Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(11), 1689-1699
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.811198

Hans汉斯

Travelling Wave Solutions of a Class of Generalized Klein-Gordon Equations

Yuee Lv[1], Qi Liu[2]

[1]College of Information Science and Engineering, Linyi University, Linyi Shandong
[2]College of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: lye_lv@126.com

Received: Oct. 10th, 2019; accepted: Oct. 29th, 2019; published: Nov. 5th, 2019

Abstract

In this paper, the travelling wave solutions of a class of generalized Klein-Gordon equations are studied by Riccati equation method. Some new travelling wave solutions of special forms are obtained.

Keywords

Riccati Equation, Traveling Wave Solution

广义Klein-Gordon方程的行波解

吕月娥[1]，刘　琪[2]

[1]临沂大学信息科学与工程学院，山东 临沂
[2]临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: lye_lv@126.com

收稿日期：2019年10月10日；录用日期：2019年10月29日；发布日期：2019年11月5日

摘　要

本文运用黎卡提方程法解决**Klein-Gordon**方程的行波解问题，得到了几类特殊形式的行波解。

关键词

黎卡提方程，行波解

文章引用：吕月娥，刘琪. 广义 Klein-Gordon 方程的行波解[J]. 应用数学进展, 2019, 8(11): 1689-1699.
DOI: 10.12677/aam.2019.811198

1. 基础知识

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=A(t)y^2+B(t)y+C(t)$$

的方程称为黎卡提方程,其中 $A(t),B(t)$ 和 $C(t)$ 在所讨论的区间内为连续函数。1841 年法国数学家刘维尔证明了在一般情形下黎卡提方程的解不能运用函数的有限次积分以及有限次代数运算而得到，然而他得到了特殊类型的黎卡提方程可化为伯努利方程求解的方法。国内外在黎卡提方程的推广研究侧重点各有差异，比如代数微分方程，离散微分方程，KdV 方程的无穷序列复合型类孤子解等。

1) 运用黎卡提方程，可以求解非线性波动方程

$$p(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{tx},u_{xx},\cdots)=0$$

的行波解，该方法主要步骤如下：

我们首先引入波动变量 $\xi=x-ct$ 使得 $u(x,t)=u(\xi)$，因此偏微分方程化为关于 $u=u(\xi)$ 的常微分方程

$$p(u,-cu',u',c^2u'',-cu'',u'',\cdots)=0 \tag{1}$$

2) 然后我们假设方程(1)的解可以表示为

$$u(\xi)=\sum_{k=0}^{N}a_k(\xi)y(\mu\xi)^k \tag{2}$$

$a_k(\xi)$ （$k=0,1,\cdots,N$）是关于 ξ 的函数，μ 是需要进一步确定的常数，$y(t)$ 是黎卡提方程的解。之后有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y^k(t)=k\left[A(t)y^{k+1}+B(t)y+C(t)y^{k-1}\right]\\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y^k(t)=k(k+1)A^2(t)y^{k+2}+k\left[(2k+1)A(t)B(t)+A'(t)\right]y^{k+1}\\ \qquad +k\left[2kA(t)C(t)+kB^2(t)+B'(t)\right]y^k\\ \qquad +k\left[(2k-1)B(t)C(t)+C'(t)\right]y^{k-1}+k(k-1)C^2(t)y^{k-2}\end{cases} \tag{3}$$

其他导数也是如此。因此，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}u(\xi)$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}u(\xi)$ 分别是 $N+1$ 和 $N+2$ 次黎卡提微分方程的多项式。

3) 将(2)代入到方程(1)中，通过(3)得到关于 $y(u\xi)$ 的代数方程。为了确定参数 N，一般我们会平衡得到的方程中最高阶的线性项与最高阶的非线性项，并收集所有相同 $y(u\xi)$ 的系数，把这些系数都消去，最后得到一个包括函数 $a_k(\xi)$ （$k=0,1,\cdots,N$），c 和 μ 的方程组。

4) 求解步骤 3 的代数方程组得到了函数 $a_k(\xi)$ （$k=0,1,\cdots,N$），c 和 μ 的所有可能值，确定了这些函数和参数，知道 N 是正整数，通过(2)得到封闭形式的解析解 $u(x,t)$。

注 1：如果我们用黎卡提方程 $y'(t)=y^2(t)+1$ 的解 $y(t)=\tanh(t)$，当 $a_k(\xi)$ （$k=0,1,\cdots,N$），则黎卡

提方程法可转化为 tanh 思想[1]。

注 2：若我们用黎卡提方程 $y'(t)=-\left(y^2(t)+\alpha y(t)+\beta\right)$ 的解 $y(t)=\dfrac{\omega'(t)}{\omega(t)}$，当 $\omega(t)$ 是二阶线性微分方程 $\omega''(t)+\alpha\omega'(t)+\beta\omega(t)=0$ 时，取 $\mu=1$，则黎卡提方程法转化为 $\left(\dfrac{G'}{G}\right)$-展开法[2] [3]。

2. 广义 Klein-Gordon 方程行波解

广义 Klein-Gordon 方程为

$$u_{tt}-a^2u_{xx}+bu+fu^2-ku^3=0 \tag{4}$$

a,b,f 和 k 都为常数，$u(x,t)$ 是未知函数。引入波动变量 $\xi=x-ct$，则方程(4)转化为

$$bu+fu^2-ku^3+\left(c^2-a^2\right)u_{\xi\xi}=0 \tag{5}$$

则平衡 $u_{\xi\xi}$ 和 u^3 后有 $N+2=3N$，解得 $N=1$。因此，(2)可表示为

$$u(\xi)=a_1(\xi)y(\mu\xi)+a_0(\xi) \tag{6}$$

将(6)代入到方程(5)中，并计算 $y(\mu\xi)$ 的系数，就可得出关于 $a_1(\xi)$，$a_0(\xi)$，c 和 μ 的方程组

$$\begin{cases} y^3: -ka_1^3(\xi)+2\mu^2\left(c^2-a^2\right)a_1(\xi)A^2(\mu\xi)=0 \\ y^2: fa_1^2(\xi)-3ka_0(\xi)a_1^2(\xi)+\left(c^2-a^2\right)\left[2\mu a_1'(\xi)A(\mu\xi)+\mu^2a_1(\xi)\left(A'(\mu\xi)+3A(\mu\xi)B(\mu\xi)\right)\right]=0 \\ y^1: ba_1(\xi)+2fa_0(\xi)a_1(\xi)-3ka_0^2(\xi)a_1(\xi)+\left(c^2-a^2\right)\left[a_1''(\xi)+2\mu a_1'(\xi)B(\mu\xi)\right. \\ \qquad \left.+\mu^2a_1(\xi)\left(B'(\mu\xi)+2A(\mu\xi)C(\mu\xi)+B^2(\mu\xi)\right)\right]=0 \\ y^0: ba_0(\xi)+fa_0^2(\xi)-3ka_0^3(\xi)+\left(c^2-a^2\right)\left[a_0''(\xi)+2\mu a_1'(\xi)C(\mu\xi)\right. \\ \qquad \left.+\mu^2a_1(\xi)\left(C'(\mu\xi)+B(\mu\xi)C(\mu\xi)\right)\right]=0 \end{cases} \tag{7}$$

上述代数系统依赖于黎卡提方程中系数 $A(t),B(t)$ 和 $C(t)$ 的选择，下面我们选取系数 $A(t),B(t)$ 和 $C(t)$ 的一些特殊情况，基于这些选择和上述方程组我们构造了推广的 Klein-Gordon 方程(4)的特殊精确解[4]。

1) 如果我们取 $A(t)=-1,B(t)=0,C(t)=1$，则可得到黎卡提方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=-y^2(t)+1$，解为 $y(t)=\tanh(t)$。这时解方程组(7)得

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{f}{3k} \\ a_1=\pm\sqrt{\dfrac{3kb+f^2}{3k^2}} \\ \mu^2=\dfrac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)},(c\neq a) \end{cases} \tag{8}$$

和

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2f}{3k} \\ a_1 = \pm\sqrt{\dfrac{b}{k}} \\ \mu^2 = \dfrac{b}{2\left(c^2 - a^2\right)}, (c \neq a) \end{cases} \tag{9}$$

其中 c 为任意常数。根据(9)可把解(6)写为

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{3kb + f^2}{3k^2}}\, y(\mu\xi) + \frac{f}{3k} \tag{10}$$

和

$$u(x,t) = \pm\sqrt{\frac{b}{k}}\, y(\mu\xi) + \frac{2f}{3k} \tag{11}$$

当 $\dfrac{3kb + f^2}{6k\left(c^2 - a^2\right)} > 0$ 时，有纽结解

$$u_1(x,t) = \pm\sqrt{\frac{3kb + f^2}{3k^2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{3kb + f^2}{6k\left(c^2 - a^2\right)}}(x - ct)\right) + \frac{f}{3k} \tag{12}$$

当 k, b, f, c 取 1，a 取 0 时，解(12)的图像为图 1。

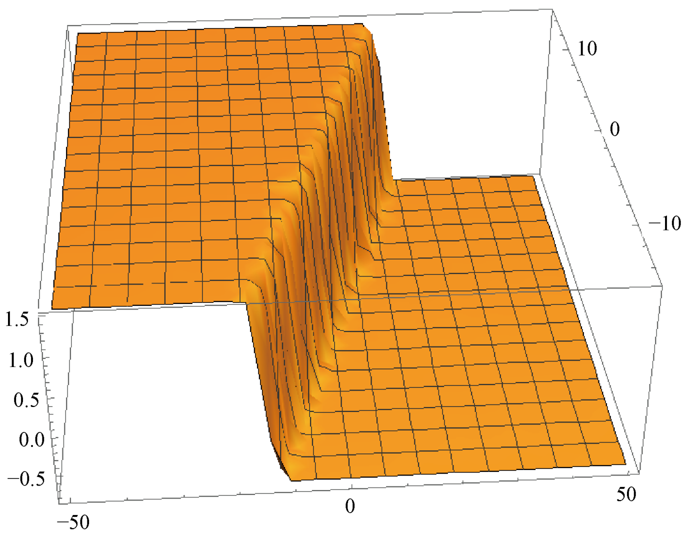

Figure 1. Image of solution (12)
图 1. 解(12)的图像

当 $\dfrac{3kb + f^2}{6k\left(c^2 - a^2\right)} < 0$ 时，有复周期解

$$u_2(x,t) = \pm i\sqrt{\frac{3kb + f^2}{3k^2}} \tan\left(\sqrt{\frac{3kb + f^2}{6k\left(a^2 - c^2\right)}}(x - ct)\right) + \frac{f}{3k} \tag{13}$$

当$\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}>0$时，有纽结解

$$u_3\left(x,t\right)=\pm\sqrt{\frac{b}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}}\left(x-ct\right)\right)+\frac{2f}{3k} \tag{14}$$

当k,b,f,c取1，a取0时，解(14)的图像为图2。

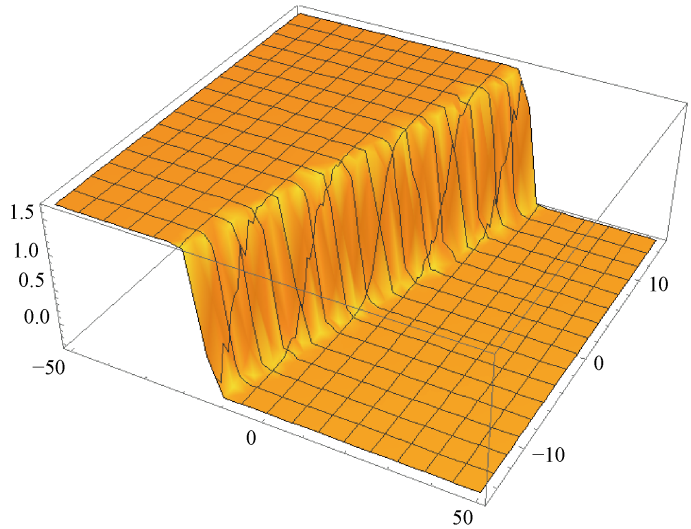

Figure 2. Image of solution (14)
图2. 解(14)的图像

当$\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}<0$时，有复周期解

$$u_4\left(x,t\right)=\pm i\sqrt{\frac{b}{k}}\tan\left(\sqrt{\frac{b}{2\left(a^2-c^2\right)}}\left(x-ct\right)\right)+\frac{2f}{3k} \tag{15}$$

如果我们用黎卡提方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y\left(t\right)=-y^2\left(t\right)+1$的解$y\left(t\right)=\coth\left(t\right)$，则

当$\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}>0$时，有纽结解

$$u_5\left(x,t\right)=\pm\sqrt{\frac{3kb+f^2}{3k^2}}\coth\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\left(x-ct\right)\right)+\frac{f}{3k} \tag{16}$$

当k,b,f,c取1，a取0时，解(16)的图像为图3。

当$\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}<0$时，有复周期解

$$u_6\left(x,t\right)=\pm i\sqrt{\frac{3kb+f^2}{3k^2}}\cot\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(a^2-c^2\right)}}\left(x-ct\right)\right)+\frac{f}{3k} \tag{17}$$

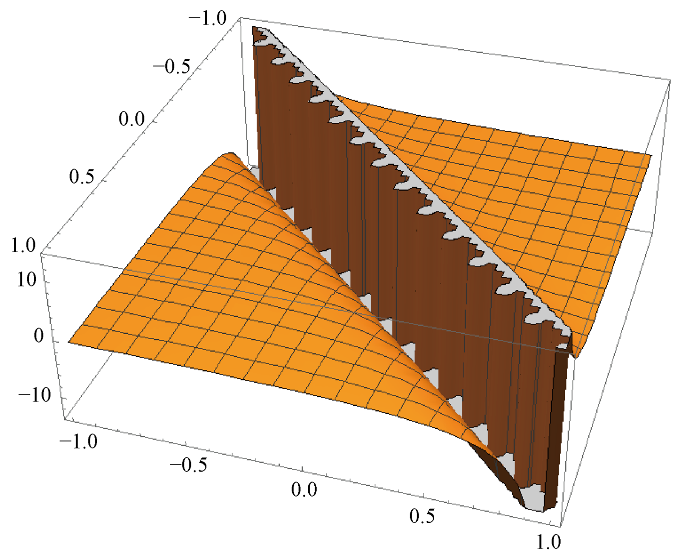

Figure 3. Image of solution (16)
图 3. 解(16)的图像

当 $\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}>0$ 时，有组结解

$$u_7\left(x,t\right)=\pm\sqrt{\frac{b}{k}}\coth\left(\sqrt{\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}}\left(x-ct\right)\right)+\frac{2f}{3k} \tag{18}$$

当 $\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}<0$ 时，有复周期解

$$u_4\left(x,t\right)=\pm i\sqrt{\frac{b}{k}}\cot\left(\sqrt{\frac{b}{2\left(a^2-c^2\right)}}\left(x-ct\right)\right)+\frac{2f}{3k} \tag{19}$$

当±都取+时，行波解与文[5]中采用 tanh 法得到的行波解相同。

2) 如果我们取 $A(t)=-1, B(t)=-\alpha, C(t)=-\beta$，则可得到黎卡提方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=-\left(y^2(t)+\alpha y(t)+\beta\right)$，解为 $y(t)=\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}$，而 $\omega(t)$ 是二阶线性微分方程 $\omega''(t)+\alpha\omega'(t)+\beta\omega(t)=0$ 的解(13)。这时解方程组(7)得

$$\begin{cases} a_0=\frac{f}{3k}+\frac{\alpha}{2}a_1 \\ a_1=\pm\sqrt{\frac{4\left(3kb+f^2\right)}{3k^2\left(\alpha^2-4\beta\right)}} \\ \mu^2=\frac{2\left(3kb+f^2\right)}{3k\left(c^2-a^2\right)\left(\alpha^2-4\beta\right)} \end{cases} \tag{20}$$

其中 c,α 和 β （$c\neq a,\alpha^2\neq 4\beta,k\neq 0$）为任意常数。这将得到孤波解

如果 $\alpha^2-4\beta>0$，则我们可得

$$\omega(t)=\exp\left(\frac{-\alpha}{2}t\right)\left(C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}t\right)+C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}t\right)\right)$$

当 $\xi=x-ct$ 时有

$$u_1(x,t)=\pm\sqrt{\frac{3kb+f^2}{3k^2}}\left[\frac{C_1\sinh\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)+C_2\cosh\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)}{C_1\cosh\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)+C_2\sinh\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)}\right]+\frac{f}{3k} \tag{21}$$

当 C_1 取 1，C_2 取 2，k,b,f,c 取 1，a 取 0 时，解(21)的图像为图 4。

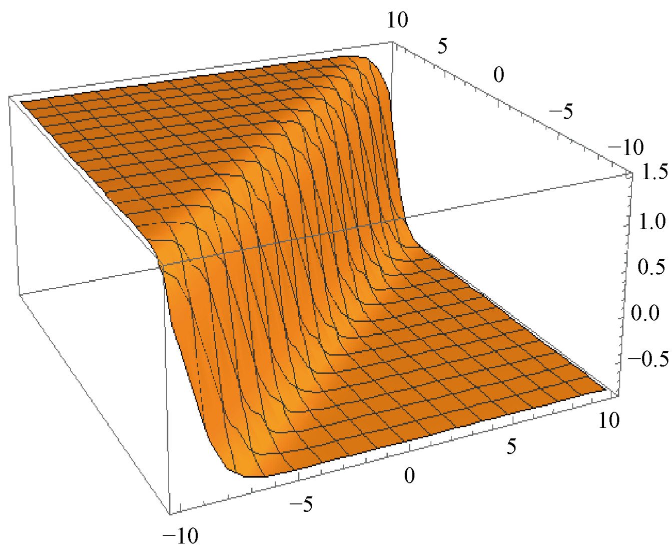

Figure 4. Image of solution (21)
图 4. 解(21)的图像

或

$$u_2(x,t)=\pm\sqrt{\frac{3kb+f^2}{3k^2}}\left[\frac{-C_1\sinh\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)+C_2\cosh\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)}{C_1\cosh\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)-C_2\sinh\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)}\right]+\frac{f}{3k} \tag{22}$$

当 C_1 取 1，C_2 取 2，k,b,f,c 取 1，a 取 0 时，解(22)的图像为图 5。

如果 $\alpha^2-4\beta<0$，则我们可得

$$\omega(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}t\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}t\right)\right)$$

当 $\xi=x-ct$ 时有

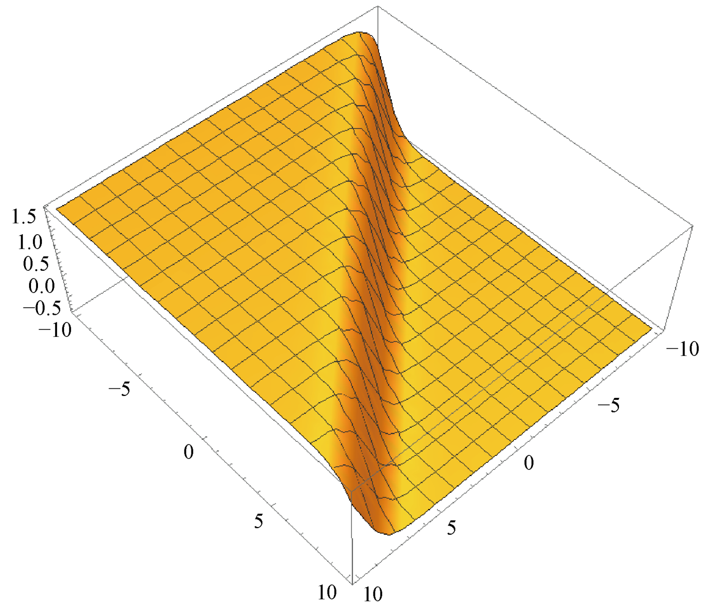

Figure 5. Image of solution (22)
图 5. 解(22)的图像

$$u_3(x,t)=\pm\sqrt{\frac{-3kb-f^2}{3k^2}}\left[\frac{-C_1\sin\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(a^2-c^2\right)}}\xi\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(a^2-c^2\right)}}\xi\right)}{C_1\cos\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(a^2-c^2\right)}}\xi\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(a^2-c^2\right)}}\xi\right)}\right]+\frac{f}{3k} \tag{23}$$

或

$$u_4(x,t)=\pm\sqrt{\frac{-3kb-f^2}{3k^2}}\left[\frac{C_1\sin\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)}{C_1\cos\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)-C_2\sin\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}\xi\right)}\right]+\frac{f}{3k} \tag{24}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数。如果取 $C_1=1, C_2=0$，则解(3-22) (3-23)可写为纽结解

$$u_5(x,t)=\pm\sqrt{\frac{3kb+f^2}{3k^2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}(x-ct)\right)+\frac{f}{3k} \tag{25}$$

且解(23) (24)可写为周期解

$$u_6(x,t)=\pm\sqrt{\frac{-3kb-f^2}{3k^2}}\tan\left(\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(a^2-c^2\right)}}(x-ct)\right)+\frac{f}{3k} \tag{26}$$

3) 如果我们取 $A(t)=\alpha, B(t)=0, C(t)=\beta$，则可得到黎卡提方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=\alpha y^2(t)+\beta$，

解为 $y(t)=\frac{-1}{\alpha}\frac{Q'(t)}{Q(t)}$，而 $Q(t)=\sqrt{t}\left[C_1J_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\alpha\beta t}\right)+C_2Y_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\alpha\beta t}\right)\right]$，$J_{\frac{1}{2}},Y_{\frac{1}{2}}$ 是取 $\frac{1}{2}$ 时的贝塞尔函数[6]，其中 C_1,C_2 是任意常数。这时解方程组(7)得

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{f}{3k} \\ a_1=\pm\sqrt{\dfrac{-\alpha\left(3kb+f^2\right)}{3k^2\beta}} \\ \mu^2=\dfrac{3kb-f^2}{6k\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)} \end{cases} \tag{27}$$

和

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{2f}{3k} \\ a_1=\pm\sqrt{\dfrac{-\alpha b}{k\beta}} \\ \mu^2=\dfrac{b}{2\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)} \end{cases} \tag{28}$$

其中 c,α 和 β （$c\neq a$）为任意常数。当解为(27)时，得到行波解

$$u_1(x,t)=\pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{-\alpha\left(3kb+f^2\right)}{3k^2\beta}}\frac{Q'\left(\sqrt{\dfrac{3kb-f^2}{6k\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)}}(x-ct)\right)}{Q\left(\sqrt{\dfrac{3kb-f^2}{6k\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)}}(x-ct)\right)}+\frac{f}{3k} \tag{29}$$

或

$$u_2(x,t)=\pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{-\alpha\left(3kb+f^2\right)}{3k^2\beta}}\frac{Q'\left(-\sqrt{\dfrac{3kb-f^2}{6k\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)}}(x-ct)\right)}{Q\left(-\sqrt{\dfrac{3kb-f^2}{6k\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)}}(x-ct)\right)}+\frac{f}{3k} \tag{30}$$

当解为(28)时，得到行波解

$$u_3(x,t)=\pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{-\alpha b}{k\beta}}\frac{Q'\left(\sqrt{\dfrac{b}{2\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)}}(x-ct)\right)}{Q\left(\sqrt{\dfrac{b}{2\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)}}(x-ct)\right)}+\frac{2f}{3k} \tag{31}$$

或

$$u_4(x,t)=\pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{-\alpha b}{k\beta}}\frac{Q'\left(-\sqrt{\dfrac{b}{2\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)}}(x-ct)\right)}{Q\left(-\sqrt{\dfrac{b}{2\alpha\beta\left(a^2-c^2\right)}}(x-ct)\right)}+\frac{2f}{3k} \tag{32}$$

如果我们取 $A(t)=1, B(t)=0, C(t)=-\alpha^2$，则可得到黎卡提方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=y^2(t)-\alpha^2$，解为 $y(t)=\alpha+\frac{2\alpha C_1\mathrm{e}^{2\alpha t}}{C_2-C_1\mathrm{e}^{2\alpha t}}$，其中 C_1, C_2 是任意常数[7]。这时解方程组(7)得

$$\begin{cases} a_0=\frac{f}{3k} \\ a_1=\pm\sqrt{\frac{3kb+f^2}{3k^2\alpha^2}} \\ \mu^2=\frac{3kb+f^2}{6k\alpha^2\left(c^2-a^2\right)} \end{cases} \tag{33}$$

和

$$\begin{cases} a_0=\frac{2f}{3k} \\ a_1=\pm\sqrt{\frac{b}{k\alpha^2}} \\ \mu^2=\frac{b}{2\alpha^2\left(c^2-a^2\right)} \end{cases} \tag{34}$$

其中 c 和 α （$c\neq a$）为任意常数。当解为(33)时，得到行波解

$$u_1(x,t)=\pm\sqrt{\frac{3kb+f^2}{3k^2\alpha^2}}\left(\alpha+\frac{2\alpha C_1\mathrm{e}^{2\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}(x-ct)}}{C_2-C_1\mathrm{e}^{2\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}(x-ct)}}\right)+\frac{f}{3k} \tag{35}$$

当 C_1,α 取 1，C_2 取 2，k,b,f,c 取 1，a 取 0 时，解(35)的图像为图 6。

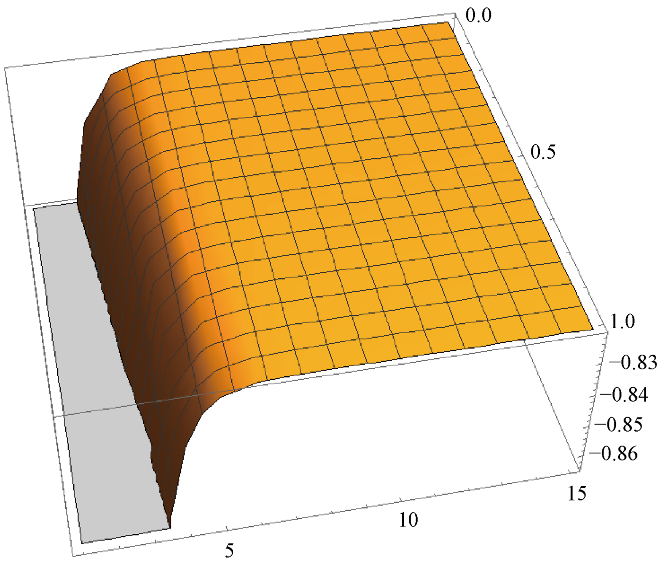

Figure 6. Image of solution (35)
图 6. 解(35)的图像

或

$$u_2(x,t)=\pm\sqrt{\frac{3kb+f^2}{3k^2\alpha^2}}\left(\alpha+\frac{2\alpha C_1 \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}(x-ct)}}{C_2-C_1 \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{3kb+f^2}{6k\left(c^2-a^2\right)}}(x-ct)}}\right)+\frac{f}{3k} \tag{36}$$

当解为(34)时，得到行波解

$$u_3(x,t)=\pm\sqrt{\frac{b}{k\alpha^2}}\left(\alpha+\frac{2\alpha C_1 \mathrm{e}^{2\sqrt{\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}}(x-ct)}}{C_2-C_1 \mathrm{e}^{2\sqrt{\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}}(x-ct)}}\right)+\frac{2f}{3k} \tag{37}$$

或

$$u_4(x,t)=\pm\sqrt{\frac{b}{k\alpha^2}}\left(\alpha+\frac{2\alpha C_1 \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}}(x-ct)}}{C_2-C_1 \mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{b}{2\left(c^2-a^2\right)}}(x-ct)}}\right)+\frac{2f}{3k} \tag{38}$$

本文主要利用黎卡提方程作为辅助方程，研究了一类波动方程的行波解问题，得到了一些新的行波解的形式。相比原有的方法，该方法更加容易理解与计算。

参考文献

[1] Wazwaz, A.-M. (2005) The Tanh Method for a Reliable Treatment of the K(n, n) and the KP(n, n) Equations and Its Variants. *Applied Mathematics and Computation*, **170**, 361-379. https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.12.008

[2] Zhang, S., Tong, J. and Wang, W. (2008) Generalized G'/G-Expansion Method for the mKDV Equation with Variable Coefficients. *Physics Letters A*, **372**, 2254-2257. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.11.026

[3] Wang, M.L., Li X.Z. and Zhang, J.L. (2008) The G'/G-Expansion Method and Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **372**, 417-423. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.07.051

[4] 陈向华, 白晓东. 常微分方程[M]. 内蒙古: 内蒙古大学出版社, 2002.

[5] 张玮玮. 一类特殊类型的 Riccati 方程的求解[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 2015, 21(2): 110-111.

[6] 李晓琴. 二阶非线性微分方程 Riccati 方程的解法及应用[J]. 聊城大学学报, 2012, 25(2): 19-21.

[7] 李迎娣. 二阶变系数线性齐次微分方程的一些解法[J]. 西北民族大学学报(自然科学版), 2015, 936(3): 1-2.