

Random Walks on Folded Hypercubes

Yanfang Ren, Weihua Yang

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi
Email: 2545997585@qq.com, 175325539@qq.com

Received: Oct. 1st, 2019; accepted: Oct. 17th, 2019; published: Oct. 24th, 2019

Abstract

In this paper, we mainly study the mean first-passage time (MFPT) of random walks on folded hypercubes (FQ_n). We obtain an explicit expression of the mean first-passage time over all node

pairs, that is, if n is odd, $\langle T \rangle_n = \frac{(n+1)2^{n-1}}{2^n - 1} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{n+1} \right]$; if n is even,

$\langle T \rangle_n = \frac{(n+1)2^{n-1}}{2^n - 1} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \binom{n+1}{n} \right]$. Moreover, the scaling efficiency characteriz-

ing the random walks on FQ_n is given: $\frac{N}{2} \leq \langle T \rangle_n \leq \frac{N}{4}(n+1)$, and the Kirchhoff index of folded hypercubes is discussed.

Keywords

Random Walks, Mean First-Passage Time, Kirchhoff Index, Folded Hypercube

折叠超立方体上的随机游动

任艳芳, 杨卫华

太原理工大学数学学院, 山西 太原
Email: 2545997585@qq.com, 175325539@qq.com

收稿日期: 2019年10月1日; 录用日期: 2019年10月17日; 发布日期: 2019年10月24日

摘要

本文主要研究折叠超立方体(FQ_n)上随机游动的平均首达时间(MFPT)。当随机游动遍历图中所有顶点对时, 可得到全局平均首达时间的一个显式表达, 即, 如果 n 是奇数,

$$\langle T \rangle_n = \frac{(n+1)2^{n-1}}{2^n - 1} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{n+1} \right];$$
 如果 n 是偶数,

$$\langle T \rangle_n = \frac{(n+1)2^{n-1}}{2^n - 1} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \binom{n+1}{n} \right].$$
 此外, 还给出了折叠超立方体上随机游动的效率衡量: $\frac{N}{2} \leq \langle T \rangle_n \leq \frac{N}{4}(n+1)$, 以及讨论了折叠超立方体的基尔霍夫指数的计算。

关键词

随机游动, 平均首达时间, 基尔霍夫指数, 折叠超立方体

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图上的简单随机游动指的是质点在某个顶点 i 处, 下一时刻到达它每一个邻点概率相等的游动过程。它实际上是一个马尔科夫过程: $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$, 其中 X_n 表示质点在时刻 n 所处的位置。简单随机游动最初是由 Pearson [1] 提出的, 后来进行了大量的研究并且得到广泛的应用 [2] [3]。其中许多应用都与统计量有关, 包括首达时间 (FPT) [4], 平均首达时间 (MFPT) [5], 全局首达时间 (GFPT) [6], 全局平均首达时间 (GMFPT) [7]。

对连通图 $G = (V, E)$, 令 $T_{ij} = \min \{n : n \geq 0, X_n = j, X_0 = i\}$, 它表示一个质点从图上一顶点 i 出发, 第一次到达顶点 j 所需要的时间为 n 或经过 n 步首次到达顶点 j 。则期望 $\bar{T}_{ij} = E_i T_j = \sum_{n=1}^{\infty} n P\{T_{ij} = n | X_0 = i\}$ 就是顶点 i 到顶点 j 的平均首达时间 (MFPT) 它表示从顶点 i 出发首次到达顶点 j 的期望时间。图上所有顶点对的平均首达时间的平均值用 $\langle T \rangle_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i \sum_{j \neq i} \bar{T}_{ij}$ 表示, 称为全局平均首达时间 (GMFPT)。

研究图上简单随机游动的一个重要方法是电网络方法。电网络方法为理解随机游动的某些参数提供了直观的基础, 并通过随机游动过程中电阻距离与参数之间的关系, 极大地简化了这些参数的计算和估计。本文就是利用电网络方法得到折叠超立方体上随机游动的全局平均首达时间的一个表达式。Doyle 和 Snell [8] 研究了随机游动和电网络之间的关系, 他们指出一个无向图的每一条边都当成电阻值为 1 的单位电阻, 则这个图就可以看作一个电网络。Klein 和 Randić [9] 提出了一个很有用的参数—电阻距离, 记为 r_{ij} (1 安培的电流从顶点 i 流进, 顶点 j 流出这个电网络, 则 i, j 之间的电势差称为 i, j 之间的等效电阻或电阻距离)。基于电阻距离的一个著名的拓扑指数为基尔霍夫指数 [9], 它被定义为图 G 上所有顶点对的电阻距离之和, 记为 $K_f = \sum_{i < j} r_{ij}$ 。

然而设计计算电阻距离与基尔霍夫指数的有效算法是有困难的。因此, 对于某些特殊结构的图类, 寻找它的基尔霍夫指数的显式表达是有意义的。折叠超立方体网络近年来引起了人们对广泛关注。由 EI-Amawy 和 Latifi [10] 首次提出的折叠超立方体 (FQ_n) 是超立方体 (Q_n) 的一个重要变形。但是在很多性质上折叠超立方体要优于超立方体, 例如 FQ_n 的直径为 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, 约为 Q_n 的一半。更多的性质可参见 [11] [12] [13] [14]。 n 维折叠超立方体是定义在集合 $\{0, 1\}^n$ 上的含有 2^n 个顶点的图。它的一个顶点 x 可以由序列 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 编码, 其中每一个 x_i 取值为 0 或 1, 两个顶点之间有边相连当且仅当它们在一个坐标或

全部坐标的值不同时。显然折叠超立方体的顶点数为 $N = 2^n$ ，边数为 $E = (n+1)2^{n-1}$ 。

此外，我们还需要介绍一下图的拉普拉斯谱。矩阵 $L(G) = D(G) - A(G)$ 称为图 G 的拉普拉斯矩阵，其中 $D(G)$ 是图 G 的度矩阵， $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵。 $L(G)$ 的特征值则为图 G 的拉普拉斯特征值，所有的拉普拉斯特征值： $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ，构成图 G 的拉普拉斯谱，记为 $\text{Spec}_L(G)$ 。拉普拉斯矩阵在图论研究中占有重要地位，利用拉普拉斯谱可以估计图的连通性，直径等不变量。Zhu *et al.* [15] 和 Gutman [16] 给出了拉普拉斯谱与基尔霍夫指数的关系。M.Chen 和 B.X.Chen [17] 研究了折叠超立方体的拉普拉斯谱。下面给出一些我们需要应用的结果。

引理 1.1: (Zhu *et al.* [15]) $K_f = N \sum_{i=2}^N \frac{1}{\lambda_i}$ 。

引理 1.2: (Chen *et al.* [17]) $\text{Spec}_L(FQ_n) = \{0, 1, [2t+2]^{\gamma_t}, [2n+2]^{\gamma_n} \mid t=1, 2, \dots, n\}$ ， $\gamma_t = \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{2j}$ ，

$$\gamma_n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{2j-1}。$$

引理 1.3: (Chandra [18]) $T_{ij} + T_{ji} = 2Er_{ij}$ 。

引理 1.4: (二项式定理) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ 。

2. GMFPT 的一个显式解

MFPT 是衡量随机游动效率的一个重要指标。MFPT 越小，网络上随机游动的速率就会越高。因此它有着重要而广泛的应用，其理论表达式和数值计算一直是研究的方向之一。不同网络结构的不同拓扑性质对随机游动行为有着不同影响。在正则格网络上，MFPT 已有了严格的结果[19]；在分形网络上，MFPT 得到了精确的表达式[4] [20]；在超立方体网络上，MFPT 的显式表达式也已得出。在此基础上我们给出折叠超立方体上 GMFPT 的显式解。

定理 2.1: 折叠超立方体的 GMFPT 是

$$\langle T \rangle_n = \begin{cases} \frac{(n+1)2^{n-1}}{2^n-1} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{n+1} \right], & n \text{ 为奇数} \\ \frac{(n+1)2^{n-1}}{2^n-1} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \binom{n+1}{n} \right], & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

证明: 由定义，折叠超立方体的 GMFPT 为 $\langle T \rangle_n = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \sum_j^{N-1} T_{ij}$ 。

结合引理 1.1 和引理 1.2 中的两个等式，可以得到 $\langle T \rangle_n = \frac{1}{N(N-1)} 2EK_f = \frac{2E}{N-1} \sum_{i=2}^N \frac{1}{\lambda_i}$ 。

利用引理 1.3 可知 $\sum_{i=2}^N \frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{2j} \binom{0}{t+1-2j} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \binom{n}{2j-1} \binom{0}{n-2j+1} \frac{1}{n+1}$ 。

$$\text{由于} \begin{cases} \binom{0}{t+1-2j} = 1, & t+1-2j=0 \\ \binom{0}{t+1-2j} = 0, & t+1-2j \neq 0 \end{cases}。$$

可将 $\sum_{i=2}^N \frac{1}{\lambda_i}$ 展开式的第一个多项式化为

$$\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{2j} \binom{0}{t+1-2j} \frac{1}{t+1} = \begin{cases} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} \binom{n+1}{n-1} \right] \right], & n \text{ 为奇数} \\ \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \binom{n+1}{n} \right] \right], & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

同样的, 由于 $\begin{cases} \binom{0}{n-2j+1} = 1, & n-2j+1=0 \\ \binom{0}{n-2j+1} = 0, & n-2j+1 \neq 0 \end{cases}$

可将 $\sum_{i=2}^N \frac{1}{\lambda_i}$ 展开式的第二个多项式化为

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \binom{n}{2j-1} \binom{0}{n-2j+1} \frac{1}{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2(n+1)}, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

综合上述讨论即得证。

定理 2.2: $\frac{N}{2} \leq \langle T \rangle_n \leq \frac{N}{4}(n+1)$ 。

证明: 定理 2.1 中的结果可改写为 $\langle T \rangle_n = \frac{(n+1)2^{n-1}}{2^n - 1} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \binom{n+1}{2n} \right]$, 当 n 为奇

数时, 利用 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 有

$$\begin{aligned} & \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} \\ &= \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n+1} + \binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

当 n 为偶数时, 利用引理 1.4 中的二项式定理, 则有

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} + \cdots + \binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+1}{n-3} + \cdots + \binom{n+1}{1} = \frac{1}{2}(2^{n+1} - 2) = 2^n - 1.$$

由此可知 $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} + \cdots + \binom{n+1}{2n} = 2^n - 1$ 。

显然,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \left[\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} + \cdots + \binom{n+1}{2n} \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \binom{n+1}{2n} \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} + \cdots + \binom{n+1}{2n} \right] \end{aligned}$$

因此, $2^{n-1} \leq \langle T \rangle_n \leq 2^{n-2}(n+1)$ 。

3. 基尔霍夫指数

由定理 2.1 可以很容易得到折叠超立方体的基尔霍夫指数。

定理 3.1: 折叠超立方体的基尔霍夫指数为

$$K_f(FQ_n) = \begin{cases} 2^{n-1} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} \binom{n+1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{n+1} \right], & n \text{ 为奇数} \\ 2^{n-1} \left[\frac{1}{2} \binom{n+1}{2} + \frac{1}{4} \binom{n+1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} \binom{n+1}{n-1} + \frac{1}{n} \binom{n+1}{n} \right], & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} K_f(FQ_n) = \frac{N^2}{4}$ 。

证明: 与定理 2.2 中的讨论类似,

$$\frac{2^n - 1}{n+1} 2^{n-1} \leq K_f(FQ_n) \leq \frac{2^n - 1}{2} 2^{n-1} (n \rightarrow \infty)$$

$$\frac{2^n - 1}{2(n+1)} N \leq K_f(FQ_n) \leq \frac{2^n - 1}{4} N (n \rightarrow \infty)$$

$$\frac{N}{4} N \leq K_f(FQ_n) \leq \frac{N}{4} N - \frac{N}{4} (n \rightarrow \infty)$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} K_f(FQ_n) = \frac{N^2}{4}$ 。

基尔霍夫指数是一种基于距离的拓扑指数。其在物理, 化学, 图论等领域的应用引起了人们的广泛关注[21] [22] [23]。基尔霍夫指数的计算在圈图, 完全图和一些合成图上已经取得了许多结果。近年来超立方体和折叠超立方体的基尔霍夫指数研究也取得了进展[24] [25], 关于折叠超立方体的基尔霍夫指数有如下结果。对任意的正整数 n 有:

$$1) K_f(FQ_n) = 2^n \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\binom{n}{n-i} + \binom{n}{n-i-1}}{4i}, \quad i=1, 2, \dots, \frac{n}{2}, \quad \text{当 } n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$2) K_f(FQ_n) = 2^n \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\binom{n}{2i-1} + \binom{n}{2i}}{4i} + \frac{2^{n-1}}{n+1}, \quad i=1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \quad \text{当 } n \equiv 1 \pmod{2}$$

本文运用拉普拉斯谱方法, 得到了折叠超立方体的基尔霍夫指数更简单的一种表达形式。

4. 结论

本文给出了折叠超立方体上 GMFPT 的表达式, 并且得到了 GMFPT 的上下界。另外还讨论了折叠超立方体的基尔霍夫指数的闭合表达式。一般地, 拉普拉斯谱方法也可以用来研究加强超立方体上的随机游动, 但对于 GMFPT 等一些参数计算的简化还需要进一步的工作。

基金项目

本文得到了中国自然科学基金(11671296)和山西省优青青年学术带头人项目支持。

参考文献

- [1] Pearson, K. (1905) The Problem of the Random Walk. *Nature*, **72**, 294. <https://doi.org/10.1038/072294b0>
- [2] Spitzer, F. (2001) Principles of Random Walk. Springer, Berlin.
- [3] Woess, W. (1994) Random Walks on Infinite Graphs and Groups—A Survey on Selected Topics. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **26**, 1-60. <https://doi.org/10.1112/blms/26.1.1>
- [4] Zhang, Z., Lin, Y., Zhou, S., Wu, B. and Guan, J. (2009) Mean First-Passage Time for Random Walks on the T-Graph. *New Journal of Physics*, **11**, Article ID: 103043. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/11/10/103043>
- [5] Wu, S., Zhang, Z. and Chen, G. (2011) Random Walks on Dual Sierpinski Gaskets. *The European Physical Journal*, **82**, 91-96. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2011-20338-0>
- [6] Haynes, C.P. and Roberts, A.P. (2008) Global First-Passage Times of Fractal Lattices. *Physical Review E*, **78**, Article ID: 041111. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.041111>
- [7] Zhang, Z., Wu, B., Zhang, H., Zhou, S., Guan, J. and Wang, Z. (2010) Determining Global Mean First-Passage Time of Random Walks on Vicsek Fractals Using Eigenvalues of Laplacian Matrices. *Physical Review E*, **81**, Article ID: 031118. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.031118>
- [8] Doyle, P.G. and Snell, J.L. (2006) Random Walks and Electric Networks. The Mathematical Association of America, Oberlin.
- [9] Klein, D.J. and Randic, M. (1993) Resistance Distance. *Journal of Mathematical Chemistry*, **12**, 81-95. <https://doi.org/10.1007/BF01164627>
- [10] El-amawy, A. and Latifi, S. (1991) Properties and Performance of Folded Hypercubes. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **2**, 31-42. <https://doi.org/10.1109/71.80187>
- [11] Mirafzal, S.M. (2016) Some Other Algebraic Properties of Folded Hypercubes. *Ars Combinatoria*, **124**, 153-156.
- [12] Xu, J.M. (2001) Topological Structure and Analysis of Interconnection Networks. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [13] Xu, J.M. and Ma, M.J. (2006) Cycles-In Folded Hypercubes. *Applied Mathematics Letters*, **19**, 140-145. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.04.002>
- [14] Xu, J.M. and Ma, M.J. (2010) Algebraic Properties and Panconnectivity of Folded Hypercubes. *Ars Combinatoria*, **95**, 179-186.
- [15] Zhu, H., Klein, D.J. and Lukovits, I. (1996) Extensions of the Wiener Number. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, **36**, 420-428. <https://doi.org/10.1021/ci950116s>
- [16] Gutman, I. and Mohar, B. (1996) The Quasi-Wiener and the Kirchhoff Indices Coincide. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, **36**, 982-985. <https://doi.org/10.1021/ci960007t>
- [17] Chen, M. and Chen, B.X. (2011) Spectra of Folded Hypercubes. *Journal of East China Normal University*, **61**, 39-46.
- [18] Chandra, A.K., Raghavan, P., Ruzzo, W.L. and Smolensky, R. (1989) The Electrical Resistance of a Graph Captures Its Commute and Cover Times. *Proceedings of the 21st Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Seattle, 14-17 May 1989, 574-585. <https://doi.org/10.1145/73007.73062>
- [19] Montroll, E.W. (1969) Random Walks on Lattices. III. Calculation of First-Passage Times with Application to Exciton Trapping on Photosynthetic Units. *Journal of Mathematical Physics*, **10**, 753-765. <https://doi.org/10.1063/1.1664902>
- [20] Agliari, E. (2008) Exact Mean First-Passage Time on the T-Graph. *Physical Review E*, **77**, Article ID: 011128. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.011128>
- [21] Estrada, E. and Hatano, N. (2010) Topological Atomic Displacements, Kirchhoff and Wiener Indices of Molecules. *Chemical Physics Letters*, **486**, 166-170. <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2009.12.090>
- [22] Maden, A.D., Cevik, A.S., Cangul, I.N. and Das, K.C. (2013) On the Kirchhoff Matrix, a New Kirchhoff Index and the Kirchhoff Energy. *Journal of Inequalities and Applications*, **2013**, 337. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-337>
- [23] Zhang, H., Jiang, X. and Yang, Y. (2009) Bicyclic Graphs with Extremal Kirchhoff Index. *Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **61**, 697-712.
- [24] Liu, J., Pan, X., Wang, Y., et al. (2014) The Kirchhoff Index of Folded Hypercubes and Some Variet Networks. *Mathematical Problems in Engineering*, **3**, 1-9. <https://doi.org/10.1155/2014/380874>
- [25] Zhang, J.Y., Xiang, Y.H. and Sun, W.G. (2018) A Discrete Random Walk on the Hypercube. *Physical A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **494**, 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.12.005>