Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(10), 1632-1635
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.810192

Hans汉斯

Equivalence of Ekeland Variational Principle and Caristi Fixed Point Theorem in Complete Random Metric Spaces

Yujie Yang*, Chong Li

Department of Basic Courses, Beijing Union University, Beijing
Email: *yangyujie007@buu.edu.cn

Received: Oct. 2nd, 2019; accepted: Oct. 21st, 2019; published: Oct. 28th, 2019

Abstract

Firstly, it is proved that Ekeland variational principle is equivalent to Caristi fixed point theorem on complete random metric spaces under (ε,λ)-topology. Furthermore, making use of the relationship of the basic results between the two topologies, we prove that in the special random metric space—the random normed model, they are equivalent in both topologies. Finally, from Caristi fixed point theorem on complete random normed modules, the directional fixed point theorems are established on complete random normed modules under two topologies.

Keywords

Random Metric Space, Random Normed Module, Ekeland's Variational Principle, Caristi Fixed Point Theorem

完备随机度量空间上Ekeland变分原理与Caristi不动点定理的等价性

杨玉洁*，李　翀

北京联合大学基础课教学部，北京
Email: *yangyujie007@buu.edu.cn

收稿日期：2019年10月2日；录用日期：2019年10月21日；发布日期：2019年10月28日

*通讯作者。

文章引用：杨玉洁，李翀. 完备随机度量空间上 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理的等价性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(10): 1632-1635. DOI: 10.12677/aam.2019.810192

摘 要

首先证明了在(ε,λ)-拓扑下完备随机度量空间上的Ekeland变分原理与Caristi不动点定理是等价的。再者，利用两种拓扑下基本结果之间的关系，证明了在特殊的随机度量空间——随机赋范模上，两者在两种拓扑下都是等价的；最后由完备随机赋范模上的Caristi不动点定理，在两种拓扑下建立了完备随机赋范模上的方向压缩不动点定理。

关键词

随机度量空间，随机赋范模，Ekeland变分原理，Caristi不动点定理

1. 引言

2012 年，郭铁信教授与笔者建立了定义在完备随机度量空间上的 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理[1]。经典泛函分析中，史树中教授在文献[2]中研究了完备度量空间上的 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理是等价的。这启发我们在随机度量理论中来思考这个问题。虽然目前还不能确定 T_C-拓扑下完备随机度量空间上 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理是否等价，但本文证明了在(ε,λ)-拓扑下两者确实是等价的。再者，利用两种拓扑下基本结果之间的关系，本文证明了在特殊的随机度量空间——随机赋范模上，Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理在两种拓扑下都是等价的；最后由完备随机赋范模上的 Caristi 不动点定理，在两种拓扑下建立了完备随机赋范模上的方向压缩不动点定理。

文献[3]与[4]也曾讨论过完备随机度量空间上的 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理及其等价性问题，但是本文与其有如下几点不同：首先相比较文献[3]与[4]中给出的随机度量空间上的下半连续函数的定义，本文中下半连续函数的定义更弱、更自然，而且我们允许函数取值于 $\bar{L}^0(F)$，而文献[3]与[4]中仅仅允许函数取值于 $L^0(F)$，故我们的结果改进了[3]与[4]中的相应结果。再者，本文的结果是在两种拓扑(ε,λ)-拓扑与 T_C-拓扑下建立的，而文献[3]与[4]的结果仅是在(ε,λ)-拓扑下建立的。而且，相比较文献[2]的证明方法，本文的证明方法更为简洁。

2. 主要结果

在文献[1]中，郭铁信教授与笔者建立了 $d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 RM-空间上的 Ekeland 变分原理的精确形式及一般形式，即如下引理 1 和引理 2。

引理 1 [1] ($d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RM*-空间上 Ekeland 变分原理的精确形式)

设(E,d)为以(Ω,F,P)为基的 $d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 RM-空间，函数 $\phi:E\to\bar{L}^0(F)$为真的、$T_{\varepsilon,\lambda}$-下半连续的且有下界的函数。那么对于任意的 $x_0\in dom(\phi)$，存在 $v\in dom(\phi)$满足如下条件：

1) $\phi(v)\le\phi(x_0)-d(x_0,v)$；

2) 对于任意的 $x\in E$ 且 $x\neq v$，有 $\phi(x)\nleq\phi(v)-d(x,v)$成立，即存在 $A_x\in F$ 且 $P(A_x)>0$ 使得在 A_x 上

$\phi(x) > \phi(v) - d(x,v)$成立。

引理 2 [1] ($d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RM*-空间上 Ekeland 变分原理的一般形式)

设(E,d)为以(Ω,F,P)为基的$d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RM*-空间，函数$\phi: E \to \bar{L}^0(F)$为真的、$T_{\varepsilon,\lambda}$-下半连续的且有下界的函数。则存在$v \in E$使得$\phi(x) \not\leq \phi(v) - d(x,v), \forall x \neq v$。

其实，$d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RM*-空间上的 Ekeland 变分原理的这两种形式是等价的，证明如下。

定理 1 引理 1 $\Leftrightarrow$ 引理 2。

证明 显然由引理 1 可得引理 2；若将引理 2 中E的闭子集$M := \{x \in E : \phi(x) \leq \phi(x_0) - d(x_0, x)\}$来代替$E$，将$\phi|_M$代替$\phi$，则得到引理 1。故引理 1 等价于引理 2。

下面的引理 3 为郭铁信教授与笔者建立的$d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RM*-空间上的 Caristi 不动点定理。

引理 3 [1] ($d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RM*-空间上的 Caristi 不动点定理)

设(E,d)为以(Ω,F,P)为基的$d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RM*-空间，函数$\phi: E \to \bar{L}^0(F)$为真的、$T_{\varepsilon,\lambda}$-下半连续的且有下界的函数。映射$T: E \to E$满足$\phi(Tu) + d(Tu,u) \leq \phi(u), \forall u \in E$则$T$有不动点。

下面我们证明$d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RM*-空间上的 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理即引理 2 与引理 3 是等价的。

定理 2 引理 2$\Leftrightarrow$引理 3。

证明 1) 必要性：由引理 2 知，存在$v \in E$，对于任意的$x \in E$且$x \neq v$，有$\phi(x) \not\leq \phi(v) - d(x,v)$成立，即存在$A_x \in F$且$P(A_x) > 0$使得在$A_x$上$\phi(x) > \phi(v) - d(x,v)$成立。我们可以推断$Tv = v$。否则，若$Tv \neq v$，则存在$A_{Tv} \in F$且$P(A_{Tv}) > 0$使得在$A_{Tv}$上$\phi(Tv) > \phi(v) - d(Tv,v)$成立。这与$\phi(Tu) + d(Tu,u) \leq \phi(u), \forall u \in E$产生矛盾。故$Tv = v$，即$T$有不动点。

2) 充分性：反证法。若引理 2 不成立，则对于任意的$v \in E$，存在$x_v \in E$使得$x_v \neq v$且$\phi(x_v) > \phi(v) - d(x_v,v)$成立。定义函数$T: E \to E$为$Tv = x_v$。则$Tv \neq v, \forall v \in E$且$\phi(Tv) \leq \phi(v) - d(Tv,v)$成立。由$Tv \neq v, \forall v \in E$知，$T$无不动点。而由$\phi(Tv) \leq \phi(v) - d(Tv,v)$成立及引理 3 知$T$有不动点。产生矛盾，故引理 2 成立。

由此，我们可知以上三个引理都是等价的，即

推论 1 引理 1 $\Leftrightarrow$ 引理 2 $\Leftrightarrow$ 引理 3。

郭铁信教授在长文[5]中系统地建立了上述提到的两种拓扑即(ε,λ)-拓扑及局部L^0-凸拓扑下导出的某些基本定理之间的内在关系，即两种拓扑下 *RN*-模的完备性、闭集以及下半连续性之间的关系。又由于随机赋范模是特殊的随机度量空间，局部L^0-凸拓扑下完备随机赋范模上的 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理也是等价的。

由$d_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RM*-空间上的 Caristi 不动点定理，可得如下$T_{\varepsilon,\lambda}$**-完备 *RN*-模上**的方向压缩不动点定理。

推论 2 ($T_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RN*-模上的强压缩不动点定理)

设$(E,\|\cdot\|)$为数域R上以(Ω,F,P)为基的$T_{\varepsilon,\lambda}$-完备 *RN*-模。$k \in L^0_{++}$且在Ω上$0 < k < 1$。$T: E \to E$为$T_{\varepsilon,\lambda}$-连续函数且具有局部性质。若对于任意的$v \in E$，存在$x_0 \in E$使得$x_0 \neq v$且

1) $\|v - x_0\| + \|Tv - x_0\| = \|v - Tv\|$；

2) $\|Tv - x_0\| \leq \|v - x_0\|$。

则T有不动点。

证明 定义函数$f: E \to E$如下：若$Tv \neq v$，则$f(v) = x_0$；若$Tv = v$，则$f(v) = v$。显然，函数T有不动点等价于f有不动点。

另定义函数 $\phi: E \to L^0(F)$ 为 $\phi(v) = \dfrac{\|v - Tv\|}{1-k}, \forall v \in E$。因为 T 为 $T_{\varepsilon,\lambda}$-连续函数，故 ϕ 为 $T_{\varepsilon,\lambda}$-连续函数。从而 ϕ 为 $T_{\varepsilon,\lambda}$-下半连续函数。

由 T 具有局部性质，故

$$\tilde{I}_A \cdot \phi(\tilde{I}_A \cdot v) = \tilde{I}_A \cdot \frac{\|\tilde{I}_A \cdot v - T(\tilde{I}_A \cdot v)\|}{1-k} = \frac{\|\tilde{I}_A \cdot v - Tv\|}{1-k} = \tilde{I}_A \cdot \phi(v), \forall A \in F$$

从而 ϕ 具有局部性质。显然，0 是函数 ϕ 的下界。

为了证明 f 有不动点，由引理 3 知，我们只需要证明 $\|v - f(v)\| \le \phi(v) - \phi(f(v))$ 成立即可。

若 $v = f(v)$，则显然 $\|v - f(v)\| \le \phi(v) - \phi(f(v))$ 成立。

若 $v \ne f(v)$，则 $f(v) = x_0$。由(1) (2)知，

$$\begin{aligned} 0 &\le k\|v - x_0\| - \|Tv - T(x_0)\| \\ &\le k\|v - x_0\| - \|T(x_0) - x_0\| + \|x_0 - Tv\| \\ &\le (k-1)\|v - x_0\| - \|T(x_0) - x_0\| + \|v - Tv\| \end{aligned}$$

故 $\|v - f(v)\| \le \phi(v) - \phi(f(v))$ 成立。

再由两种拓扑下随机赋范模的完备性以及下半连续函数的关系[5]，可得 T_C-完备的 RN-模上的方向压缩不动点定理如下：

推论 3 (T_C-完备 *RN*-模上的方向压缩不动点定理)

设 $(E, \|\cdot\|)$ 为数域 R 上以 (Ω, F, P) 为基的 T_C-完备 RN-模且具有可数连结性质。$k \in L^0_{++}$ 且在 Ω 上 $0 < k < 1$。$T: E \to E$ 为 T_C-连续函数且具有局部性质。若对于任意的 $v \in E$，存在 $x_0 \in E$ 使得 $x_0 \ne v$ 且

1) $\|v - x_0\| + \|Tv - x_0\| = \|v - Tv\|$；

2) $\|Tv - x_0\| \le \|v - x_0\|$。

则 T 有不动点。

3. 总结

本为在两种拓扑下证明了完备随机度量空间上的 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理的等价性。并在两种拓扑下建立了完备随机赋范模上的方向压缩不动点定理。

基金项目

国家自然科学基金(No: 11601030)；北京市自然科学基金(No: 1194022)；“十三五”时期北京市属高校高水平教师队伍建设支持计划(No: CIT&TCD201704071)；北京联合大学人才强校优选-百杰计划(项目号：BPHR2018CZ09)。

参考文献

[1] Guo, T.X. and Yang, Y.J. (2012) Ekeland's Variational Principle for an $\bar{L}^0$ -Valued Function on a Complete Random Metric Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **389**, 1-14.

[2] 史树中. Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理的等价性[J]. 数学进展, 1987, 16(2): 203-206.

[3] 白延琴, 熊道统. 随机度量空间上的 Ekeland 变分原理、Petal 定理和 Drop 定理[J]. 工程数学学报, 1990, 1(7): 76-82.

[4] 游兆永, 朱林户. E-空间上的 Ekeland 变分原理[J]. 工程数学学报, 1988, 5(3): 1-7.

[5] Guo, T.X. (2010) Relations between Some Basic Results Derived from Two Kinds of Topologies for a Random Locally Convex Module. *Journal of Functional Analysis*, **258**, 3024-3047. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.02.002