Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(11), 1809-1815**
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.811211

Existence and Behavior of Local Minimal Solutions of a Kirchhoff Type Equation in $\mathbb{R}^4$

Zhongquan Yan

Key Laboratory of Complex Systems and Intelligent Computing, School of Mathematics and Statistics, Qiannan Normal University for Nationalities, Duyun Guizhou
Email: 1013450018@qq.com

Received: Oct. 30th, 2019; accepted: Nov. 14th, 2019; published: Nov. 21st, 2019

Abstract

The paper studies the following Kirchhoff type equation with critical term

$$-(a+b\|u\|^2)\Delta u = u^3 + \mu h(x),\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4),$$

where $a > 0, b \geq 0, \mu > 0,\ h \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^4)$ **is a nonnegative and nontrivial function,** $\|u\| = (\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ **denotes the norm of** u **in** $D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$**. By using the variational method, a local minimal solution is obtained. Moreover, the behaviors of the local minimal solution are also given. This generalizes and enriches the result of [1].**

Keywords

Kirchhoff Type Equation, Critical Term, Positive Solution, Variational Method

$\mathbb{R}^4$ 中一类 Kirchhoff 型方程局部极小解的存在性及性态

严忠权

黔南民族师范学院，数学与统计学院，复杂系统与计算智能重点实验室，贵州 都匀

文章引用: 严忠权. $\mathbb{R}^4$ 中一类 Kirchhoff 型方程局部极小解的存在性及性态[J]. 应用数学进展, 2019, 8(11): 1809-1815. DOI: 10.12677/aam.2019.811211

Email: 1013450018@qq.com

收稿日期：2019年10月30日；录用日期：2019年11月14日；发布日期：2019年11月21日

摘　要

本文研究下列带临界项的 Kirchhoff 型方程

$$-(a+b\|u\|^2)\Delta u = u^3 + \mu h(x),\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4),$$

其中 $a > 0, b \geq 0, \mu > 0,\ h \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^4)$ 是非负非平凡的函数，$\|u\| = (\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ 表示 u 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ 中的范数。利用变分方法，一个局部极小解被得到。此外，该局部极小解的一些性质也被给出。这推广并丰富了文献 [1] 中的一个结果。

关键词

Kirchhoff 型方程，临界项，正解，变分方法

1. 引言

考虑下列带临界项的 Kirchhoff 型方程

$$-(a+b\|u\|^2)\Delta u = u^3 + \mu h(x),\ u \in E := D^{1,2}(\mathbb{R}^4), \tag{1}$$

其中 $a > 0, b \geq 0, \mu > 0,\ h \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^4)$ 是非负非平凡的函数，$\|u\| = (\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ 表示 u 在 E 中的范数。

因为 Kirchhoff 型方程具有很强的物理背景 (参见文献 [2])，所以许多作者致力于此类方程的研究，比如文献 [1,3–8]。特别地，在文献 [1] 中，作者研究了方程 (1) 的正解。定义

$$\overline{\mu} = \frac{aS}{3|h|_{\frac{4}{3}}}\sqrt{\frac{2aS}{3(1-bS^2)}},$$

这里 $|\cdot|_r$ 表示 $L^r(\mathbb{R}^4)$ 中元素的范数，S 表示 E 嵌入到 $L^4(\mathbb{R}^4)$ 中的最佳 Sobolev 常数，即

$$S=\inf_{u\in E\setminus\{0\}}\frac{\|u\|^2}{|u|_4^2}.$$

当 $a>0, 0<b<S^{-2}, 0<\mu<\overline{\mu}$ 时，利用 Ekeland 变分原理，文献 [1] 给出了方程 (1) 具有一个局部极小解的结论。而在本文中，利用新的技巧在更宽的参数范围下，我们将得出方程 (1) 仍具有一个局部极小解的结论。同时该新的技巧也给出了局部极小解的一些性质。

方程 (1) 对应的能量泛函为

$$I_\mu(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4}u^4dx-\mu\int_{\mathbb{R}^4}h(x)udx,\ \forall u\in E.$$

显然，$I_\mu\in C^1(E,\mathbb{R})$ 并且对任意的 $u,v\in E$，有

$$\langle I'_\mu(u),v\rangle=(a+b\|u\|^2)\int_{\mathbb{R}^4}\nabla u\cdot\nabla vdx-\int_{\mathbb{R}^4}u^3vdx-\mu\int_{\mathbb{R}^4}h(x)vdx.$$

因此，我们只需寻找 I_μ 在 E 中的临界点。

当 $a=1, b=0, \mu=0$ 时，方程 (1) 退化到下列经典的半线性椭圆方程

$$-\Delta u=u^3,\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^4). \tag{2}$$

设 Π 为由方程 (2) 的所有正解所组成的集合，由文献 [9] 知，对任意的 $u\in\Pi$，有

$$\|u\|^2=|u|_4^4=S^2. \tag{3}$$

定义

$$\mu^*=\frac{aS}{3|h|_{\frac{4}{3}}^2}\sqrt{\frac{2a(S|h|_{\frac{4}{3}}^2+A^2)}{3(1-bS^2)}},$$

这里

$$A=\sup_{u\in\Pi}\int_{\mathbb{R}^4}h(x)udx.$$

本文的主要结论是

定理 1 假设 $a>0, 0\le b<S^{-2}, 0<\mu\le\mu^*$ 并且 $h\in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^4)$ 是非负非平凡的函数，那么方程 (1) 具有一个局部极小解 u_μ，且满足下列性质:

(i) u_μ 是正的;

(ii) u_μ 是方程 (1) 的基态解;

(iii) $I_\mu(u_\mu)<-\frac{\mu^2A^2}{2aS^2}$;

(iv) 当 $\mu\to0^+$ 时，$\|u_\mu\|\to0$。

注记 1 本文使用了完全异于文献 [1] 中的方法得到了方程 (1) 的局部极小解。这种方法也使我们得出了局部极小解的一些性质。

注记 2 定理 1 推广并丰富了文献 [1] 中的一个结果。

引理 1 假设 $a>0,\mu>0,\ h\in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^4)$ 是非负非平凡的函数，$u_\mu\in E$ 是方程 (1) 的负能量解，即

$$I'_\mu(u_\mu)=0,\ I_\mu(u_\mu)<0,$$

那么

$$\|u_\mu\|<\frac{3\mu}{a\sqrt{S}}|h|_{\frac{4}{3}}.$$

证明 因为

$$I'_\mu(u_\mu)=0,\ I_\mu(u_\mu)<0,$$

所以

$$I_\mu(u_\mu)=I_\mu(u_\mu)-\frac{1}{4}\langle I'_\mu(u_\mu),u_\mu\rangle=\frac{a}{4}\|u_\mu\|^2-\frac{3\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^4}h(x)u_\mu dx<0.$$

结合 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式，知

$$\frac{a}{4}\|u_\mu\|^2<\frac{3\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^4}h(x)u_\mu dx\le\frac{3\mu}{4\sqrt{S}}|h|_{\frac{4}{3}}\|u_\mu\|.$$

化简得

$$\|u_\mu\|<\frac{3\mu}{a\sqrt{S}}|h|_{\frac{4}{3}}.$$

引理证毕。 □

假设 $a>0,0\le b<S^{-2},\mu>0,\ h\in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^4)$ 是非负非平凡的函数。设

$$R_\mu=\frac{3\mu}{a\sqrt{S}}|h|_{\frac{4}{3}},\overline{B}_{R_\mu}=\{u\in E:\|u\|\le R_\mu\},c_\mu=\inf_{u\in\overline{B}_{R_\mu}}I_\mu(u),$$

那么

引理 2 $c_\mu\in(-\infty,-\frac{\mu^2A^2}{2aS^2})$.

证明 设 $t_0=\frac{\mu A}{aS^2}$，则结合 (3) 知

$$\begin{aligned}\inf_{u\in\Pi}I_\mu(t_0u)&=\frac{at_0^2S^2}{2}+\frac{bt_0^4S^4}{4}-\frac{t_0^4S^2}{4}-\mu t_0\sup_{u\in\Pi}\int_{\mathbb{R}^4}h(x)udx\\&=\frac{\mu^2A^2}{2aS^2}-\frac{\mu^4A^4(1-bS^2)}{4a^4S^6}-\frac{\mu^2A^2}{aS^2}\\&<-\frac{\mu^2A^2}{2aS^2}.\end{aligned}$$

由下确界的定义知，存在 $\varphi \in \Pi$ 使得 $I_\mu(t_0\varphi) < -\frac{\mu^2 A^2}{2aS^2}$。因为

$$\|t_0\varphi\| = \frac{\mu A}{aS} \leq \frac{\mu}{a\sqrt{S}}|h|_{\frac{4}{3}} < R_\mu,$$

所以

$$c_\mu \leq I_\mu(t_0\varphi) < -\frac{\mu^2 A^2}{2aS^2}.$$

而 $c_\mu > -\infty$ 是显然的。引理证毕。 □

引理 3 假设 $a > 0, 0 \leq b < S^{-2}, 0 < \mu \leq \frac{aS}{3|h|_{\frac{4}{3}}}\sqrt{\frac{2aS}{1-bS^2}}$ 并且 $h \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^4)$ 是非负非平凡的函数，那么存在一个非负的函数 $u_\mu \in \overline{B}_{R_\mu}$ 使得 $I_\mu(u_\mu) = c_\mu$。

证明 由 c_μ 的定义知，存在 $u_n \in \overline{B}_{R_\mu}$ 使得 $I_\mu(u_n) \to c_\mu$。从而，存在 $u_\mu \in E$ 使得在子列的意义下，

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_\mu, & \text{在 } E \text{ 中}, \\ u_n \to u_\mu, & \text{在 } L^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4)\ [1 \leq s < 4) \text{中}, \\ u_n(x) \to u_\mu(x), & \text{几乎处处在 } \mathbb{R}^4 \text{ 中}. \end{cases}$$

因为 $\overline{B}_{R_\mu}$ 是闭凸集，所以 $u_\mu \in \overline{B}_{R_\mu}$。从而, $I_\mu(u_\mu) \geq c_\mu$。设 $w_n = u_n - u_\mu$，则

$$\|u_n\|^2 = \|w_n\|^2 + \|u_\mu\|^2 + o(1), \tag{4}$$

$$\|u_n\|^4 = \|w_n\|^4 + \|u_\mu\|^4 + 2\|w_n\|^2\|u_\mu\|^2 + o(1). \tag{5}$$

运用 Brezis-Lieb 引理 [10]，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^4} u_n^4 dx = \int_{\mathbb{R}^4} w_n^4 dx + \int_{\mathbb{R}^4} u_\mu^4 dx + o(1). \tag{6}$$

因为 $h \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^4)$，所以

$$\int_{\mathbb{R}^4} h(x)u_n dx = \int_{\mathbb{R}^4} h(x)u_\mu dx + o(1). \tag{7}$$

当 $0 < \mu \leq \frac{aS}{3|h|_{\frac{4}{3}}}\sqrt{\frac{2aS}{1-bS^2}}$ 时，

$$\|w_n\| + o(1) \leq R_\mu \leq \sqrt{\frac{2aS^2}{1-bS^2}}. \tag{8}$$

由 (4)-(8) 知，

$$
\begin{aligned}
c_\mu &= I_\mu(u_n)+o(1)\\
&= \frac{a}{2}\|w_n\|^2+\frac{a}{2}\|u_\mu\|^2+\frac{b}{4}\|w_n\|^4+\frac{b}{4}\|u_\mu\|^4+\frac{b}{2}\|w_n\|^2\|u_\mu\|^2-\mu\int_{\mathbb{R}^4}h(x)u_\mu dx\\
&\quad -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4}w_n^4dx-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4}u_\mu^4dx+o(1)\\
&\geq I_\mu(u_\mu)+\frac{a}{2}\|w_n\|^2-\frac{1-bS^2}{4S^2}\|w_n\|^4\\
&\geq I_\mu(u_\mu).
\end{aligned}
$$

故 $I_\mu(u_\mu)=c_\mu$。注意到 $I_\mu(u_\mu)=I_\mu(|u_\mu|)$。因此我们可以假设 u_μ 是非负的。引理证毕。 □

定理 1 的证明 当 $0<\mu\leq\mu^*$ 时，对任意的 $u\in E$ 且 $\|u\|=R_\mu$，我们有

$$
\begin{aligned}
I_\mu(u) &\geq \frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{1}{4S^2}\|u\|^4-\frac{\mu|h|_{\frac{4}{3}}}{\sqrt{S}}\|u\|\\
&= \frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{1-bS^2}{4S^2}\|u\|^4-\frac{\mu|h|_{\frac{4}{3}}}{\sqrt{S}}\|u\|\\
&\geq -\frac{\mu^2A^2}{2aS^2}.
\end{aligned}
$$

因为 $\mu^*<\frac{aS}{3|h|_{\frac{4}{3}}}\sqrt{\frac{2aS}{1-bS^2}}$，所以由引理 2 和引理 3 知，$\|u_\mu\|<R_\mu$。结合 $I_\mu(u_\mu)=c_\mu$，对任意的 $v\in E$，可得

$$
\langle I'_\mu(u_\mu),v\rangle=\lim_{t\to0}\frac{I_\mu(u_\mu+tv)-I_\mu(u_\mu)}{t}\geq0,
$$

$$
\langle I'_\mu(u_\mu),-v\rangle=\lim_{t\to0}\frac{I_\mu(u_\mu-tv)-I_\mu(u_\mu)}{t}\geq0.
$$

这表明 $I'_\mu(u_\mu)=0$。即，u_μ 是方程 (1) 的解。注意到

$$
-\Delta u_\mu=\frac{u_\mu^3+\mu h(x)}{a+b\|u_\mu\|^2}\geq0.
$$

所以由强极大值原理 [11] 知，u_μ 是正的。由引理 1 知，u_μ 是方程 (1) 的基态解并且当 $\mu\to0^+$ 时，$\|u_\mu\|\to0$. □

基金项目

贵州省应用数学重点学科专项项目。

参考文献

[1] Liu, J., Liao, J.-F. and Tang, C.-L. (2015) Positive Solutions for Kirchhoff-Type Equations with Critical Exponent in $\mathbb{R}^N$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **429**, 1153-1172. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.04.066

[2] Kirchhoff, G. (1883) Mechanik. Teubner, Leipzig.

[3] Liu, J., Liu, T. and Li, H.-Y. (2019) Ground State Solution on a Kirchhoff Type Equation Involving Two Potentials. *Applied Mathematics Letters*, **94**, 149-154. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.02.035

[4] Xie, Q.L., Ma, S.W. and Zhang, X. (2016) Bound State Solutions of Kirchhoff Type Problems with Critical Exponent. *Journal of Differential Equations*, **261**, 890-924. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.03.028

[5] Xie, Q.L. and Yu, J.S. (2019) Bounded State Solutions of Kirchhoff Type Problems with a Critical Exponent in High Dimension. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **18**, 129-158. https://doi.org/10.3934/cpaa.2019008

[6] 刘选状, 吴行平, 唐春雷. 一类带有临界指数增长项的Kirchhoff型方程正的基态解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(6): 54-59.

[7] 严忠权, 柳鸠. 具有一般临界增长的自治的Kirchhoff型方程正基态解的存在性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2018, 43(2): 32-35.

[8] 曾兰, 唐春雷. 带有临界指数的Kirchhoff型方程正解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 41(4): 29-34.

[9] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser, Boston.

[10] Brezis, H. and Lieb, E. (1983) A Relation between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **88**, 486-490. https://doi.org/10.2307/2044999

[11] Vazquez, J.L. (1984) A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations. *Applied Mathematics and Optimization*, **12**, 191-202. https://doi.org/10.1007/BF01449041