Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(11), 1766-1774
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.811206

Hans汉斯

Weak Solution for Stochastic Partial Differential Equations Driven by a Fractional Brownian Sheet with Monotone Drift

Xiaoyu Xia*, **Litan Yan**

School of Science, Donghua University, Shanghai
Email: *2424302936@qq.com

Received: Oct. 30^{th}, 2019; accepted: Nov. 14^{th}, 2019; published: Nov. 21^{st}, 2019

Abstract

In this note,we will study weak solution of stochastic differential equation, where $B^{H,H'} = \left\{B^{H,H'}, z \in [0,T]^2\right\}$ is a Fractional Brownian sheet and b is satisfied the so-called locally linear growth condition.

$$X_z = x + B_z^{H,H'} + \int_{[0,z]} b(\zeta, X_\zeta) d\zeta, \quad \zeta \in [0,T]^2 \tag{1}$$

Then we prove the existence and uniqueness of the weak solution of this kind of stochastic differential equation.

Keywords

Fractional Brownian Sheet, Stochastic Partial Differential Equation, Weak Solution

分数布朗单驱动的一类随机偏微分方程的弱解

夏晓宇*，**闫理坦**

东华大学理学院，上海

* 通讯作者。

文章引用: 夏晓宇, 闫理坦. 分数布朗单驱动的一类随机偏微分方程的弱解[J]. 应用数学进展, 2019, 8(11): 1766-1774. DOI: 10.12677/aam.2019.811206

Email: *2424302936@qq.com

收稿日期：2019年10月30日；录用日期：2019年11月14日；发布日期：2019年11月21日

摘 要

本文旨在研究分数布朗单驱动的一类随机偏微分方程的弱解问题。首先，$B^{H,H'}=\left\{B^{H,H'}, z\in[0,T]^2\right\}$为一个分数布朗单，其中**Hurst**指数为$(H,H')$,我们考虑随机偏微分方程

$$X_z = x + B_z^{H,H'} + \int_{[0,z]} b(\zeta, X_\zeta)d\zeta, \quad \zeta\in[0,T]^2 \tag{1}$$

并限定系数b，使它满足所谓的局部线性增长条件。随后证明了这类随机偏微分方程弱解的存在唯一性。

关键词

分数布朗单，随机偏微分方程，弱解

1. 引言

给定$(H,H')\in(0,\frac{1}{2})^2$ 。一个中心高斯过程$B^{H,H'}=\left\{B^{H,H'}, z\in[0,T]^2\right\}$称为具有Hurst指数为$(H,H')$ 的分数布朗单，当它的协方差为：

$$\begin{aligned}R_{H,H'}(z,z') &= E\left(B_z^{H,H'}B_{z'}^{H,H'}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left\{s^{2H}+(s')^{2H}-|s'-s|^{2H}\right\}\left\{t^{2H'}+(t')^{2H'}-|t'-t|^{2H'}\right\},\end{aligned}$$

其中$z=(s,t)$, $z'=(s',t')$。当$H=H'=\frac{1}{2}$时，$B^{H,H'}$为一般的布朗单。2002年，Nualart等人在 [1] 中(或在 [2]中)考虑了方程

$$X_t = x + B_t^H + \int_0^t b(s, X_s)ds, \quad t\in[0,T] \tag{2}$$

其中B^H 为Hurst指数为H的分数布朗运动，$H \in [0,1]$ 且b是Borel函数。在下列条件下，他们证明了关于这个方程的弱解的存在唯一性：

(I) 当$0 < H \leq \frac{1}{2}$时，b 是满足线性增长条件的Borel函数

$$|b(z,x)| \leq C(1+|x|) \tag{3}$$

对任意$t \in [0,T]$，$x \in R$成立。

(II) 当$\frac{1}{2} < H < 1$时，b 满足Holder连续条件：

$$|b(t,x)-b(s,y)| \leq C(|x-y|^{\alpha}+|t-s|^{\gamma}) \tag{4}$$

其中$1-\frac{1}{2H} < \alpha < 1, \gamma > H-\frac{1}{2}$。

2003年，Nualart等人在 [3]中将方程 (3)推广到两参数情形，即考虑了如下方程

$$X_z = x + B_z^{H,H'} + \int_{[0,z]} b(\zeta, X_\zeta) d\zeta, \quad \zeta \in [0,T]^2$$

其中b 是$[0,T]^2 \times R$ 上的Borel函数。在条件(I)下，他们证明了关于方程 ()弱解的存在唯一性。

本文的目的是证明方程 ()在关于f的弱规律性假设 (6)下弱解的存在唯一性。
b 是$[0,T]^2 \times R$ 上的Borel函数，使得

$$|b(z,x)| \leq C(1+|x|)f(z) \tag{5}$$

其中$z \in [0,T]^2$且f 是$[0,T]^2 \times R$ 上非负的Borel函数。

- 当$0 < H < \frac{1}{2}$时，Borel函数f 满足

$$\begin{aligned}&\int_0^s \int_0^t r_1^{2H-1} r_2^{2H'-1} \left(\int_{[0,z]} u^{\frac{1}{2}-H}(s-u)^{-\frac{1}{2}-H} v^{\frac{1}{2}-H'}(t-v)^{-\frac{1}{2}-H'} f(z) dz \right)^2 dr_1 dr_2 \\ &\qquad \leq N_{H,H',T,T'} < \infty\end{aligned} \tag{6}$$

对$0 \leq t \leq T$, $0 \leq s \leq T'$成立，其中$N_{T,T'} > 0$ 是一个只依赖于T，H，T'，H'的常数。

本文由以下三部分组成。第一部分对分数布朗单的基本知识以及Girsanov定理进行了回顾。第二部分给出了方程 ()弱解的存在唯一性。最后给出弱解依分布唯一的证明。

2. 预备知识

本章，我们对分数布朗单的一些基本定义和结果进行简短的回顾。令$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间。若$z_1, z_2 \in [0,T]^2$，则$z_i = (s_i, t_i), i = 1,2$。若$s_1 \geq s_2, t_1 \geq t_2$，则有$z_1 \geq z_2$ 成立。对任意的$z_1 \leq z_2$，我们记$[z_1, z_2] = [s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$。令$B_H = \left\{B_z^{H,H'}, z \in [0,T]^2\right\}$是定义

在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上Hurst指数为$0 < H,H' \leq \frac{1}{2}$ 的分数布朗单。对于任意$z \in [0,T]^2$，我们用$\mathcal{F}_z^B$表示由随机变量$\left\{B_\zeta^{H,H'},\zeta \leq z\right\}$和零测度集生成的$\sigma$-场。若$u_z$ 是$\mathcal{F}_z^B$-可测的，则我们称随机过程$u=\{u_z,z\in[0,T]^2\}$是$\mathcal{F}_z^B$- 适应的。

对于给定的$z_1=(s_1,t_1)\leq z_2=(s_2,t_2)$和过程$X$，我们用$\triangle_{[z_1,z_2]}(X)$表示过程$X$在矩形$[z_1,z_2]$上的增量，其中$\triangle_{[z_1,z_2]}(X)=X(s_2,t_2)-X(s_2,t_1)-X(s_1,t_2)+X(s_1,t_1)$"
我们把$[0,T]^2$上阶梯函数的集合用ξ表示，其中$\xi\subset\mathcal{H}$。令$\mathcal{H}$是一个Hilbert空间，它是关于如下标量积的ξ的闭包：

$$\langle 1_{[0,z]},1_{[0,z]}\rangle_{\mathcal{H}}=R_{H,H'}(z,z^{'}).$$

映射$1_{[0,z]}\to B_\zeta^{H,H'}$可被扩展为$B^{H,H'}$关于$\mathcal{H}$到高斯空间$H_1(B^{H,H'})$的等距映射。我们把这个映射记为$\varphi\to B^{H,H'}(\varphi)$。

协方差核函数$R_{H,H'}\left(z,z'\right)$具有如下形式：

$$R_{H,H'}\left(z,z'\right)=\int_{[0,z\wedge z']}K_{H,H'}(z,\zeta)K_{H,H'}\left(z',\zeta\right)d\zeta$$

其中$[0,z\wedge z']=[0,s\wedge s']\times[0,t\wedge t']$, $K_{H,H'}$ 是具有如下形式的平方可积核函数：

$$K_{H,H'}\left(z,z'\right)=K_{H,H'}\left(s,s'\right)K_{H,H'}\left(t,t'\right),$$

其中$K_H,K_{H'}$被定义([4])如下：

$$\begin{cases} K_H\left(s,s'\right)=\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(s'-s\right)^{H-\frac{1}{2}}F\left(H-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-H,H+\frac{1}{2},1-\frac{s'}{s}\right)\\ K_{H'}\left(t,t'\right)=\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(t'-t\right)^{H-\frac{1}{2}}F\left(H-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-H,H+\frac{1}{2},1-\frac{t'}{t}\right)\end{cases}$$

$F(a,b,c,d)$是高斯超几何函数。
考虑如下从空间$\varphi\longrightarrow L^2([0,T]^2)$的线性算子$K_{H,H'}^*$

$$\left(K_{H,H'}^*\varphi\right)(z)=K_{H,H'}((T,T),z)\varphi(z)+\int_{[z,(T,T)]}(\varphi(\zeta)-\varphi(z))\frac{\partial^2 K_{H,H'}}{\partial\zeta}(\zeta,z)d\zeta.$$

对于空间ε 上任意一组阶梯函数φ 和ψ，我们有：

$$\left\langle K_{H,H'}^*\varphi,K_{H,H'}^*\psi\right\rangle_{L^2([0,T]^2)}=\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}.$$

这是从如下事实直接得到的结论

$$\left(K_{H,H'}^*\mathbf{1}_{[0,z]}\right)(\zeta)=K_{H,H'}(z,\zeta).$$

因此，算子$K^*_{H,H'}$是Hilbert空间$\mathcal{H}$ 到$L^2([0,T]^2)$ 的等距映射。所以，过程$W=W_z, z\in[0,T]^2$是一个布朗单定义如下：

$$W_z = B^{H,H'}\left(\left(K^*_{H,H'}\right)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,z]}\right)\right) \tag{7}$$

并且过程$B^{H,H'}$有如下积分表示：

$$B_z^{H,H'} = \int_{[0,z]} K_{H,H'}(z,\zeta)dW_\zeta. \tag{8}$$

我们可以在 [5]中找到一参数情形时的相似结果。

由 [4]和 [6]我们得到$\mathcal{F}_z^B$与布朗单W生成的的流$\mathcal{F}_z^W$一致。该流满足以下特性(参见 [7])：

(I) $\mathcal{F}_z^W$ 关于$[0,T]^2$ 中的偏序是递增的，

(II) $\mathcal{F}_z^W$是右连续的，

(III) $\mathcal{F}_0^W$ 包含零测度集，

(V) 对任意的$0\le s,t\le T$, σ-场$\vee_{0\le u\le T}\mathcal{F}^W_{(u,t)}$ 和$\vee_{0\le u\le T}\mathcal{F}^W_{(s,v)}$关于$\mathcal{F}^W_{(s,t)}$ 是条件独立的。

我们将使用以下定义

令$\{\mathcal{F}_z, z\in[0,T]^2\}$是满足(I)-(V)的一族$\sigma$- 场。若过程$W$ 是$\mathcal{F}_z$适应的且对于任意$z_1\le z_2$，增量$\triangle_{[z_1,z_2]}(W)$关于$W(u,v), u\le s_1 v\le t_1$生成的$\sigma$-场独立，则布朗单$W=\{W_z, z\in[0,T]^2\}$被称为$\mathcal{F}_z$- 布朗单。

令$\{\mathcal{F}_z, z\in[0,T]^2\}$ 是满足(I)-(V)的一族σ- 场。若过程W是由方程 (7)定义的$\mathcal{F}_z$-布朗单，则分数布朗单$B^{H,H'}=\left\{B^{H,H'}, z\in[0,T]^2\right\}$ 被称为$\mathcal{F}_z$-分数布朗单。

与核函数相关的$L^2([0,T]^2)$空间上的算子$K_{H,H'}$是从$L^2([0,T]^2)$到$I^{H+\frac{1}{2},H'+\frac{1}{2}}(L^2([0,T]^2))$上的同构映射并且它有如下的分数积分表示：

$$\left(K_{H,H'}h\right)(s,t) = I^{2H,2H'}s^{\frac{1}{2}-H}t^{\frac{1}{2}-H'}I^{\frac{1}{2}-H,\frac{1}{2}-H'}s^{H-\frac{1}{2}}t^{H'-\frac{1}{2}}h, \tag{9}$$

其中$h\in L^2([0,T]^2)$。
给定一个轨道型可积过程$u=u_z, z\in L^2([0,T]^2)$，考虑以下变换

$$\tilde{B}_z^{H,H'} = B_z^{H,H'} + \int_{[0,z]} u_\zeta d\zeta. \tag{10}$$

我们可以把它写做：

$$\tilde{B}_z^{H,H'} = \int_{[0,z]} K_{H,H'}(z,\zeta)dW_\zeta + \int_{[0,z]} u_\zeta d\zeta = \int_{[0,z]} K_{H,H'}(z,\zeta)d\tilde{W}_\zeta,$$

其中

$$\tilde{W}_z = W_z + \int_{[0,z]}\left(K^{-1}_{H,H'}\left(\int_{[0,\cdot]} u_\zeta d\zeta\right)(\eta)\right)d\eta. \tag{11}$$

值得注意的是$K_{H,H'}^{-1}\left(\int_{[0,\cdot]}u_\zeta d\zeta\right)$几乎处处属于空间$L^2([0,T]^2)$当且仅当$\int_{[0,\cdot]}u_\zeta d\zeta\in I^{H+\frac{1}{2},H'+\frac{1}{2}}(L^2([0,T]^2))$。因此对于分数布朗单我们有如下形式的Girsanov定理。

定理 2.1 令$\{\mathcal{F}_z, z\in[0,T]^2\}$是满足*(I)*-*(V)*的一族$\sigma$-场。假设过程$B^{H,H'}=\left\{B^{H,H'}, z\in[0,T]^2\right\}$是$\mathcal{F}_z$-分数布朗单并且过程$W=\{W_z, z\in[0,T]^2\}$是$\mathcal{F}_z$-布朗单由方程(7)定义。考虑由轨道型可积的$\mathcal{F}_z$适应过程$u=u_z, z\in L^2([0,T]^2)$定义的过程(10)。假设以下两个条件成立

(i) $\int_{[0,\cdot]}u_\zeta d\zeta\in I^{H+\frac{1}{2},H'+\frac{1}{2}}(L^2([0,T]^2))$ 几乎处处成立，

(ii) $E(\xi_{T,T})=1$，其中

$$\begin{aligned}\xi_{T,T}=\exp\Bigg(&-\int_{[0,T]^2}\left(K_{H,H'}^{-1}\left(\int_{[0,\cdot]}u_\zeta d\zeta\right)\right)(z)dW_z\\ &-\frac{1}{2}\int_{[0,T]^2}\left(K_{H,H'}^{-1}\left(\int_{[0,]}u_\zeta d\zeta\right)\right)^2(z)dz\Bigg).\end{aligned}$$

则在新的概率测度$\tilde{P}$下，过程$\tilde{B}_z^{H,H'}$是*Hurst* 指数为(H,H')的$\mathcal{F}_z$-分数布朗单，其中$\frac{d\tilde{P}}{dP}=\xi_{T,T}$.

对所有$h\in I^{H+\frac{1}{2},H'+\frac{1}{2}}(L^2([0,T]^2))$，(9) 式的逆算子如下：

$$K_{H,H'}^{-1}h(s,t)=s^{\frac{1}{2}-H}t^{\frac{1}{2}-H'}D^{\frac{1}{2}-H,\frac{1}{2}-H'}s^{H-\frac{1}{2}}t^{H'-\frac{1}{2}}D^{2H,2H'}h, \tag{12}$$

如果h逐渐递减趋于0并且是绝对连续的，此时逆算子可被写成

$$K_{H,H'}^{-1}h(s,t)=s^{H-\frac{1}{2}}t^{H'-\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}-H,\frac{1}{2}-H'}s^{\frac{1}{2}-H}t^{\frac{1}{2}-H'}\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial t}. \tag{13}$$

从上式可以看出，条件(i)的一个充分条件是$\int_0^T\int_0^T u_\zeta^2 d\zeta<\infty$。

我们能够在Biagini *et al.* [8], Hu [9], Mishura [10], Nourdin [11], Nualart [12] 和Tudor [13] 中找到关于分数布朗单的一些相关研究和详细的文献综述。关于一参数分数微积分和双参数分数阶微积分的基本定义和结果可在 [5] [14]中查阅。

3. 弱解的存在性

本节，我们将考虑满足条件 (5)和 (6)的方程 ()弱解的存在性。也就是说，在带流概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_z, z\in[0,T]^2\})$上有一组$\mathcal{F}_z$适应过程$(B^{H,H'},X)$，使得流$\mathcal{F}_z$满足性质$(I)-(V)$ 并且有

(i) 在定义1.2的意义下，$B^{H,H'}$是一个$\mathcal{F}_z$- 分数布朗单，

(ii) $B^{H,H'}$和X满足方程 ()。

定理 3.1 令$0<H\le\frac{1}{2}$ 及b是$[0,T]^2\times R$ 上的*Borel*函数满足条件 (5)和 (6)，则方程 ()有弱解。

证明 3.1 令$u_\zeta = -b\left(\zeta, B_\zeta^{H,H'} + x\right)$且

$$\tilde{B}_z^{H,H'} = B_z^{H,H'} - \int_{[0,z]} b\left(\zeta, B_\zeta^{H,H'} + x\right) d\zeta = B_z^{H,H'} + \int_{[0,z]} u_\zeta d\zeta.$$

我们假设过程$u = u_\zeta, \zeta \in [0,T]^2$ 满足定理*1.1*的条件(i) 和(ii)。若假设为真，则在概率测度$\widetilde{P}$下，$\widetilde{B}_z^{H,H'}$是一个F_t^B-分数布朗单并且在带流概率空间$(\Omega, F, \widetilde{P}, \{F_z^B, z \in [0,T]^2\})$下$(\widetilde{B}^{H,H'}, (\widetilde{B}^{H,H'} + x))$是方程 (4)的弱解。我们令

$$v_z = -\left(K_{H,H'}^{-1}\left(-\int_{[0,\cdot]} b(\zeta, B_\zeta^{H,H'} + x) d\zeta\right)\right)_z$$

则，我们有

$$\begin{aligned}
|v_z| &= |s^{H-\frac{1}{2}} t^{H'-\frac{1}{2}} I^{\frac{1}{2}-H, \frac{1}{2}-H'} s^{\frac{1}{2}-H} t^{\frac{1}{2}-H'} b(z, B_z^{H,H'} + x)| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-H)\Gamma(\frac{1}{2}-H')} s^{H-\frac{1}{2}} t^{H'-\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left| \int_{[0,z]} (s-u)^{-\frac{1}{2}-H} u^{\frac{1}{2}-H} (t-v)^{-\frac{1}{2}-H'} v^{\frac{1}{2}-H'} b((u,v), B_{(u,v)}^{H,H'} + x) du dv \right| \\
&\le c_{H,H'} C \left(1 + |x| + \|B^{H,H'}\|_\infty\right) s^{H-\frac{1}{2}} t^{H'-\frac{1}{2}} \int_{[0,z]} (s-u)^{-\frac{1}{2}-H} u^{\frac{1}{2}-H} (t-v)^{-\frac{1}{2}-H'} v^{\frac{1}{2}-H'} f(z) dz
\end{aligned}$$

其中$c_{H,H'}$是依赖H, H'及T 的常数。由此，我们得出

$$\begin{aligned}
\int_{[0,t]} |v_z|^2 dz &\le c_{H,H'} C \left(1 + |x| + \|B^{H,H'}\|_\infty\right) \\
&\quad \times \int_0^s \int_0^t r_1^{H-\frac{1}{2}} r_2^{H'-\frac{1}{2}} \left(\int_{[0,z]} (s-u)^{-\frac{1}{2}-H} u^{\frac{1}{2}-H} (t-v)^{-\frac{1}{2}-H'} v^{\frac{1}{2}-H'} f(z) dz\right)^2 dr_1 dr_2 \\
&\le c_H C \left(1 + |x| + \|B^H\|_\infty\right) N_{H,H',T,T'}.
\end{aligned}$$

由高斯过程的半范数平方的指数可积性我们可以直接得出

$$\sup_{z \in [0,T]^2} E e^{\lambda (v_z)^2} < \infty$$

对于一些常数$\lambda > 0$成立。

4. 弱解的唯一性

本节, 我们将考虑满足条件 (5)和 (6)的方程 ()弱解的依分布唯一性。

定理 4.1 假设定理 *3.1*的条件成立。则方程 ()的解依分布唯一。

证明 4.1 在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_z, z \in [0,T]^2\})$ 下，给定随机微分方程 ()的一组弱解$(B^{H,H'})$。定义过程$u = \{u_z, z \in [0,T]^2\}$及概率测度$\widetilde{P}$如下：

$$u_z = \left(K_{H,H'}^{-1}\int_{[0,\cdot]} b(\zeta, X_\zeta)d\zeta\right)_z,$$

且

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \exp\left(-\int_{[0,T]^2} u_\zeta dW_\zeta - \frac{1}{2}\int_{[0,T]^2} u_\zeta^2 d\zeta\right).$$

我们称过程u_z满足定理 2.1条件(i)和(ii)。事实上，u_z是一个$\mathcal{F}_z$适应过程并且由于X_z具有与分数布朗单相同的规律性我们得到

$$\int_{[0,T]^2} u_\zeta^2 d\zeta < \infty$$

几乎处处成立。由$Gronwall$引理，我们有

$$\|X\|_\infty \le \left(x + \left\|B^{H,H'}\right\|_\infty + CT^2\right)e^{CT^2}$$

再次使用$Novikov$准则得到$E\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}\right] = 1$。接下来，对以下过程使用经典的$Girsanov$定理

$$\widetilde{W}_z = W_z + \int_{[0,z]} u_\zeta d\zeta, \tag{14}$$

可知$\widetilde{W}_z$是一个$\mathcal{F}_z$-布朗单。由$\widetilde{W}_z$我们有

$$X_z = x + \int_{[0,z]} K_{H,H'}(z,\zeta)d\widetilde{W}_z$$

对任意的$z \in [0,T]^2$成立。因此$X - x$在概率测度$\widetilde{P}$下是一个$Hurst$指数为(H, H')的分数布朗单。更进一步的，对所有$C([0,T]^2)$上的有界可测函数Ψ，我们有

$$\begin{aligned}
E_P(\Psi(X-x)) =& \int_\Omega \Psi(\xi)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\tilde{P}}(\xi)\mathrm{d}\tilde{P} \\
=& E_{\tilde{p}}\left(\Psi(X-x)\exp\left(\int_{[0,T]^2}\left(K_{H,H'}^{-1}\int_{[0,\cdot]} b\left(\zeta, X_\zeta\right)\mathrm{d}\zeta\right)(z)\mathrm{d}W_z\right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{2}\int_{[0,T]^2}\left(K_{H,H'}^{-1}\int_{[0,\cdot]} b\left(\zeta, X_\zeta\right)\mathrm{d}\zeta\right)^2(z)\mathrm{d}z\right)\right) \\
=& E_P\left(\Psi(X-x)\left(\exp\int_{[0,T]^2}\left(K_{H,H'}^{-1}\int_{[0,\cdot]} b\left(\zeta, X_\zeta\right)\mathrm{d}\zeta\right)(z)d\tilde{W}_z\right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{1}{2}\int_{[0,T]^2}\left(K_{H,H'}^{-1}\int_{[0,\cdot]} b\left(\zeta, X_\zeta\right)\mathrm{d}\zeta\right)^2(z)\mathrm{d}z\right)\right) \\
=& E_P\left(\Psi(B^{H,H'})\left(\exp\int_{[0,T]^2}\left(K_{H,H'}^{-1}\int_{[0,\cdot]} b\left(\zeta, B_\zeta^{H,H'} + x\right)\mathrm{d}\zeta\right)(z)dW_z\right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{1}{2}\int_{[0,T]^2}\left(K_{H,H'}^{-1}\int_{[0,\cdot]} b\left(\zeta, B_\zeta^{H,H'} + x\right)\mathrm{d}\zeta\right)^2(z)\mathrm{d}z\right)\right) \\
=& E_P\left(\Psi(\widetilde{B}^{H,H'})\right).
\end{aligned}$$

因此，在概率测度P 下，过程$X - x$ 与$\widetilde{B}^{H,H'}$ 有相同的分布。

参考文献

[1] Nualart, D. and Ouknine, Y. (2002) Regularization of Differential Equations by Fractional Noise. *Stochastic Processes and Their Applications*, **102**, 103-116. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(02)00155-2

[2] Nualart, D. and Răscanu, A. (2002) Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion. *Collectanea Mathematica*, **53**, 55-81.

[3] Erraoui, M., Nualart, D. and Ouknine, Y. (2003) Hyperbolic Stochastic Partial Differential Equations with Additive Fractional Brownian Sheet. *Stochastics and Dynamics*, **3**, 121-139. https://doi.org/10.1142/S0219493703000681

[4] Decreusefond, L. and üstunel, A.S. (1999) Stochastic Analysis of the Fractional Brownian Motion. *Potential Analysis*, **10**, 177-214. https://doi.org/10.1023/A:1008634027843

[5] Alos, E., Mazet, O. and Nualart, D. (2001) Stochastic Calculus with Respect to Gaussian Processes. *The Annals of Probability*, **29**, 766-801. https://doi.org/10.1214/aop/1008956692

[6] Erraoui, M. and Ouknine, Y. (1994) Approximations des équations differentielles stochastiques par des équations àretard. *Stochastics and Stochastic Reports*, **46**, 53-62. https://doi.org/10.1080/17442509408833869

[7] Cairoli, R. and Walsh, J. (1975) Stochastic Integrals in the Plane. *Acta Mathematica*, **134**, 111-183. https://doi.org/10.1007/BF02392100

[8] Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B. and Zhang, T. (2008) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. In: *Probability and Its Application*, Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-797-8

[9] Hu, Y.Z. (2005) Integral Transformations and Anticipative Calculus for Fractional Brownian Motions. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 175, AMS, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/memo/0825

[10] Mishura, Y.S. (2008) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1929, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-75873-0

[11] Nourdin, I. (2012) Selected Aspects of Fractional Brownian Motion. Springer Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-88-470-2823-4

[12] Nualart, D. (2006) Malliavin Calculus and Related Topics. 2nd Edition, Springer, Heidelberg, New York.

[13] Tudor, C.A. (2013) Analysis of Variations for Self-Similar Processes. Springer, Heidelberg, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00936-0

[14] Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Mariachev, O.I. (1993) Fractional Integrals and Derivatives. Gordon and Breach, Philadelphia.