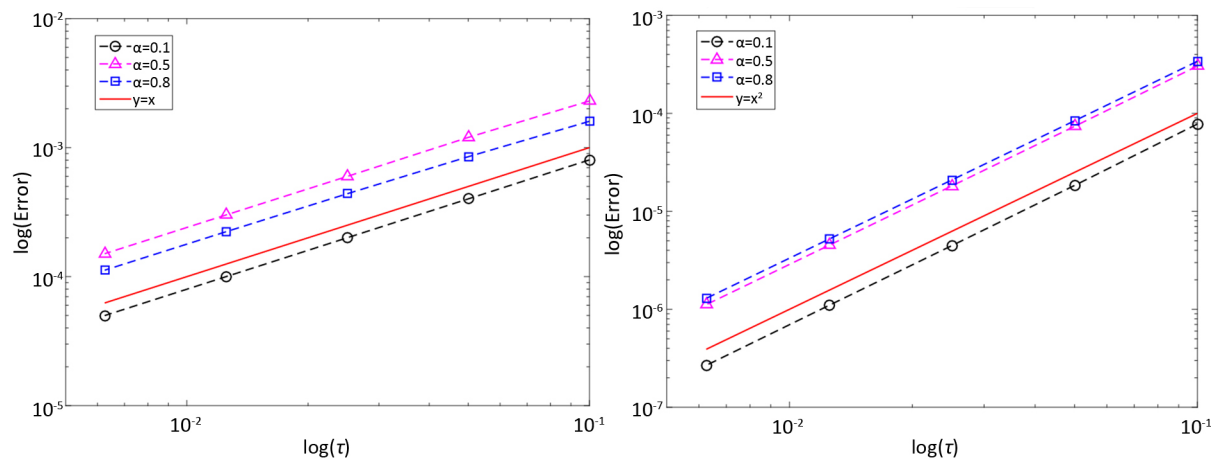


Figure 1. The relationship between error and time step

图 1. 误差与时间步长的关系

图 1 给出不同 α 下误差与时间步长的关系, 两坐标均为对数坐标, 其中图 1(a)为加权 C-N 格式, 图

1(b)为加权 C-N 修正格式。正如理论证明的结果一样, 加权 C-N 格式只有 1 阶时间精度, 而修正后的格式可达到 2 阶时间精度。

数值算例 2: 考虑如下齐次分数阶扩散方程:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) - \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \\ u(x,0) = x(1-x), & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 < t \leq T \end{cases} \quad (32)$$

该方程的精确解为 $u(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} E_\alpha \left(-(2n+1)^2 \pi^2 t^\alpha \right) \sin((2n+1)\pi x)$, u 在 $t=0$ 时不光滑。取 $\alpha=0.1$, 不同时间步长下的两种格式的误差和精度如表 2 所示。

Table 2. Error and time accuracy of weighted C-N scheme (6) and weighted C-N modified scheme (7)

表 2. 加权 C-N 格式(6)和加权 C-N 修正格式(7)的误差和时间精度

| τ | error(a) | error(b) | rate(a) | rate(b) |
|--------|------------|------------|---------|---------|
| 1/10 | 6.5328e-05 | 7.1457e-06 | — | — |
| 1/20 | 3.2639e-05 | 1.6780e-06 | 1.0011 | 2.0903 |
| 1/40 | 1.6311e-05 | 3.9876e-07 | 1.0001 | 2.0732 |
| 1/80 | 8.1575e-06 | 8.9321e-08 | 0.9996 | 2.1584 |
| 1/160 | 4.0836e-06 | 1.3228e-08 | 0.9983 | 2.7554 |

由表 2 可以看出, 随着时间步长减小, 两方法的误差均减小, 但加权 C-N 格式只有 1 阶时间精度, 而修正格式的精度可达到 2 阶。

基金项目

国家自然科学基金青年科学基金项目(61802129), 广东省国家青年基金纵向协同项目(2018A030310381)。

参考文献

- [1] Lubich, C., Sloan, I.H. and Thomee, V. (1996) Nonsmooth Data Error Estimates for Approximations of an Evolution Equation with a Positive-Type Memory Term. *Mathematics of Computation*, **65**, 1-17. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-96-00677-1>
- [2] Lubich, C. (2004) Convolution Quadrature Revisited. *BIT Numerical Mathematics*, **44**, 503-514. <https://doi.org/10.1023/B:BITN.0000046813.23911.2d>
- [3] Cuesta, E., Lubich, C. and Palencia, C. (2006) Convolution Quadrature Time Discretization of Fractional Diffusion-Wave Equations. *Mathematics of Computation*, **75**, 673-696. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-06-01788-1>
- [4] Yan, Y.B., Khan, M. and Ford, N.J. (2018) An Analysis of the Modified L1 Scheme for Time-Fractional Partial Differential Equations with Nonsmooth Data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **56**, 210-227. <https://doi.org/10.1137/16M1094257>
- [5] Xing, Y.Y. and Yan, Y.B. (2018) A Higher Order Numerical Method for Time Fractional Partial Differential Equations with Nonsmooth Data. *Journal of Computational Physics*, **357**, 305-323. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.12.035>
- [6] Tadjeran, C., Meerschaert, M.M. and Scheffler, H.P. (2006) A Second-Order Accurate Numerical Approximation for the Fractional Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*, **213**, 205-213. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.08.008>
- [7] Jin, B.T., Lazarov, R. and Zhou, Z. (2018) An Analysis of the Crank-Nicolson Method for Subdiffusion. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **38**, 518-541. <https://doi.org/10.1093/imanum/drx019>

- [8] Jin, B.T., Lazarov, R. and Zhou, Z. (2017) Correction of High-Order BDF Convolution Quadrature for Fractional Evolution Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **39**, A3129-A3152. <https://doi.org/10.1137/17M1118816>