Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(11), 1722-1731
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.811202

Hans汉斯

Hermite-Hadamard Type Integral Inequality for Coordinated $(r,(h,m))$-Convex Function

Shuang Gao, Donghai Ji

School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang
Email: 1124641676@qq.com

Received: Oct. 17th, 2019; accepted: Nov. 4th, 2019; published: Nov. 11th, 2019

Abstract

Hermite-Hadamard inequality is one of the most important inequalities in convex functions. Its integral error estimates have important applications in optimization and computation. Since the concept of co-convexity of multivariate functions was introduced, the convexity theory has been further developed. In this paper, a new binary function is defined, coordinated $(r,(h,m))$-convex functions of bivariate functions, one of whose components is *r*-convex and the other is extended (h,m)-convex; Hermite-Hadamard type integral inequalities are studied.

Keywords

***r*-convex, co-ordinated (*r*,(*h*,*m*))-Conve, Hermite-Hadamard Type Inequalities**

协同$(r,(h,m))$-凸函数的Hermite-Hadamard型积分不等式

高　爽，计东海

哈尔滨理工大学理学院，黑龙江 哈尔滨
Email: 1124641676@qq.com

收稿日期：2019年10月17日；录用日期：2019年11月4日；发布日期：2019年11月11日

摘　要

Hermite-Hadamard不等式是凸函数中重要不等式之一，其积分误差估计在优化问题、计算问题等中有

文章引用：高爽，计东海．协同(h,m)-凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式[J]．应用数学进展，2019，8(11): 1722-1731. DOI: 10.12677/aam.2019.811202

着很重要的应用，多元函数的协同凸性的概念引进以来，使得凸性理论进一步发展，本文将定义一个新的二元函数，且其一个分量满足**r**-凸性，另一个分量为广义(h,m)-凸性的协同$(r,(h,m))$-凸函数，并研究其**Hermite-Hadamard**型积分不等式。

关键词

r-凸性，协同$(r,(h,m))$-凸函数，Hermite-Hadamard不等式

1. 引言

1985 年，Toader 在文[1]引进了 m-凸函数的概念，2007 年 Varosanec 引入了 h-凸函数的概念，引用文献[2]。2011 年 Özdemir 等进一步推广了 h-凸函数与 m-凸函数的概念，提出了(h,m)-凸函数的概念，见文献[3]，若无特殊说明，本文均有 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$。

定义 1：设 $m\in(0,1]$，函数 $h:[0,1]\to(0,\infty)$，区间 $I\in\mathbb{R}$，若函数 $f:I\to R$ 满足条件，若对任意的 $x,y\in I$ 和任意的 $\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda x+m(1-\lambda)y)\le h(\lambda)f(x)+mh(1-\lambda)f(y),$$

则称 f 为 I 上的(h,m)-凸函数。

M. P. Gill 等人在文[4]中引进了“r-凸函数”的等价形式

定义 2：设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 为区间，实数 $r\in\mathbb{R}$，函数 $f:I\to\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$，若对任意的点 $x,y\in I$ 和任意的 $\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\begin{cases}\left(\lambda[f(x)]^r+(1-\lambda)[f(y)]^r\right)^{1/r}, & r\ne 0,\\ [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda}, & r=0,\end{cases}$$

则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的 r-凸函数。

吴善和在文[5]中定义了 r-平均凸函数的概念：

定义 3：设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 为区间，实数 $r\in\mathbb{R}$，函数 $f:I\subseteq\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，若对任意的点 $x,y\in I$ 及任意的 $\lambda\in[0,1]$，有

$$f\left(\left[\lambda x^r+(1-\lambda)y^r\right]^{1/r}\right)\le\left(\lambda[f(x)]^r+(1-\lambda)[f(y)]^r\right)^{1/r},\quad r\ne 0$$

$$f\left(x^{\lambda}y^{1-\lambda}\right)\le[f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda},\quad r=0$$

则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的 r-平均凸函数。

2001 年，Dragomir.S.S 在文[6]中引入多元函数的协同凸性的概念。

定义 4：设函数 $f:\Delta=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，其中 $a<b,c<d$，若对任意的点(x,y)，$(z,w)\in\Delta$ 和任意的 $t,\lambda\in[0,1]$，有

$$
\begin{aligned}
& f\left(tx+(1-t)z,\lambda y+(1-\lambda)w\right) \\
& \le t\lambda f(x,y)+t(1-\lambda)f(x,w)+(1-t)\lambda f(z,y)+(1-t)(1-\lambda)f(z,w)
\end{aligned}
$$

则称二元函数 $f(x,y)$ 为矩形区域 Δ 上的协同凸函数。

文[7]中定义了协同 r-凸函数的概念。

下面介绍引进 Stolarsky 平均数：

设 $(u,v;r,s)\in R_+^2\times R^2$，Stolarsky 平均数 $E(u,v;r,s)$ 定义为：

$$
\begin{aligned}
& E(u,v;r,s)=\left(\frac{r\left(v^s-u^s\right)}{s\left(v^r-u^r\right)}\right)^{1/(s-r)}, && rs(r-s)(u-v)\ne 0, \\
& E(u,v;0,s)=\left(\frac{v^s-u^s}{s(\ln v-\ln u)}\right)^{1/s}, && s(u-v)\ne 0, \\
& E(u,v;r,r)=\frac{1}{\mathrm{e}^{1/r}}\left(\frac{u^{u^r}}{v^{v^r}}\right)^{1/\left(u^r-v^r\right)}, && r(u-v)\ne 0, \\
& E(u,v;0,0)=\sqrt{uv}, && u\ne v, \\
& E(u,v;0,0)=u, && u=v.
\end{aligned}
$$

其中 $L(u,v)\triangleq E(u,v;0,1)$，$L_r(u,v)\triangleq E(u,v;r,r+1)$ 分别称为对数平均数和广义对数平均数。

文[8]中建立了协同对数凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式。

定理 1 [4] 设函数 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 为对数凸函数，且 $a<b$，则

$$
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le L\left(f(a),f(b)\right),
$$

其中 $L(u,v)$ 为对数平均数。

定理 2 [4] 设一元函数 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 为 r-凸函数，且 $a<b$，$r\in\mathbb{R}$，若 $f\in L_1([a,b])$，则

$$
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le L_r\left(f(a),f(b)\right),
$$

其中 $L_r(x,y)$ 为广义对数平均数。

定理 3 设函数 $f:\Delta=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ 为矩形区域 Δ 上的协同对数凸函数，其中 $a<b,c<d$，则

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_c^d\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
& \le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b L\left(f(x,c),f(x,d)\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{d-c}\int_c^d L\left(f(a,y),f(b,y)\right)\mathrm{d}y\right] \\
& \le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x,c)+f(x,d)\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{d-c}\int_c^d\left[f(a,y)+f(b,y)\right]\mathrm{d}y\right] \\
& \le\Psi_f(\Delta)\le\frac{1}{4}\left[f(a,c)+f(b,c)+f(a,d)+f(b,d)\right],
\end{aligned}
$$

其中 $L(u,v)$ 为对数平均，且

$$
\Psi_f(\Delta)=\frac{1}{4}\Big[L\left(f(a,c),f(b,c)\right)+L\left(f(a,d),f(b,d)\right)+L\left(f(a,c),f(a,d)\right)+L\left(f(b,c),f(b,d)\right)\Big].
$$

2. 主要结果

2.1. 协同$(r,(h,m))$-凸函数概念及引理

本节将定义二元函数的一个分量满足 r-凸性，另一个分量为具有广义(h,m)-凸性的协同$(r,(h,m))$-凸函数概念和协同$((h,m),r)$-凸函数概念。

定义 1.1 设常数$0<m\le 1$，函数$h:[0,1]\to[0,\infty)$，实数$r\in\mathbb{R}$，函数$f:\Delta=[a,b]\times[0,d]\subseteq\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_0\to\mathbb{R}_+$，其中$a<b,0<d$。称二元函数$f(x,y)$为区域$\Delta$上的协同$(r,(h,m))$-凸函数，若对任意点$(x,y),(z,w)\in\Delta$和任意的$(t,\lambda)\in[0,1]^2$，有

若$r\ne 0$，有

$$
\begin{aligned}
&f\left(\left[tx^r+(1-t)z^r\right]^{1/r},\lambda y+m(1-\lambda)w\right)\\
&\le h(\lambda)\left\{t\left[f(x,y)\right]^r+(1-t)\left[f(z,y)\right]^r\right\}^{1/r}+mh(1-\lambda)\left\{t\left[f(x,w)\right]^r+(1-t)\left[f(z,w)\right]^r\right\}^{1/r},
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

若$r=0$，有

$$
f\left(x^tz^{1-t},\lambda y+m(1-\lambda)w\right)\le h(\lambda)\left[f(x,y)\right]^t\left[f(z,y)\right]^{1-t}+h(1-\lambda)\left[f(x,w)\right]^t\left[f(z,w)\right]^{1-t}.
$$

定义 1.2 设常数$0<m\le 1$，函数$h:[0,1]\to(0,\infty)$，$r\in\mathbb{R}$，函数$f:\Delta=[0,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}_+$，其中$0<b,0<c<d$。称二元函数$f(x,y)$为区域$\Delta$上的协同$((h,m),r)$-凸函数，若对任意点$(x,y),(z,w)\in\Delta$和任意的$(t,\lambda)\in(0,1)\times[0,1]$，有

若$r\ne 0$，有

$$
\begin{aligned}
&f\left(tx+m(1-t)z,\left[\lambda y^r+(1-\lambda)w^r\right]^{1/r}\right)\\
&\le h(t)\left\{\lambda\left[f(x,y)\right]^r+(1-\lambda)\left[f(x,w)\right]^r\right\}^{1/r}+mh(1-t)\left\{\lambda\left[f(z,y)\right]^r+(1-\lambda)\left[f(z,w)\right]^r\right\}^{1/r}
\end{aligned}
$$

若$r=0$，有

$$
f\left(tx+m(1-t)z,y^\lambda w^{1-\lambda}\right)\le h(t)\left[f(x,y)\right]^\lambda\left[f(x,w)\right]^{1-\lambda}+mh(1-t)\left[f(z,y)\right]^\lambda\left[f(z,w)\right]^{1-\lambda}.
$$

2.2. 协同$(r,(h,m))$-凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式

本节将研究协同$(r,(h,m))$凸函数的积分估计问题，建立协同$(r,(h,m))$-凸函数的几个 Hermite-Hadamard 型积分不等式。

定理 2.1 设$r\in\mathbb{R},r\ne 0$，$0<m\le 1$，函数$h:[0,1]\to(0,\infty)$，且函数$f:\Delta=[a,b]\times\left[0,\frac{d}{m}\right]\to\mathbb{R}_+$为$(r,(h,m))$-凸函数，$0<a<b,0<c<d$，若$f\in L_1(\Delta)$，则

$$
\begin{aligned}
&\frac{r}{(b^r-a^r)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{f(x,y)}{x^{1-r}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\le\left[L_r\left(f(a,c),f(b,c)\right)+mL_r\left(f\left(a,\frac{d}{m}\right),f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right)\right]\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}
$$

其中$L_r(u,v)$为广义对数平均数。

证 作变换$x=\sqrt[r]{ta^r+(1-t)b^r}$，$y=\lambda c+(1-\lambda)d$，$(t,\lambda)\in[0,1]^2$，由$f(x,y)$的协同$(r,(h,m))$-凸性，有

$$\frac{r}{\left(b^r-a^r\right)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{f(x,y)}{x^{1-r}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda=\int_0^1\int_0^1 f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\lambda c+m(1-\lambda)\frac{d}{m}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left[h(\lambda)\left\{t\left[f(a,c)\right]^r+(1-t)\left[f(b,c)\right]^r\right\}^{1/r}+mh(1-\lambda)\left\{t\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^r+(1-t)\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^r\right\}^{1/r}\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda$$

$$=\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_0^1\left\{t\left[f(a,c)\right]^r+(1-t)\left[f(b,c)\right]^r\right\}^{1/r}\mathrm{d}t+m\int_0^1 h(1-\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_0^1\left\{t\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^r+(1-t)\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^r\right\}^{1/r}\mathrm{d}t$$

$$=\left\{\int_0^1\left(t\left[f(a,c)\right]^r+(1-t)\left[f(b,c)\right]^r\right)^{1/r}\mathrm{d}t+m\int_0^1\left(t\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^r+(1-t)\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^r\right)^{1/r}\mathrm{d}t\right\}\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

经计算可得

$$\int_0^1\left(t\left[f(a,c)\right]^r+(1-t)\left[f(b,c)\right]^r\right)^{1/r}\mathrm{d}t=L_r\left(f(a,c),f(b,c)\right),$$

$$\int_0^1\left(t\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^r+(1-t)\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^r\right)^{1/r}\mathrm{d}t=L_r\left(f\left(a,\frac{d}{m}\right),f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right).$$

由上述三个公式，我们有

$$\frac{r}{\left(b^r-a^r\right)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{f(x,y)}{x^{1-r}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le\left\{\int_0^1\left(t\left[f(a,c)\right]^r+(1-t)\left[f(b,c)\right]^r\right)^{1/r}\mathrm{d}t+m\int_0^1\left(t\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^r+(1-t)\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^r\right)^{1/r}\mathrm{d}t\right\}\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$=\left[L_r\left(f(a,c),f(b,c)\right)+mL_r\left(f\left(a,\frac{d}{m}\right),f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right)\right]\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

推论 2.1.1 在定理 2.1 的条件下，若 $m=1$，有

$$\frac{r}{\left(b^r-a^r\right)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{f(x,y)}{x^{1-r}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le\left[L_r\left(f(a,c),f(b,c)\right)+L_r\left(f(a,d),f(b,d)\right)\right]\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda,$$

其中 $L_r(u,v)$ 为广义对数平均数。

定理 2.2 设常数 $0<m\le 1$，函数 $h:[0,1]\to[0,\infty)$，函数 $f:\Delta=[a,b]\times\left[0,\frac{d}{m}\right]\to\mathbb{R}_+$ 为协同 $(0,(h,m))$-凸函数，若 $f\in L_1(\Delta)$，则

$$\frac{1}{(\ln b-\ln a)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{f(x,y)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\left[L\left(f(a,c),f(b,c)\right)+mL\left(f\left(a,\frac{d}{m}\right),f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right)\right],$$

其中 $L(u,v)$ 为对数平均数。

证 作变换 $x=a^tb^{1-t}$，$y=\lambda c+(1-\lambda)d$，$(t,\lambda)\in[0,1]^2$，再由 $f(x,y)$ 的协同 $(0,(h,m))$-凸性，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\ln b-\ln a)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{f(x,y)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\int_0^1 f\left(a^t b^{1-t},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda\\
&\le\int_0^1\int_0^1\left\{h(\lambda)\left[f(a,c)\right]^t\left[f(b,c)\right]^{1-t}+mh(1-\lambda)\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^t\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^{1-t}\right\}\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda\\
&=\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_0^1\left[f(a,c)\right]^t\left[f(b,c)\right]^{1-t}\mathrm{d}t+\int_0^1 h(1-\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_0^1 m\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^t\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^{1-t}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_0^1\left\{\left[f(a,c)\right]^t\left[f(b,c)\right]^{1-t}+m\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^t\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^{1-t}\right\}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

因

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\left[f(a,c)\right]^t\left[f(b,c)\right]^{1-t}\mathrm{d}t=L\left(f(a,c),f(b,c)\right),\\
&\int_0^1\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^t\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^{1-t}\mathrm{d}t=L\left(f\left(a,\frac{d}{m}\right),f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right).
\end{aligned}
$$

于是，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\ln b-\ln a)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{f(x,y)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\le\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_0^1\left\{\left[f(a,c)\right]^t\left[f(b,c)\right]^{1-t}+m\left[f\left(a,\frac{d}{m}\right)\right]^t\left[f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right]^{1-t}\right\}\mathrm{d}t\\
&=\left[L\left(f(a,c),f(b,c)\right)+mL\left(f\left(a,\frac{d}{m}\right),f\left(b,\frac{d}{m}\right)\right)\right]\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}
$$

故定理证毕。

推论 2.2.1 在定理 2.2 的条件下，若 $m=1$，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\ln b-\ln a)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{f(x,y)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\le\left[L\left(f(a,c),f(b,c)\right)+L\left(f(a,d),f(b,d)\right)\right]\int_0^1 h(\lambda)\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}
$$

其中 $L(u,v)$ 为对数平均数。

定理 2.3 设 $r\in\mathbb{R},r\ne 0$，常数 $m\in(0,1]$，函数 $h:[0,1]\to[0,\infty)$，函数 $f:\Delta=[a,b]\times\left[0,\frac{d}{m}\right]\to\mathbb{R}_+$ 为 $(r,(h,m))$-凸函数，$0<a<b,0<c<d$，且 $f\in L_1(\Delta)$。

(i) 若 $r\ge 1$，则

$$
f\left(\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{1/r},\frac{c+d}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{r}{(b^r-a^r)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\left(\frac{f(x,y)}{x^{1-r}}+\frac{mf\left(x,\frac{y}{m}\right)}{x^{1-r}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
$$

(ii) 若 $r<1$，则

$$f\left(\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{1/r},\frac{c+d}{2}\right)$$

$$\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{r}{\left(b^r-a^r\right)\left(d-c\right)}\int_c^d\int_a^b\left(\frac{\left[f\left(x,y\right)\right]^r}{x^{1-r}}+\frac{m\left[f\left(x,\frac{y}{m}\right)\right]^r}{x^{1-r}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/r},$$

证 对任意的$(t,\lambda)\in[0,1]^2$，由函数$f(x,y)$的区域Δ上协同$(r,(h,m))$-凸性，有

$$f\left(\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{1/r},\frac{c+d}{2}\right)$$

$$=f\left(\left(\frac{ta^r+(1-t)b^r+(1-t)a^r+tb^r}{2}\right)^{1/r},\frac{\lambda c+(1-\lambda)d+((1-\lambda)c+\lambda d)}{2}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{2}\left[\left(ta^r+(1-t)b^r\right)^{1/r}\right]^r+\frac{1}{2}\left[\left((1-t)a^r+tb^r\right)^{1/r}\right]^r,\frac{1}{2}\left(\lambda c+(1-\lambda)d\right)+\frac{1}{2}m\left(\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right)$$

$$\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\left[f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]^r+\frac{1}{2}\left[f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]^r\right)^{1/r}\right.$$

$$\left.+m\left(\frac{1}{2}\left[f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]^r+\frac{1}{2}\left[f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]^r\right)^{1/r}\right\}.$$

当$r\ge1$，时，对两边求(t,λ)的积分，并作积分变换

$$x=\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\ y=\lambda c+(1-\lambda)d,(t,\lambda)\in[0,1]\times(0,1),$$

可得

$$f\left(\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{1/r},\frac{c+d}{2}\right)$$

$$\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\int_0^1\int_0^1\left[\frac{1}{2}f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)+\frac{1}{2}f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{m}{2}f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)+\frac{m}{2}f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda\right\}$$

$$=h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{r}{\left(b^r-a^r\right)\left(d-c\right)}\int_c^d\int_a^b\left(\frac{f\left(x,y\right)}{x^{1-r}}+\frac{mf\left(x,\frac{d}{m}\right)}{x^{1-r}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当$r<1$时，有

$$h\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left[f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]^r+\frac{1}{2}\left[f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]^r\right)^{1/r}$$

$$+h\left(\frac{1}{2}\right)m\left(\frac{1}{2}\left[f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]^r+\frac{1}{2}\left[f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]^r\right)^{1/r}$$

$$\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{2}\left[f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]^r+\frac{1}{2}\left[f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]^r\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2}\left[f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]^r+\frac{m}{2}\left[f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]^r\right\}^{1/r}.$$

对上述不等式两边求 (t,λ) 的积分，并作变换

$$x=\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\ y=\lambda c+(1-\lambda)d,\ (t,\lambda)\in[0,1]\times(0,1)$$

可得

$$\left[f\left(\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{1/r},\frac{c+d}{2}\right)\right]^r$$

$$\le h\left(\frac{1}{2}\right)^r\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{1}{2}\left[f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]^r+\frac{1}{2}\left[f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]^r\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2}\left[f\left(\left[ta^r+(1-t)b^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]^r+\frac{m}{2}\left[f\left(\left[(1-t)a^r+tb^r\right]^{1/r},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]^r\right\}\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda$$

$$=h\left(\frac{1}{2}\right)^r\frac{r}{(b^r-a^r)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\left(\frac{\left[f(x,y)\right]^r}{x^{1-r}}+\frac{m\left[f\left(x,\frac{y}{m}\right)\right]^r}{x^{1-r}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故定理 2.3 证毕。

同理，可证得

定理 2.4 设函数 $f:\Delta=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 为协同 $(r,(h,1))$-凸函数，$r\in\mathbb{R},r\neq0$，函数 $h:[0,1]\to(0,\infty)$，且 $f\in L_1(\Delta)$

(i) 若 $r\ge1$，则

$$f\left(\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{1/r},\frac{c+d}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2r}{(b^r-a^r)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{f(x,y)}{x^{1-r}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

(ii) 若 $r<1$，则

$$f\left(\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{1/r},\frac{c+d}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2r}{(b^r-a^r)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\frac{\left[f(x,y)\right]^r}{x^{1-r}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/r}$$

定理 2.5 设常数 $m\in(0,1]$，函数 $h:[0,1]\to(0,\infty)$，正值函数 $f:\Delta=[a,b]\times\left[0,\frac{d}{m}\right]\to\mathbb{R}_+$ 为 $(0,(h,m))$-

凸函数，$0<a<b,0<c<d$，若 $f\in L_1(\Delta)$，则

$$f\left((ab)^{1/2},\frac{c+d}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(\ln b-\ln a)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\left(\frac{f(x,y)}{x}+\frac{mf\left(x,\frac{y}{m}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 对任意的 $(t,\lambda)\in[0,1]\times(0,1)$，利用基本不等式以及 $f(x,y)$ 的 $(0,(h,m))$-凸性，有

$$\begin{aligned}
&f\left((ab)^{1/2},\frac{c+d}{2}\right)=f\left(\left(a^tb^{1-t}a^{1-t}b^t\right)^{1/2},\frac{\lambda c+(1-\lambda)d+(1-\lambda)c+\lambda d}{2}\right)\\
&=f\left(\left(a^tb^{1-t}\right)^{1/2}\left(a^{1-t}b^t\right)^{1-1/2},\frac{1}{2}\left[\lambda c+(1-\lambda)d\right]+\frac{m}{2}\cdot\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\\
&\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(a^tb^{1-t},\lambda c+(1-\lambda)d\right)f\left(a^{1-t}b^t,\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]^{1/2}\\
&\quad+mh\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(a^tb^{1-t},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)f\left(a^{1-t}b^t,\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]^{1/2}\\
&\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left[f\left(a^tb^{1-t},\lambda c+(1-\lambda)d\right)+f\left(a^{1-t}b^t,\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right]\right.\\
&\quad\left.+\frac{m}{2}\left[f\left(a^tb^{1-t},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)+f\left(a^{1-t}b^t,\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]\right)\\
&=\frac{1}{2}h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(a^tb^{1-t},\lambda c+(1-\lambda)d\right)+f\left(a^{1-t}b^t,\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right.\\
&\quad\left.+mf\left(a^tb^{1-t},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)+mf\left(a^{1-t}b^t,\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right],
\end{aligned}$$

对上述不等式两边求 (t,λ) 积分，并作积分变换 $x=a^tb^{1-t},y=\lambda c+(1-\lambda)d$，有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 f\left((ab)^{1/2},\frac{c+d}{2}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda\\
&\le\frac{1}{2}h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1\int_0^1\left[f\left(a^tb^{1-t},\lambda c+(1-\lambda)d\right)+f\left(a^{1-t}b^t,\lambda c+(1-\lambda)d\right)\right.\\
&\quad\left.+mf\left(a^tb^{1-t},\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)+mf\left(a^{1-t}b^t,\frac{(1-\lambda)c+\lambda d}{m}\right)\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}\lambda\\
&=h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(\ln b-\ln a)(d-c)}\int_c^d\int_a^b\left(\frac{f(x,y)}{x}+\frac{mf\left(x,\frac{y}{m}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

故本定理证毕。

同理可证：

定理 2.6 设函数 $f:\Delta=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ 是协同 $(0,(h,1))$-凸函数，$0<a<b,c<d$，函数 $h:[0,1]\to(0,\infty)$，若 $f\in L_1(\Delta)$，则

$$f\left(\left(ab\right)^{1/2},\frac{c+d}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\left(\ln b-\ln a\right)\left(d-c\right)}\int_c^d\int_a^b\frac{f\left(x,y\right)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

参考文献

[1] Toader, G. (1985) Some Generalization of the Convexity. *Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization*, University Cluj-Napoca, 1985, 329-338.

[2] Varosanec, S. (2007) On *h*-Convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **326**, 303-311. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.02.086

[3] Özdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Set, E. (2011) On (h,m)-Convexity and Hadamard-Type Inequalities. Mathematics, 2011-12-15. http://arxiv.rg/pdf/1103.6163v1

[4] Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pěcarić, J. (1997) Hadamard's Inequality for *r*-Convex Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **215**, 461-470. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5645

[5] 吴善和. r_p-凸函数与琴生型不等式 [J]. 数学实践与认识, 2005, 35(3): 220-228.

[6] Dragomir, S.S. (2001) On Hadamard's Inequality for Convex Functions on the Coordinates in a Rectangle from the Plane. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **5**, 775-788. https://doi.org/10.11650/twjm/1500574995

[7] Akdemir A.O. and Ozdemir, E.M. (2010) On Hadamard-Type Inequalities for Coordinated *r*-Convex Functions. *Mathematics*, **1309**, 7-15.

[8] Bai, Y.M. and Qi, F. (2016) Some Integral Inequalities of the Hermite-Hadamard Type for Log-Convex Functions on Coordinates. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **9**, 5900-5908. https://doi.org/10.22436/jnsa.009.12.01