Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(11), 1852-1858
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.811215

Hans汉斯

Eigenvalues of a Class of Discrete Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions

Congmin Yang, Yunlan Gao*, Kang Sun

College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia
Email: 862567649@qq.com, *gaogaoyyyyy@sina.com

Received: Nov. 5th, 2019; accepted: Nov. 20th, 2019; published: Nov. 27th, 2019

Abstract

In this paper, we consider a class of discrete and right definite Sturm-Liouville problems:

$$-\nabla\left(p(t)\Delta y(t)\right)+q(t)y(t)=\lambda r(t)y(t),\quad t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$$

the boundary conditions are

$$b_0 y(0)=b_1\Delta y(0),$$

$$\left(c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3\right)y(T+1)=\lambda^3\nabla y(T+1).$$

where $T>1$ **is an integer,** λ **is the eigenparameter and** $c_3\neq 0$**. First we construct two functions** $f(\lambda)$ **and** $g(\lambda)$**, using the similar way in [1], by solving the roots of** $f(\lambda)=g(\lambda)$**, we obtain three conclusion: the first is the existence of eigenvalues, second is the oscillation properties of eigenfunction, third is the inequalities of eigenvalues among the problems considered in this paper, Dirichlet problems and Neumann problems.**

Keywords

Discerte Sturm-Liouville Problems, Nonlinear Eigenparameter Dependent Boundary Condition, Eigenvalues, Alternating Inequality

一类边界条件含谱参数的离散Sturm-Liouville问题的特征值

杨聪敏，高云兰*，孙　康

*通讯作者。

文章引用: 杨聪敏, 高云兰, 孙康. 一类边界条件含谱参数的离散 Sturm-Liouville 问题的特征值[J]. 应用数学进展, 2019, 8(11): 1852-1858. DOI: 10.12677/aam.2019.811215

内蒙古工业大学理学院，内蒙古 呼和浩特
Email: 862567649@qq.com, *gaogaoyyyyy@sina.com

收稿日期：2019年11月5日；录用日期：2019年11月20日；发布日期：2019年11月27日

摘 要

本文讨论了一类离散右定的Sturm-Liouville问题：

$$-\nabla\left(p(t)\Delta y(t)\right)+q(t)y(t)=\lambda r(t)y(t),\quad t\in[1,T]_{\mathbb{Z}}$$

边界条件为

$$b_0y(0)=b_1\Delta y(0),$$

$$\left(c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+c_3\lambda^3\right)y(T+1)=\lambda^3\nabla y(T+1),$$

其中$T>1$是一个整数，λ是谱参数且$c_3\neq 0$。先构造两个函数$f(\lambda)$和$g(\lambda)$，采用类似于文献[1]的方法，通过求$f(\lambda)=g(\lambda)$的根，我们得出如下三方面的结论：一，问题的特征值的存在性，二，特征函数的振荡性质，三，本文所考虑的问题、Dirichlet问题以及Neumann问题的特征值之间的不等式。

关键词

离散的Sturm-Liouville问题，含非线性谱参数的边界条件，特征值，交错不等式

1. 引言

差分方程常出现在不同领域的数学模型中，如生物学，生态学，物理学等[2]。许多的学者进行了这方面的研究，得到了一些重要的结论。学者们根据不同的边界条件对离散问题进行研究，如分离边界条件[3] [4]，耦合边界条件[5]以及含谱参数的边界条件[6] [7]。一般讨论三个方面的问题，一是特征值的数目，二是特征值的分布，三是特征函数的振荡性。

在 2014 年，高承华考虑了在 Neumann 边界条件下的二阶离散问题，得到该问题的特征值个数以及特征函数的变号次数[8]。在 2016 年高承华等人在边界条件含有谱参数的一次多项式的条件下，考虑了二阶离散 Sturm-Liouville 问题，在满足条件$(-1)^i\delta_i\le 0$ ($\delta_i=a_id_i-b_ic_i$)时，得到结论：该问题特征值的存在性，特征值的个数以及特征函数的振荡性[9]。

接着在 2018 年高承华等人考虑了由二阶离散 Sturm-Liouville 方程和边界条件含有谱参数的二次多项式构成的问题，通过分析法得到在一定条件下该问题的特征值以及相应特征函数的性质[1]。

本文是文献[1] [9]的继续，研究了 Sturm-Liouville 方程

$$-\nabla\left(p(t)\Delta y(t)\right)+q(t)y(t)=\lambda r(t)y(t),\quad t\in[1,T]_{\mathbb{Z}} \tag{1}$$

在边界条件

$$b_0 y(0) = b_1 \Delta y(0), \tag{2}$$

$$\left(c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3\right) y(T+1) = \lambda^3 \nabla y(T+1), \tag{3}$$

下算子的谱，得到了比较好的结论。

2. 两个基础函数

我们构造满足问题(1)和(2)的解，当

$$y(0) = b_1, \quad \Delta y(0) = b_0,$$

时，(1)的一组解为

$$y(1,\lambda), \quad y(2,\lambda), \quad \cdots, \quad y(T+1,\lambda)。$$

对于 $t \ge 1$，当 $b_0 + b_1 \ne 0$ 时，$y(t,\lambda)$ 是关于 λ 的一元 $t-1$ 次多项式。当 $b_0 + b_1 = 0$ 时，$y(t,\lambda)$ 是关于 λ 的一元 $t-2$ 次多项式。本文中，我们仅考虑 $b_0 + b_1 \ne 0$ 的情况，当 $b_0 + b_1 = 0$ 时，可用类似的方法。与此同时，我们做如下假设：

(A1) 当 $t \in [0,T]_{\mathbb{Z}}$ 时，$p(t) > 0$；当 $t \in [1,T]_{\mathbb{Z}}$ 时，$r(t) > 0$；

(A2) $b_0 + b_1 \ne 0$；

(A3) $c_0 < 0$，$c_2 < 0$ 且 $c_1^2 \le 3c_0c_2$。

根据文献[3]，[9]以及[10]，我们知道由(1) (2)及边界条件 $y(T+1,\lambda) = 0$ 构成的问题有 T 个实根，令 λ_k^D，($k = 0,1,\cdots,T-1$)表示上述问题的特征值。由(1) (2)及边界条件 $\nabla y(T+1,\lambda) = 0$ 构成的问题有 T 个实根，令 λ_k^N ($k = 0,1,\cdots,T-1$)表示该问题的特征值。为方便，我们记 $\lambda_{-1}^D = -\infty$，$\lambda_{-1}^N = -\infty$，$\lambda_T^D = +\infty$ 以及 $\lambda_T^N = +\infty$。

第一个函数

令

$$f(\lambda) = \frac{\nabla y(T+1,\lambda)}{y(T+1,\lambda)}。$$

引理 2.1 $f(\lambda)$ 有如下性质

(i) $f(\lambda)$ 有 $T+1$ 个分支，表示为 ℓ_k ($k = 0,1,\cdots,T$)，且 ℓ_k ($k = 0,1,\cdots,T-1$)与 λ 轴相交于 $\lambda = \lambda_k^N$。

(ii) 在区间 $\lambda \in \left(\lambda_k^D, \lambda_{k+1}^D\right)$ 内，$f(\lambda)$ 是严格单调递减的，其中 $k = 0,1,\cdots,T$。

(iii) 对于 $k = 0,1,\cdots,T-1$，当 $\lambda \downarrow \lambda_k^D$ 时，$f(\lambda) \to +\infty$，当 $\lambda \uparrow \lambda_k^D$ 时，$f(\lambda) \to -\infty$，当 $\lambda \to \pm\infty$ 时，$f(\lambda) \to 1$。

第二个函数

为方便，记 $C(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3$，$D(\lambda) = \lambda^3$，我们有如下的引理成立。

引理 2.2 若条件(A3)成立，则 $C(\lambda)$ 与 $D(\lambda)$ 各有一个实根，且根互不相同。

引理 2.3 ([9]，引理 2.4)假设(A1)和(A2)成立，如果 $\lambda \in \left(\lambda_{k-1}^D, \lambda_k^D\right)$，其中 $k = 0,1,\cdots,T$，则问题(1)和(2)的解在 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 k 次。

由引理 2.2 可知，$D(\lambda)$ 有一个三重根 $\mu = 0$，$C(\lambda)$ 有一个根，令 $C(\lambda)$ 的根为 ξ，再令

令

$$g(\lambda) = \frac{C(\lambda)}{D(\lambda)}, \quad \lambda \ne 0。$$

我们知道，求由(1) (2) (3)构成的问题的特征值即为求解 $f(\lambda) = g(\lambda)$ 的根，因此，我们需要知道 $g(\lambda)$

的性质。由于 $D(\mu)=0$，故 $\lambda=\mu=0$ 是 $g(\lambda)$ 的垂直渐近线。$C(\xi)=0$，故 $\lambda=\xi$ 是 $g(\lambda)$ 的一个零点。因此 $g(\lambda)$ 的图像被分为两段，令 $\hbar_0$ 表示左分支，令 $\hbar_1$ 表示右分支，且

$$g'(\lambda)=\frac{-3c_0-2c_1\lambda-c_2\lambda^2}{\lambda^4}。$$

根据条件(A3)，有 $g'(\lambda)\ge 0$，故当 $\lambda\in(-\infty,0)$ 与 $\lambda\in(0,+\infty)$ 时，$g(\lambda)$ 是单调增函数，且有

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(\lambda)=c_3，\quad \lim_{\lambda\to 0^-} g(\lambda)=+\infty，\quad \lim_{\lambda\to 0^+} g(\lambda)=-\infty。$$

3. 主要结论

假设 μ 与 $f(\lambda)$ 的第 K 个分支相交，ξ 与 $g(\lambda)$ 的第 L 个分支相交，有

$$\lambda_{K-1}^D<\mu\le\lambda_K^D，\quad \lambda_{L-1}^D<\xi\le\lambda_L^N。$$

由 $g(\lambda)$ 的性质，可知，当 $c_3>0$ 时，$K\le L$；当 $c_3<0$ 时，$L\le K+1$。

定理 3.1 假设(A1)~(A3)成立。当 $c_3>1$ 时，问题(1)~(3)有 $T+1$ 个实的特征值，这些特征值以及相应的特征函数 $y_k(t)$ 满足如下的性质：

(a) 当 $K=0$ 时，特征值 $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=0}^{\kappa=T}$ 满足如下的不等式

$$\begin{aligned}&\lambda_0^N<\lambda_0\le\lambda_0^D<\lambda_1^N<\lambda_1<\lambda_1^D<\cdots<\lambda_{L-1}^N<\lambda_{L-1}<\lambda_{L-1}^D<\lambda_L\\&\le\lambda_L^N<\lambda_L^D<\cdots<\lambda_{T-1}<\lambda_{T-1}^N<\lambda_{T-1}^D<\lambda_T\end{aligned}\tag{4}$$

当 $\mu=\lambda_0^D$ 时，$\lambda_0=\lambda_0^D$；当 $\xi=\lambda_L^N$ 时，$\lambda_L=\lambda_L^N$。特征值 λ_k 所对应的特征函数 $y_k(t)$ 在区间 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 k 次。

(b) 当 $1\le K\le T$ 时，特征值 $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=1}^{\kappa=T+1}$ 满足如下的不等式

$$\begin{aligned}&\lambda_0^D<\lambda_1<\lambda_1^N<\lambda_1^D<\cdots<\lambda_{K-1}^D<\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}\le\lambda_K^D<\cdots<\lambda_{L-1}^N<\lambda_L\\&<\lambda_{L-1}^D<\lambda_{L+1}\le\lambda_L^N<\lambda_L^D<\cdots<\lambda_T<\lambda_{T-1}^N<\lambda_{T-1}^D<\lambda_{T+1}\end{aligned}\tag{5}$$

当 $\mu=\lambda_K^D$ 时，$\lambda_{K+1}=\lambda_K^D$；当 $\xi=\lambda_L^N$ 时，$\lambda_{L+1}=\lambda_L^N$。特征值 λ_k 所对应的特征函数 $y_k(t)$ 有：当 $k\le K$ 时，在区间 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 k 次；当 $k>K$ 时，在区间 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 $k-1$ 次。

证明：(a) 由于 $c_3>1$ 以及 $K=0$，可知 $\hbar_0$ 与 ℓ_i 没有交点。当 $i=0$ 时，如果 $\mu<\lambda_0^D$，则 ℓ_0 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的下半部分相交，有 $\lambda_0^N<\lambda_0<\lambda_0^D$，如果 $\mu=\lambda_0^D$，则 $\lambda_0^N<\lambda_0=\lambda_0^D$；当 $i=1,\cdots,L-1$ 时，有 ℓ_i 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的下半部分相交，有 $\lambda_i^N<\lambda_i<\lambda_i^D$；当 $i=L$ 时，如果 $\xi<\lambda_L^N$ 时，有 ℓ_L 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的上半部分相交，有 $\lambda_L<\lambda_L^N<\lambda_L^D$，如果 $\xi=\lambda_L^N$ 时，有 $\lambda_L=\lambda_L^N<\lambda_L^D$；当 $i=L+1,\cdots,T$ 时，ℓ_i 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的上半部分相交，有 $\lambda_i<\lambda_i^N<\lambda_i^D$ 故不等式(4)成立。

(b) 由于 $c_3>1$ 以及 $1\le K\le T$，可知 ℓ_0 与 $g(\lambda)$ 的图像没有交点，当 $i=1,\cdots,K-1$ 时，ℓ_i 与 $\hbar_0$ 在 λ 轴的上半部分相交，即 $\lambda_i<\lambda_i^N<\lambda_i^D$；当 $i=K$ 时，如果 $\mu<\lambda_K^D$ 时，有 ℓ_K 与 $\hbar_0$ 在 λ 轴的上半部相交，与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的下半部分相交，有 $\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}<\lambda_K^D$，如果 $\mu=\lambda_K^D$ 时，有 $\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}=\lambda_K^D$；当 $i=K+1,\cdots,L-1$ 时，有 ℓ_i 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的下半部分相交，有 $\lambda_i^N<\lambda_{i+1}<\lambda_i^D$；当 $i=L$ 时，如果 $\xi<\lambda_L^N$ 时，有 ℓ_L 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的上半部分相交，有 $\lambda_{L+1}<\lambda_L^N<\lambda_L^D$，如果 $\xi=\lambda_L^N$ 时，有 $\lambda_{L+1}=\lambda_L^N<\lambda_L^D$；当 $i=L+1,\cdots,T$ 时，ℓ_i 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的上半部分相交，有 $\lambda_{i+1}<\lambda_i^N<\lambda_i^D$ 故不等式(5)成立。

定理 3.2 假设(A1)~(A3)成立。当 $c_3=1$ 时，问题(1)~(3)有 T 个实的特征值，这些特征值以及相应的特征函数 $y_k(t)$ 满足如下的性质：

(a) 当 $K=0$ 时，特征值 $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=0}^{\kappa=T-1}$ 满足如下的不等式

$$\begin{aligned}&\lambda_0^N<\lambda_0\le\lambda_0^D<\lambda_1^N<\lambda_1<\lambda_1^D<\cdots<\lambda_{L-1}^N<\lambda_{L-1}<\lambda_{L-1}^D<\lambda_L\\&\le\lambda_L^N<\lambda_L^D<\cdots<\lambda_{T-1}<\lambda_{T-1}^N<\lambda_{T-1}^D\end{aligned}\tag{6}$$

当 $\mu=\lambda_0^D$ 时，$\lambda_0=\lambda_0^D$；当 $\xi=\lambda_L^N$ 时，$\lambda_L=\lambda_L^N$。特征值 λ_k 所对应的特征函数 $y_k(t)$ 在区间 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 k 次。

(b) 当 $1\le K\le T$ 时，特征值 $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=1}^{\kappa=T}$ 满足如下的不等式

$$\begin{aligned}&\lambda_0^D<\lambda_1<\lambda_1^N<\lambda_1^D<\cdots<\lambda_{K-1}^D<\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}\le\lambda_K^D<\cdots<\lambda_{L-1}^N\\&<\lambda_L<\lambda_{L-1}^D<\lambda_{L+1}\le\lambda_L^N<\lambda_L^D<\cdots<\lambda_T<\lambda_{T-1}^N<\lambda_{T-1}^D\end{aligned}\tag{7}$$

当 $\mu=\lambda_K^D$ 时，$\lambda_{K+1}=\lambda_K^D$；当 $\xi=\lambda_L^N$ 时，$\lambda_{L+1}=\lambda_L^N$。特征值 λ_k 所对应的特征函数 $y_k(t)$ 有：当 $k\le K$ 时，在区间 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 k 次；当 $k>K$ 时，在区间 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 $k-1$ 次。

证明：(a) 由于 $c_3=1$ 以及 $K=0$，可知 $\hbar_0$ 与 ℓ_i 没有交点且 ℓ_T 与 $g(\lambda)$ 的图像没有交点。

(b) 由于 $c_3=1$ 以及 $1\le K\le T-1$，可知 ℓ_0 和 ℓ_T 均与 $g(\lambda)$ 的图像没有交点。当 $K=T$ 时，知 $\hbar_1$ 与 ℓ_i 均没有交点，ℓ_0 与 $g(\lambda)$ 的图像没有交点。

其余分支 ℓ_i 与 $g(\lambda)$ 相交的情况同定理 3.1，故不等式(6)和(7)成立。

定理 3.3 假设(A1)~(A3)成立。当 $0<c_3<1$ 时，问题(1)~(3)有 $T+1$ 个实的特征值，这些特征值以及相应的特征函数 $y_k(t)$ 满足如下的性质：

(a) 当 $0\le K\le T-1$ 时，特征值 $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=0}^{\kappa=T}$ 满足如下的不等式

$$\begin{aligned}&\lambda_0<\lambda_0^N<\lambda_0^D<\lambda_1<\lambda_1^N<\lambda_1^D<\cdots<\lambda_{K-1}^D<\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}\le\lambda_K^D<\cdots\\&<\lambda_{L-1}^N<\lambda_L<\lambda_{L-1}^D<\lambda_{L+1}\le\lambda_L^N<\lambda_L^D<\cdots<\lambda_T<\lambda_{T-1}^N<\lambda_{T-1}^D\end{aligned}\tag{8}$$

当 $\mu=\lambda_K^D$ 时，$\lambda_{K+1}=\lambda_K^D$；当 $\xi=\lambda_L^N$ 时，$\lambda_{L+1}=\lambda_L^N$。特征值 λ_k 所对应的特征函数 $y_k(t)$ 有：当 $k\le K$ 时，在区间 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 k 次；当 $k>K$ 时，在区间 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 $k-1$ 次。

(b) 当 $K=T$ 时，特征值 $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=0}^{\kappa=T}$ 满足如下的不等式

$$\lambda_0<\lambda_0^N<\lambda_0^D<\lambda_1<\lambda_1^N<\lambda_1^D<\cdots<\lambda_{T-2}^D<\lambda_{T-1}<\lambda_{T-1}^N<\lambda_{T-1}^D<\lambda_T\tag{9}$$

特征值 λ_k 所对应的特征函数 $y_k(t)$ 在区间 $[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$ 上变号 k 次。

证明：(a) 因为 $0<c_3<1$ 以及 $0\le K\le T-1$，可知 ℓ_T 与 $g(\lambda)$ 的图像没有交点。当 $i=0,1,\cdots,K-1$ 时，ℓ_i 与 $\hbar_0$ 在 λ 轴的上半部分相交，即 $\lambda_i<\lambda_i^N<\lambda_i^D$；当 $i=K$ 时，如果 $\mu<\lambda_K^D$ 时，有 ℓ_K 与 $\hbar_0$ 在 λ 轴的上半部相交，与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的下半部分相交，有 $\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}<\lambda_K^D$，如果 $\mu=\lambda_K^D$ 时，有 $\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}=\lambda_K^D$；当 $i=K+1,\cdots,L-1$ 时，有 ℓ_i 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的下半部分相交，有 $\lambda_i^N<\lambda_{i+1}<\lambda_i^D$；当 $i=L$ 时，如果 $\xi<\lambda_L^N$ 时，有 ℓ_L 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的上半部分相交，有 $\lambda_{L+1}<\lambda_L^N<\lambda_L^D$，如果 $\xi=\lambda_L^N$ 时，有 $\lambda_{L+1}=\lambda_L^N<\lambda_L^D$；当 $i=L+1,\cdots,T-1$ 时，ℓ_i 与 $\hbar_1$ 在 λ 轴的上半部分相交，有 $\lambda_{i+1}<\lambda_i^N<\lambda_i^D$ 故不等式(8)成立。

(b) 因为 $0<c_3<1$ 以及 $K=T$，可知 $\hbar_1$ 与 ℓ_i 没有交点，$\hbar_0$ 与每一个分支 ℓ_i 均有一个交点，且在 λ 轴的上半部分相交，即 $\lambda_i<\lambda_i^N<\lambda_i^D$，故不等式(9)成立。

定理 3.4 假设(A1)~(A3)成立。当 $c_3<0$ 时，问题(1)~(3)有 $T+1$ 个实的特征值 $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=0}^{\kappa=T}$，这些特征值以及相应的特征函数 $y_k(t)$ 满足如下的性质：

(a)当 $0\le K\le T-1$ 时，特征值 $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=0}^{\kappa=T}$ 满足如下的不等式

$$\begin{aligned}&\lambda_0^N<\lambda_0<\lambda_0^D<\lambda_1^N<\lambda_1<\lambda_1^D<\cdots<\lambda_{L-1}^N<\lambda_{L-1}<\lambda_{L-1}^D<\lambda_L\le\lambda_L^N<\lambda_L^D<\cdots\\&<\lambda_{K-1}^D<\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}\le\lambda_K^D<\cdots<\lambda_{T-1}^N<\lambda_T<\lambda_{T-1}^D\end{aligned}\tag{10}$$

当 $\mu=\lambda_K^D$ 时，$\lambda_{K+1}=\lambda_K^D$；当 $\xi=\lambda_L^N$ 时，$\lambda_L=\lambda_L^N$。特征值 λ_k 所对应的特征函数 $y_k(t)$ 有：当 $k\le K$ 时，

在区间$[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$上变号k次；当$k>K$时，在区间$[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$上变号$k-1$次。

(b) 当$K=T$时，特征值$\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=0}^{\kappa=T}$满足如下的不等式

$$\begin{aligned}&\lambda_0^N<\lambda_0<\lambda_0^D<\lambda_1^N<\lambda_1<\lambda_1^D<\cdots<\lambda_{L-1}^N<\lambda_{L-1}<\lambda_{L-1}^D<\lambda_L\\&\le\lambda_L^N<\lambda_L^D<\cdots<\lambda_{T-2}^D<\lambda_{T-1}<\lambda_{T-1}^N<\lambda_{T-1}^D<\lambda_T\end{aligned}\tag{11}$$

当$\xi=\lambda_L^N$时，$\lambda_L=\lambda_L^N$。特征值λ_k所对应的特征函数$y_k(t)$在区间$[1,T+1]_{\mathbb{Z}}$上变号k次。

证明：(a) 由$c_3<0$以及$0\le K\le T-1$，可知ℓ_T与$g(\lambda)$没有交点。当$i=0,1,\cdots,L-1$时，ℓ_i与h_0在λ轴的下半部分相交，即$\lambda_i^N<\lambda_i<\lambda_i^D$；当$i=L$时，如果$\xi<\lambda_L^N$，有$\lambda_L<\lambda_L^N<\lambda_L^D$，如果$\xi=\lambda_L^N$时，则$\lambda_L=\lambda_L^N<\lambda_L^D$；当$i=L+1,\cdots,K-1$时，$\ell_i$与$h_0$在$\lambda$轴的上半部分相交，即$\lambda_i<\lambda_i^N<\lambda_i^D$；当$i=K$时，如果$\mu<\lambda_K^D$时，有$\ell_K$与$h_0$在$\lambda$轴的上半部相交，与$h_1$在$\lambda$轴的下半部分相交，有$\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}<\lambda_K^D$，如果$\mu=\lambda_K^D$时，有$\lambda_K<\lambda_K^N<\lambda_{K+1}=\lambda_K^D$；当$i=K+1,\cdots,T-1$时，则$\ell_i$与$h_1$在$\lambda$轴的下半部分相交，故有$\lambda_i^N<\lambda_{i+1}<\lambda_i^D$。故不等式(10)成立。

(b) 由于$K=T$，故h_1与ℓ_i没有交点。当$i=0,1,\cdots,L-1$时，ℓ_i与h_0在λ轴的下半部分相交，有$\lambda_i^N<\lambda_i<\lambda_i^D$；当$i=L$时，如果$\xi<\lambda_L^N$，则有$\lambda_L<\lambda_L^N<\lambda_L^D$，如果$\xi=\lambda_L^N$时，则$\lambda_L=\lambda_L^N<\lambda_L^D$；当$i=L+1,\cdots,T$时，$\ell_i$与$h_0$在$\lambda$轴的上半部分相交，有$\lambda_i<\lambda_i^N<\lambda_i^D$故不等式(11)成立。

4. 例子

我们给出一个满足条件的例子。

例 考虑如下的问题

$$-\nabla(\Delta y(t))=\lambda y(t),\quad t\in[1,3]_{\mathbb{Z}}\tag{12}$$

$$y(0)=0,\quad(-1+3\lambda-3\lambda^2+\lambda^3)y(T+1)=\lambda^3\nabla y(T+1).\tag{13}$$

根据文献[6]的证明方法，我们将问题(12)以及边界条件(13)转换为矩阵形式，有

$$A_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda-2&1&0&0\\1&\lambda-2&1&0\\0&1&\lambda-2&1\\0&0&\lambda^3&-1+3\lambda-3\lambda^2\end{pmatrix},$$

则$|A_\lambda|=0$的根为问题(12)~(13)的特征值，通过计算可知该问题满足条件(A1)~(A3)。我们知道$|A_\lambda|=0$即为$p(\lambda)=-4\lambda^5+25\lambda^4-52\lambda^3+48\lambda^2-22\lambda+4=0$，有三个实根$\lambda_0\approx0.4662$，$\lambda_1\approx1.5395$以及$\lambda_2\approx3.2033$。

我们给出问题(12)以及Dirichlet边界条件$y(0)=y(4)=0$的特征值，将问题转换为矩阵形式为

$$A_\lambda^D=\begin{pmatrix}\lambda-2&1&0\\1&\lambda-2&1\\0&1&\lambda-2\end{pmatrix},$$

其特征值为$\lambda_0^D\approx0.5858$，$\lambda_1^D\approx2.0000$以及$\lambda_2^D\approx3.4142$。

另外我们给出问题(12)以及Neumann边界条件$y(0)=\nabla y(4)=0$的特征值，将问题转换为矩阵形式为

$$A_\lambda^N=\begin{pmatrix}\lambda-2&1&0\\1&\lambda-2&1\\0&1&\lambda-1\end{pmatrix},$$

其特征值为$\lambda_0^N\approx0.1981$，$\lambda_1^N\approx1.5550$以及$\lambda_2^N\approx3.2470$。

因此三个边界条件的特征值之间有如下的不等式：

$$\lambda_0^N < \lambda_0 < \lambda_0^D < \lambda_1 < \lambda_1^N < \lambda_1^D < \lambda_2 < \lambda_2^N < \lambda_2^D。$$

我们知道 $c_3 = 1$， $\mu = 0$ 以及 $\xi = 1$， 则 $K = 0$， $L = 1$，故上述不等式满足不等式(6)。

下面证明特征函数的变号次数。

不失一般性，我们假设 $y(1) = 1$，则该问题的特征函数为 $y(t,\lambda) = (2-\lambda)y(t-1,\lambda) - y(t-2,\lambda)$，其中 $t = 2,3,4$ 即有

$$\begin{aligned}
&\{y(1,\lambda_0), y(2,\lambda_0), y(3,\lambda_0), y(4,\lambda_0)\} \approx \{1, 1.5338, 1.3525, 0.5407\} \\
&\{y(1,\lambda_1), y(2,\lambda_1), y(3,\lambda_1), y(4,\lambda_1)\} \approx \{1, 0.4605, -0.7879, -0.8233\} \\
&\{y(1,\lambda_2), y(2,\lambda_2), y(3,\lambda_2), y(4,\lambda_2)\} \approx \{1, -1.2033, 0.4479, 0.6643\}
\end{aligned} \tag{14}$$

根据(14)我们知道 $y_k(t)$ 在区间 $[1,4]_{\mathbb{Z}}$ 上，变号k次，与定理3.2(a)的结论相同。

基金项目

国家自然科学基金项目(11661059)，内蒙古自然科学基金项目(2017MS(LH)0103)资助。

参考文献

[1] Gao, C.H., Li, X.L. and Zhang, F. (2018) Eigenvalues of Discrete Sturm-Liouville Problems with Nonlinear Eigenparameter Dependent Boundary Conditions. *Questiones Mathematicae*, **41**, 773-797. https://doi.org/10.2989/16073606.2017.1401014

[2] 李梦如. 离散 Sturm-Liouville 问题特征值的迹公式[J]. 数学物理学报, 1992: 303-307.

[3] Jirari, A. (1995) Second-Order Sturm-Liouville Difference Equations and Orthogonal Polynomials. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **113**. https://doi.org/10.1090/memo/0542

[4] Walter, G.K. and Allan, C.P. (2000) Difference Equations: An Introduction with Applications. 2th Edition, Academic Press, New York.

[5] Zhu, H. and Ming, Y.M. (2018) Inequalities among Eigenvalues of Different Self-Adjoint Discrete Sturm-Liouville Problems. *Mathematical Inequalities and Applications*, **21**, 649-681. https://doi.org/10.7153/mia-2018-21-47

[6] Harmsen, B.J. and Li, A. (2002) Discrete Sturm-Liouville Problems with Parameter in the Boundary Conditions. *Journal of Differentce Equations and Applications*, **8**, 969-981. https://doi.org/10.1080/1023619021000048869

[7] Harmsen, B.J. and Li, A. (2007) Discrete Sturm-Liouville Problems with Nonlinear Parameter in the Boundary Consitions. *Journal of Difference Equations and Applications*, **13**, 639-653. https://doi.org/10.1080/10236190701264966

[8] Gao, C.H. (2014) On the Linear and Nonlinear Discrete Second-Order Neumann Boundary Value Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **233**, 62-71. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.01.112

[9] Gao, C.H. and Ma, R.Y. (2016) Eigenvalues of Discrete Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions. *Linear Algevra and Its Applications*, **503**, 100-119. https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.03.043

[10] Atkinson, F.V. (1964) Discrete and Continuous Boundary Problems. *Physics Today*, **17**, 84. https://doi.org/10.1063/1.3051875