Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(12), 1943-1952
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.812223

Hans汉斯

High Energy solutions of Forth-Order Elliptic Systems Involving Nonlocal Term and Sign-Changing Potential

Yawen Qian, Gao Jia

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: gaojia89@163.com, 1270939700@qq.com

Received: Nov. 12th, 2019; accepted: Dec. 2nd, 2019; published: Dec. 9th, 2019

Abstract

This paper focus on the following forth-order elliptic equations involving non-local terms and sign-changing potential

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \Delta u - \int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\left(\Delta u + u\Delta\left(u^2\right)\right) + V(x)u = F_u(x,u,v), & x\in\mathbb{R}^3 \\ \Delta^2 v - \Delta v - \int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2v^2\right)|\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x\left(\Delta v + v\Delta\left(v^2\right)\right) + V(x)v = F_v(x,u,v), & x\in\mathbb{R}^3 \\ u(x)\to 0,\quad v(x)\to 0,\quad |x|\to\infty \end{cases}$$

Where $\Delta^2=\Delta(\Delta)$ **is the biharmonic operator,** $V(x)\in C\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$, $F(x,u,v)\in C^1\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$. $V(x)$ **is sign-changing function,** $F_u=\dfrac{\partial F}{\partial u}, F_v=\dfrac{\partial F}{\partial v}$. **Under certain conditions, it's proved that there are infinitely many high-energy solutions to the problem using Fountain Theorem.**

Keywords

Biharmonic, Non-Local Term, Sign-Changing Potential, High-Energy Solution

带有非局部项的四阶椭圆型方程组的无穷多高能量解的存在性

钱雅雯，贾　高

上海理工大学理学院，上海
Email: gaojia89@163.com, 1270939700@qq.com

收稿日期：2019年11月12日；录用日期：2019年12月2日；发布日期：2019年12月9日

文章引用: 钱雅雯, 贾高. 带有非局部项的四阶椭圆型方程组的无穷多高能量解的存在性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(12): 1943-1952. DOI: 10.12677/aam.2019.812223

摘　要

该文主要研究如下含变号位势和非局部项的四阶椭圆方程组

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\Delta u-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\left(\Delta u+u\Delta\left(u^2\right)\right)+V(x)u=F_u(x,u,v),\ x\in\mathbb{R}^3\\ \Delta^2 v-\Delta v-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2v^2\right)|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\left(\Delta v+v\Delta\left(v^2\right)\right)+V(x)v=F_v(x,u,v),\ x\in\mathbb{R}^3\\ u(x)\to 0,\quad v(x)\to 0,\quad |x|\to\infty\end{cases}$$

其中 $\Delta^2=\Delta(\Delta)$ 是重调和算子，$V(x)\in C\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$，$F(x,u,v)\in C^1\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$，$V(x)$ 为变号函数，$F_u=\frac{\partial F}{\partial u}, F_v=\frac{\partial F}{\partial v}$。在满足一定条件下，利用Fountain定理证明了该问题存在无穷多高能量解。

关键词

重调和，非局部项，变号位势，高能量解

1. 引言

本文将研究如下带有非局部项的四阶椭圆型方程组

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\Delta u-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\left(\Delta u+u\Delta\left(u^2\right)\right)+V(x)u=F_u(x,u,v),\ x\in\mathbb{R}^3\\ \Delta^2 v-\Delta v-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2v^2\right)|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\left(\Delta v+v\Delta\left(v^2\right)\right)+V(x)v=F_v(x,u,v),\ x\in\mathbb{R}^3\\ u(x)\to 0,\quad v(x)\to 0,\quad |x|\to\infty\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $\Delta^2=\Delta(\Delta)$ 是重调和算子，$V(x):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, F(x,u,v):\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 且 $F_u=\frac{\partial F}{\partial u}, F_v=\frac{\partial F}{\partial v}$。

本文假设 $V(x)$ 和 $F(x,s,t)$ 满足如下条件：

(V) $V(x)\in C\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right), \inf_{\mathbb{R}^3} V>-\infty$ 且对任意 $M>0$ 存在常数 $r>0$，使得

$$\lim_{|y|\to\infty}\operatorname{meas}\left\{x\in\mathbb{R}:|x-y|\le r, V(x)\le M\right\}=0;$$

(F_1) $F(x,u,v)\in C^1\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ 且存在 $C_1, C_2>0,\ p,q\in(8,+\infty)$ 使得

$$\left|F_u(x,u,v)\right|\le C_1\left(|(u,v)|+|(u,v)|^{p-1}\right),\left|F_v(x,u,v)\right|\le C_2\left(|(u,v)|+|(u,v)|^{q-1}\right)$$

其中 $|(u,v)|=\left(u^2+v^2\right)^{\frac{1}{2}}$；

(F_2) $\lim_{|(u,v)|\to\infty}\frac{F(x,u,v)}{|(u,v)|^8}=\infty$ 对任意 $x\in\mathbb{R}^3$ 一致成立，并且当 $(u,v)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ 时，$F(x,u,v)\ge 0$；

(F_3) 存在 $\alpha > 0$，使得对任意 $(x,u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，都有

$$uF_u(x,u,v) + vF_v(x,u,v) - 8F(x,u,v) \ge -\alpha |(u,v)|^2$$

(F_4) 对任意 $(x,u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，有 $F(x,-u,-v) = F(x,u,v)$。

Lazer-McKenna 在[1]中指出，四阶椭圆问题与悬索桥中的周期振动和行波等问题密切相关。近年来，许多学者广泛研究了四阶椭圆方程非平凡解的存在性和多重性，见文献[2] [3] [4]。Kirchhoff 模型考虑了由于弹性弦横向振动引起弦长度变化的因素。最近十年，Kirchhoff 类型的问题更是受到许多学者的重视，并得到了大量重要的结论，见文献[5] [6] [7]。特别地，Wu 在[8]和[9]中研究了一个带有非局部项的方程组问题，并得到了该问题具有无穷多高能量解。受到以上文献的启发，在本文中我们将研究问题(1.1)并得到其存在无穷多高能量解。

本文主要结论如下：

定理 1.1：假设条件(V)、(F_1)~(F_4)成立，则问题(1.1)存在无穷多高能量解。

符号：在本文中，我们用$\hookrightarrow$和$\hookrightarrow\hookrightarrow$分别表示连续嵌入和紧嵌入，用$\to$和$\rightharpoonup$分别表示强收敛和弱收敛，$C_i\,(i=1,2,\cdots)$ 表示合适的正常数。

2. 变分框架与预备引理

定义 Hilbert 空间 $H^m(\mathbb{R}^N)$ 及该空间的内积为

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N) \mid D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^N), |\alpha| \le m\right\}$$

和

$$\langle u,v\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha u D^\alpha v \mathrm{d}x,$$

并赋予范数

$$\|u\|_{H^m} = \langle u,v\rangle_{H^m}^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由条件(V)知，存在常数 $V_0 \ge 0$，使得对任意 $x \in \mathbb{R}^3$，都有 $\tilde{V}(x) = V(x) + V_0 \ge 1$。

下面定义空间

$$E = \left\{u \in H^2(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{V}(x) u^2 \mathrm{d}x < \infty\right\},$$

其范数定义为

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + \tilde{V}(x) u^2\right) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对任意的 $(u,v),(\varphi,\psi) \in E \times E$，在 $E \times E$ 上内积和范数分别定义为

$$\langle (u,v),(\varphi,\psi)\rangle = \langle u,\varphi\rangle + \langle v,\psi\rangle$$

和

$$\|(u,v)\| = \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $X = E \times E$，则对任意 $s \in (2,\infty)$，有 $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3) \times L^s(\mathbb{R}^3)$。令

$$\begin{aligned}\Phi(u,v)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\Delta u|^2+|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2\\&+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\Delta v|^2+|\nabla v|^2+V(x)v^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2v^2\right)|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^2-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u,v)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.1}$$

根据文献[10]中引理 2.2 知 $\int_{\mathbb{R}^3}u^2|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x$，结合假设(V)和($F_1$)知泛函 $\Phi(u,v)\in C^1(X,\mathbb{R})$。

对任意 $(\varphi,\psi)\in X$，有

$$\begin{aligned}&\langle\Phi'(u,v),(\varphi,\psi)\rangle\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\left(\Delta u\Delta\varphi+\nabla u\nabla\varphi+V(x)u\varphi\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla u\nabla\varphi+2u\varphi|\nabla u|^2+2u^2\nabla u\nabla\varphi\right)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\Delta v\Delta\psi+\nabla v\nabla\psi+V(x)v\psi\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2v^2\right)|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla v\nabla\psi+2v\psi|\nabla v|^2+2v^2\nabla v\nabla\psi\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\varphi F_u(x,u,v)+\psi F_v(x,u,v)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.2}$$

由变分理论知，泛函 $\Phi(u,v)$ 的临界点即为问题(1.1)的弱解。

定义 2.1：序列 $\{(u_n,v_n)\}\subset X$ 被称为 $(C)_c$ 序列当且仅当 $\{(u_n,v_n)\}$ 满足：当 $n\to\infty$ 时，有 $\Phi(u_n,v_n)\to c$ 且 $\|\Phi'(u_n,v_n)\|(1+\|(u_n,v_n)\|)\to 0$。若泛函 $\Phi(u_n,v_n)$ 对应的任意 $(C)_c$ 序列都有 X 中的强收敛子列，则称泛函 $\Phi(u_n,v_n)$ 满足 $(C)_c$ 条件。

引理 2.2：若假设(V)、(F_1)成立，则泛函 $\Phi(u_n,v_n)$ 对应的任意有界 $(C)_c$ 序列都有强收敛子列。

证明：令 $\{(u_n,v_n)\}\subset X$ 为泛函 $\Phi(u_n,v_n)$ 的任一有界 $(C)_c$ 序列，则有

$$\Phi(u_n,v_n)\to c,\ \|\Phi'(u_n,v_n)\|(1+\|(u_n,v_n)\|)\to 0\tag{2.3}$$

由于 $\|(u_n,v_n)\|<\infty$，则在 X 中存在弱收敛子列，不妨仍记为 $\{(u_n,v_n)\}$。因此存在 $(u,v)\in X$，使得

$$\begin{aligned}&(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v)\text{ 于 }X,\\&(u_n,v_n)\to(u,v)\text{ 于 }L^s(\mathbb{R}^3)\,(2\le s<+\infty),\\&(u_n,v_n)\to(u,v)\ a.e.\text{ 于 }\mathbb{R}^3\end{aligned}\tag{2.4}$$

通过计算可得

$$\begin{aligned}&\langle\Phi'(u_n,v_n)-\Phi'(u,v),(u_n-u,0)\rangle\\&=\|u_n-u\|^2-V_0\int_{\mathbb{R}^3}|u_n-u|^2\,\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla u_n\nabla(u_n-u)+2u_n(u_n-u)|\nabla u_n|^2+2u_n^2\nabla u_n\nabla(u_n-u)\right)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla u\nabla(u_n-u)+2u(u_n-u)|\nabla u|^2+2u^2\nabla u\nabla(u_n-u)\right)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\left(F_u(x,u_n,v_n)-F_u(x,u,v)\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\\&=\|u_n-u\|^2-V_0\int_{\mathbb{R}^3}|u_n-u|^2\,\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla u_n\nabla(u_n-u)+2u_n(u_n-u)|\nabla u_n|^2+2u_n^2\nabla u_n\nabla(u_n-u)\right)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla u\nabla(u_n-u)+2u(u_n-u)|\nabla u_n|^2+2u_n^2\nabla u\nabla(u_n-u)\right)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla u\nabla(u_n-u)+2u(u_n-u)|\nabla u_n|^2+2u_n^2\nabla u\nabla(u_n-u)\right)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla u\nabla(u_n-u)+2u(u_n-u)|\nabla u|^2+2u^2\nabla u\nabla(u_n-u)\right)\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\left(F_u(x,u_n,v_n)-F_u(x,u,v)\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

DOI: 10.12677/aam.2019.812223

$$
\begin{aligned}
&=\|u_n-u\|^2-V_0\int_{\mathbb{R}^3}|u_n-u|^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla(u_n-u)|^2+2|(u_n-u)|^2|\nabla u_n|^2+2u_n^2|\nabla(u_n-u)|^2\right)\mathrm{d}x\\
&\quad+\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u(u_n-u)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u(u_n-u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u_n^2\nabla u\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u^2\nabla u\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\left(F_u(x,u_n,v_n)-F_u(x,u,v)\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\\
&\geq\|u_n-u\|^2-V_0\int_{\mathbb{R}^3}|u_n-u|^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u(u_n-u)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u(u_n-u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u_n^2\nabla u\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u^2\nabla u\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}\left(F_u(x,u_n,v_n)-F_u(x,u,v)\right)(u_n-u)\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

由(2.3)和(2.4)知

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u_n-u|^2\mathrm{d}x\to 0,\left\langle\Phi'(u_n,v_n)-\Phi'(u,v),(u_n-u,0)\right\rangle\to 0$$

由$\|(u_n,v_n)\|<\infty$知，当$n\to\infty$时，有

$$\left|\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\to 0. \tag{2.6}$$

注意到，对于任意的$s\in[2,6]$，有$E\hookrightarrow H^2(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow W^{1,s}(\mathbb{R}^3)$，因此

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^3\mathrm{d}x&\leq\int_{\mathbb{R}^3}\left(|u_n|^2+\sum_{i=1}^3\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\\
&\leq 4^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|u_n|^3+\sum_{i=1}^3\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^3\right)\mathrm{d}x\\
&=2\|u_n\|_{W^{1,3}(\mathbb{R}^3)}^3\\
&\leq C\|u_n\|^3
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

结合(2.3)、(2.4)和(2.7)知，当$n\to\infty$时，有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u(u_n-u)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u(u_n-u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right|\\
&\leq\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u(u_n-u)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u(u_n-u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right|\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_n-u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}+C\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^3\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_n-u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}\\
&\leq C\|u_n-u\|_6\to 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

根据(2.4)以及 Hölder 不等式知，当$n\to\infty$时，有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)\left|\nabla u_n\right|^2 \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u_n^2\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)\left|\nabla u\right|^2 \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u^2\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\le\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)\left|\nabla u_n\right|^2 \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u_n^2\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u^2\right)\left|\nabla u\right|^2 \mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}2u^2\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\le C\left\|u_n^2\right\|_\infty\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\right|\mathrm{d}x+C\left\|u^2\right\|_\infty\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\right|\mathrm{d}x \\
&\le C\left\|u_n\right\|_\infty^2\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\right|\mathrm{d}x+C\left\|u\right\|_\infty^2\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\right|\mathrm{d}x \\
&\le C\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\right|\mathrm{d}x\to 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

由(F_1)、(2.4)和 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(F_u\left(x,u_n,v_n\right)-F_u\left(x,u,v\right)\right)\left(u_n-u\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\le C\int_{\mathbb{R}^3}\left(\left|\left(u_n,v_n\right)\right|+\left|\left(u_n,v_n\right)\right|^{p-1}+\left|\left(u,v\right)\right|+\left|\left(u,v\right)\right|^{p-1}\right)\left|u_n-u\right|\mathrm{d}x \\
&\le C\left(\left(\left\|\left(u_n,v_n\right)\right\|_2+\left\|\left(u,v\right)\right\|_2\right)\left\|u_n-u\right\|_{L^2}+\left(\left\|\left(u_n,v_n\right)\right\|_p^{p-1}+\left\|\left(u,v\right)\right\|_p^{p-1}\right)\left\|u_n-u\right\|_p\right) \\
&\to 0
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

综合上述讨论可以得到，在 E 中有 $u_n\to u\left(n\to\infty\right)$。类似可以得到，在 E 中有 $v_n\to v\left(n\to\infty\right)$。证毕。

引理 2.3：假设条件(V)、(F_1)、(F_3)~(F_5)成立，则泛函 Φ 的任意 $(C)_c$ 序列都有界。

证明：令 $\left\{\left(u_n,v_n\right)\right\}\subset X$ 并且满足

$$
\Phi\left(u_n,v_n\right)\to c,\ \left\|\Phi'\left(u_n,v_n\right)\right\|\left(1+\left\|\left(u_n,v_n\right)\right\|\right)\to 0. \tag{2.11}
$$

用反证法。若当 $n\to\infty$ 时，$\left\|\left(u_n,v_n\right)\right\|\to\infty$，则令 $\left(w_n,z_n\right)=\left(\dfrac{u_n}{\left\|\left(u_n,v_n\right)\right\|},\dfrac{v_n}{\left\|\left(u_n,v_n\right)\right\|}\right)$，显然 $\left\|\left(w_n,z_n\right)\right\|=1$。则在 X 中存在弱收敛子列(不妨仍记为 $\left\{\left(w_n,z_n\right)\right\}$)和 $\left(w,z\right)\in X$，使得

$$
\begin{aligned}
&\left(w_n,z_n\right)\rightharpoonup\left(w,z\right)\text{于}X, \\
&\left(w_n,z_n\right)\to\left(w,z\right)\text{于}L^s\left(\mathbb{R}^3\right)\left(2\le s<+\infty\right), \\
&\left(w_n,z_n\right)\to\left(w,z\right)\ a.e.\text{于}\mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

利用(F_3)、(2.1)、(2.2)及(2.11)，有

$$
\begin{aligned}
c+o(1)&=\Phi\left(u_n,v_n\right)-\frac{1}{8}\left\langle\Phi'\left(u_n,v_n\right),\left(u_n,v_n\right)\right\rangle \\
&=\frac{3}{8}\left\|\left(u_n,v_n\right)\right\|^2-\frac{3}{8}V_0\int_{\mathbb{R}^3}\left|\left(u_n,v_n\right)\right|^2\mathrm{d}x \\
&\quad+\frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2u_n^2\right)\left|\nabla u_n\right|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla u_n\right|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+2v_n^2\right)\left|\nabla v_n\right|^2\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla v_n\right|^2\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{8}\left(u_nF_u\left(x,u_n,v_n\right)-v_nF_v\left(x,u_n,v_n\right)\right)-F\left(x,u_n,v_n\right)\right)\mathrm{d}x \\
&\ge\frac{3}{8}\left\|\left(u_n,v_n\right)\right\|^2-\frac{\alpha+3V_0}{8}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\left(u_n,v_n\right)\right|^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

显然，从上式可得 $\left\|\left(w_n,z_n\right)\right\|_2\ne 0$。设 $\Theta:=\left\{x\in\mathbb{R}^3:\left(w,z\right)\ne 0\right\}$，故 $\operatorname{meas}\left(\Theta\right)>0$。对 $x\in\Theta$，当 $n\to\infty$ 时，有 $\left|\left(u_n,v_n\right)\right|\to\infty$。由($F_2$)知，对于 $x\in\Theta$，有

DOI: 10.12677/aam.2019.812223

$$\frac{F(x,u_n,v_n)}{|(u_n,v_n)|^8}|(w_n,z_n)|^8 \to +\infty, \quad n\to\infty,$$

由 Fatou 引理知

$$\int_\Theta \frac{F(x,u_n,v_n)}{|(u_n,v_n)|^8}|(w_n,z_n)|^8 \mathrm{d}x \to +\infty, \quad n\to\infty \tag{2.13}$$

因此，利用(2.11)和(2.13)式，条件(F_1)、(F_4)及$\|(w_n,z_n)\|=1$可得

$$\begin{aligned}
&\frac{c+o(1)}{\|(u_n,v_n)\|^8}=\frac{\Phi(u_{n,v})}{\|(u_n,v_n)\|^8}\\
&=\frac{1}{\|(u_n,v_n)\|^8}\Bigg(\frac12\|(u_n,v_n)\|^2+\frac14\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+2u_n^2)|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^2+\frac14\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+2v_n^2)|\nabla v_n|^2\mathrm{d}x\right)^2\\
&\quad-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u_n,v_n)\mathrm{d}x-\frac{V_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|(u_n,v_n)|^2\mathrm{d}x\Bigg)\\
&\le\frac{1}{2\|(u_n,v_n)\|^6}+\frac14\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\|(u_n,v_n)\|^2}+\frac{2u_n^2}{\|(u_n,v_n)\|^2}\right)\frac{|\nabla u_n|^2}{\|(u_n,v_n)\|^2}\mathrm{d}x\right)^2\\
&\quad+\frac14\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\|(u_n,v_n)\|^2}+\frac{2v_n^2}{\|(u_n,v_n)\|^2}\right)\frac{|\nabla v_n|^2}{\|(u_n,v_n)\|^2}\mathrm{d}x\right)^2-\int_\Theta\frac{F(x,u_n,v_n)}{|(u_n,v_n)|^8}|(w_n,z_n)|^8\mathrm{d}x\\
&\le\frac{1}{2\|(u_n,v_n)\|^6}+\frac14\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\|(u_n,v_n)\|^2}+2w_n^2\right)|\nabla w_n|^2\mathrm{d}x\right)^2\\
&\quad+\frac14\left(\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\|(u_n,v_n)\|^2}+2z_n^2\right)|\nabla z_n|^2\mathrm{d}x\right)^2-\int_\Theta\frac{F(x,u_n,v_n)}{|(u_n,v_n)|^8}|(w_n,z_n)|^8\mathrm{d}x\\
&\to-\infty\ (n\to\infty)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

显然上式是矛盾的。因此$\{(u_n,v_n)\}$在X中有界。证毕。

下面引理是证明定理 1.1 的主要依据。

引理 2.4 (Fountain 定理)：设H是一个实 Banach 空间，并且$H=\overline{\bigoplus_{j\in N}H_j}$，对任意的$j\in\mathbb{N}$，有$\dim(H_j)<\infty$。令

$$Y_k=\bigoplus_{j=1}^{k}H_j,\quad Z_k=\overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty}H_j},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

设$\phi\in C^1(H,\mathbb{R})$是一个偶泛函。若对任意的$k\in\mathbb{N}$，都存在$\rho_k>r_k>0$，使得

(ϕ_1) $a_k:=\max\limits_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}\phi(u)\le 0$；

(ϕ_2) $b_k:=\inf\limits_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}\phi(u)\to\infty, k\to\infty$；

(ϕ_3) 对任意$c>0$，ϕ满足$(C)_c$条件；

则ϕ存在无界临界值序列。

3. 定理 1.1 的证明

令 $\{e_j\}$ 是 E 的一组正交基，定义 $H_j=\mathbb{R}e_j$，则 $E=H=Y_k\oplus z_k, X=(Y_k\times Y_k)\oplus(Z_k\times Z_k)$。

那么我们有下面的引理：

引理 3.1： 若条件(V)成立，则对 $2\le s<\infty$，当 $k\to\infty$ 时，有

$$\beta_k(s)=\sup_{(u,v)\in Z_k\times Z_k,\|(u,v)\|=1}\|(u,v)\|_s\to 0. \tag{3.1}$$

证明： 由 $Z_{k+1}\subset Z_k$ 知，$0<\beta_{k+1}<\beta_k$。因此，存在 $\beta\ge 0$，使得当 $k\to\infty$ 时，有 $\beta_k\to\beta$。对每一个 $k\ge 0$，都存在 $(u_k,v_k)\in Z_k\times Z_k$，使得 $\|(u_k,v_k)\|=1$ 且 $\|(u_k,v_k)\|_s>\frac{\beta_k}{2}$。由 Z_k 的定义知，在 E 中 $u_k\rightharpoonup 0$。再由 Sobolev 嵌入定理知，对 $2\le s<\infty$，有 $u_k\to 0$ 于 $L^s(\mathbb{R}^3)$。同理可得对 $2\le s<\infty$，有 $v_k\to 0$ 于 $L^s(\mathbb{R}^3)$。因此，当 $k\to\infty$ 时，有 $\beta_k(s)\to 0$。证毕。

引理 3.2： 假设条件(V)、(F_1)成立，则存在 $r_k>0$，使得当 $k\to\infty$ 时，有 $\inf_{(u,v)\in Z_k\times Z_k,\|(u,v)\|=r_k}\Phi(u,v)\to\infty$。

证明： 由(2.1)和(F_1)知，对任意 $(u,v)\in X$，有

$$\begin{aligned}\Phi(u,v)&=\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2+\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+2u^2)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+2v^2)|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\quad-\frac{V_0}{2}\|(u,v)\|_2^2-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u,v)\,\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{V_0}{2}\|(u,v)\|_2^2-\int_{\mathbb{R}^3}C\left(|(u,v)|^2+|(u,v)|^p+|(u,v)|^q\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\frac{V_0+C}{2}\|(u,v)\|_2^2-C\left(\|(u,v)\|_p^p+\|(u,v)\|_p^p\right)\end{aligned}\tag{3.2}$$

根据引理 3.1 知

$$\begin{aligned}\|(u,v)\|_2^2&\le\beta_k^2(2)\|(u,v)\|^2,\\\|(u,v)\|_p^p&\le\beta_k^p(p)\|(u,v)\|^p,\\\|(u,v)\|_q^q&\le\beta_k^q(q)\|(u,v)\|^q\end{aligned}$$

因此

$$\Phi(u,v)\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{V_0+C}{2}\beta_k^2(2)\right)\|(u,v)\|^2-C\beta_k^p(p)\|(u,v)\|^p-C\beta_k^q(q)\|(u,v)\|^q.$$

由于当 $k\to\infty$ 时，有 $\beta_k(2)\to 0$，结合引理 3.1 知，存在 $k_1\in\mathbb{N}$，使得当 $k\ge k_1$ 时，有

$$\frac{V_0+C}{2}\beta_k^2(2)\le\frac{1}{4}.$$

故当 $k\ge k_1$ 时，有

$$\Phi(u,v)\ge\frac{1}{4}\|(u,v)\|^2-C\beta_k^p(p)\|(u,v)\|^p-C\beta_k^q(q)\|(u,v)\|^q.$$

取 $r_k=\left(\frac{p}{8C\left(\beta_k^p(p)+\beta_k^q(q)\right)}\right)^{\frac{1}{\max\{p,q\}-2}}$，由引理 3.1 知，当 $k\to\infty$ 时，有 $r_k\to 0$。这样，若 $(u,v)\in Z_k\times Z_k$

且$\|u\|=r_k$，则当时$k\to\infty$，有

$$\Phi(u,v)\geq\frac{1}{4}\|(u,v)\|^2-C\beta_k^p(p)\|(u,v)\|^p-C\beta_k^q(q)\|(u,v)\|^q\geq\frac{1}{8}r_k^2\to\infty.$$

证毕。

引理 3.3： 假设条件(V)、(F₁)、(F₃)成立，则存在$\rho_k>0$，使得$\max_{(u,v)\in Y_k\times Y_k,\|(u,v)\|=\rho_k}\Phi(u)\leq 0$。

证明： 根据有限维空间的范数等价性知，对任意$(u,v)\in Y_k\times Y_k$，存在$\tau_k>0$，使得

$$\|(u,v)\|^2\leq\tau_k\|(u,v)\|_8^2. \tag{3.3}$$

由(F_2)知，对任意的$\mu>0$，都存在$R_\mu>0$，使得对任意$|(u,v)|\geq R_\mu$，有

$$F(x,u,v)\geq\mu|(u,v)|^8.$$

由(F_1)知，当$x\in\mathbb{R}^3$且满足$|(u(x),v(x))|\leq R_\mu$时，有

$$\begin{aligned}F(x,u,v)&\geq-C\left(|(u,v)|^2+|(u,v)|^p+|(u,v)|^q\right)\\&\geq-C\left(|(u,v)|^2+R_\mu^{p-2}|(u,v)|^2+R_u^{q-2}|(u,v)|^2\right)\\&\geq\mu|(u,v)|^2\left(|(u,v)|^6-R_\mu^6\right)-C\left(|(u,v)|^2+R_\mu^{p-2}|(u,v)|^2+R_\mu^{q-2}|(u,v)|^2\right)\\&=\mu|(u,v)|^8-C_\mu|(u,v)|^2\end{aligned}$$

故对任意$(x,u,v)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^2$，有

$$F(x,u,v)\geq\mu|(u,v)|^8-C_\mu|(u,v)|^2. \tag{3.4}$$

于是，由(2.1)、(3.3)、(3.4)以及 Hölder 不等式知，对任意的$(u,v)\in Y_k\times Y_k$，有

$$\begin{aligned}\Phi(u,v)&=\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2+\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+2u^2)|\nabla u|^2dx\right)^2+\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3}(1+2v^2)|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\quad-\frac{V_0}{2}\|(u,v)\|_2^2-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u,v)\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2+\frac{1}{4}\left(\|u\|^2+2\|u\|_6^2\|\nabla u\|_3^2\right)^2+\frac{1}{4}\left(\|v\|^2+2\|v\|_6^2\|\nabla v\|_3^2\right)^2\\&\quad-\mu\|(u,v)\|_8^8+C_\mu\|(u,v)\|_2^2\\&\leq\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2+\frac{1}{4}\left(\|u\|^2+2C\|u\|^4\right)^2+\frac{1}{4}\left(\|v\|^2+2C\|v\|^4\right)^2\\&\quad-\frac{\mu}{\tau_k{}^4}\|(u,v)\|^8+C_\mu\|(u,v)\|^2\\&=\left(\frac{1}{2}+C_\mu\right)\|(u,v)\|^2+\frac{1}{4}\|(u,v)\|^4+C\|(u,v)\|^6-\left(\frac{\mu}{\tau_k^4}-C\right)\|(u,v)\|^8\end{aligned}$$

取$\mu\geq C\tau_k^4$则存在$\rho_k>0$，使得当$(u,v)\in Y_k\times Y_k$且满足$\|(u_n,v_n)\|=\rho_k$时，都有$\Phi(u,v)\leq 0$。证毕。

定理 1.1 的证明：显然$\Phi(0,0)=0$，由(F_4)可得$\Phi(u,v)=\Phi(-u,-v)$。引理 2.2、2.3、3.2 和 3.3 保证了泛函满足 Fountain 定理的所有条件，因此，问题(1.1)存在无穷多高能量解。

参考文献

[1] Lazer, A.C. and McKenna, P.J. (1990) Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New

Connections with Nonlinear Analysis. *SIAM Review*, **32**, 537-578. https://doi.org/10.1137/1032120

[2] Alexiades, V., Elcrat, A.R. and Schaefer, P.W. (1980) Existence Theorems for Some Nonlinear Fourth-Order Elliptic Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **4**, 805-813. https://doi.org/10.1016/0362-546X(80)90080-2

[3] Yin, Y. and Wu, X. (2011) High Energy Solutions and Nontrivial Solutions for Fourth-Order Elliptic Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **375**, 699-705. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.10.019

[4] Ferrero, A. and Warnault, G. (2009) On Solutions of Second and Fourth Order Elliptic Equations with Power-Type Nonlinearities. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **70**, 2889-2902. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.12.041

[5] 张粘，贾高. 一类带有非局部项的四阶椭圆方程无穷多高能量解的存在性[J]. 山东大学学报(理学版), 2019, 54(6): 81-87.

[6] Zhang, J., Tang, X., and Zhang, W. (2014) Existence of Multiple Solutions of Kirchhoff Type Equation with Sign-Changing Potential. *Applied Mathematics and Computation*, **242**, 491-499. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.05.070

[7] Li, Q. and Wu, X. (2014) A New Result on High Energy Solutions for Schrödinger-Kirchhoff Type Equations in $\mathbb{R}^N$. *Applied Mathematics Letters*, **30**, 24-27. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.12.002

[8] Wu, X. (2012) High Energy Solutions of Systems of Kirchhoff-type Equations in $\mathbb{R}^N$. *Journal of Mathematical Physics*, **53**, 1-18. https://doi.org/10.1063/1.4729543

[9] Zhou, F., Wu, K. and Wu, X. (2013) High Energy Solutions of Systems of Kirchhoff-type Equations on $\mathbb{R}^N$. *Computers & Mathematics with Applications*, **66**, 1299-1305. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.07.028

[10] Chen, S., Liu, J., and Wu, X. (2014) Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for a Class of Modified Nonlinear Fourth-Order Elliptic Equations on $\mathbb{R}^N$. *Applied Mathematics and Computation*, **248**, 593-601. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.10.021