Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(12), 2035-2044
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.812234

Hans汉斯

Inequalities for Dual Orlicz Mixed Affine Quermassintegrals

Guojun Deng, Yan Gou

Lanzhou No.9 Middle School, Lanzhou Gansu
Email: 273622272@qq.com

Received: 23rd, 2019; accepted: Dec. 11th, 2019; published: Dec. 18th, 2019

Abstract

This paper generalizes the notion of dual affine quermassintegrals in the classical Brunn-Minkowski theory and its inequalities to Orlicz space. Concept of dual Orlicz mixed affine quermassintegrals is introduced in this paper, and the Orlicz-Minkowski inequality and the Orlicz-Brunn-Minkowski inequality are established for this new dual Orlicz mixed affine quermassintegrals.

Keywords

Star Bodies, Orlicz Space, Dual Orlicz Mixed Affine Quermassintegrals, Orlicz-Minkowski Inequality, Orlicz-Brunn-Minkowski Inequality

对偶Orlicz混合仿射均质积分的不等式

邓国军，缑　艳

兰州市第九中学，甘肃　兰州
Email: 273622272@qq.com

收稿日期：2019年11月23日；录用日期：2019年12月11日；发布日期：2019年12月18日

摘　要

本文将经典**Brunn-Minkowski**理论中对偶仿射均质积分的概念及相关不等式推广到**Orlicz**空间，提出了对偶**Orlicz**混合仿射均质积分的概念，建立了对偶**Orlicz**混合仿射均质积分的**Orlicz-Minkowski**不等式和**Orlicz-Brunn-Minkowski**不等式。

文章引用: 邓国军, 缑艳. 对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的不等式[J]. 应用数学进展, 2019, 8(12): 2035-2044.
DOI: 10.12677/aam.2019.812234

关键词

星体，Orlicz空间，对偶Orlicz混合仿射均质积分，Orlicz-Minkowski不等式，Orlicz-Brunn-Minkowski不等式

1. 引言和主要结果

早在 19 世纪末 20 世纪初，Brunn-Minkowski 理论开始逐渐进入人们的视野。从 1962 年开始，Brunn-Minkowski 理论逐渐进入 L_p Brunn-Minkowski 理论阶段(见[1])，在经过 Lutwak (见[2] [3])等的基础性工作之后，L_p Brunn-Minkowski 理论得到迅速的发展(见[4]-[10])。最近，在 Lutwak Yang 和 Zhang 等人的开创性研究(见[11] [12])和近期的一系列探究性工作(见[13] [14] [15])的推动下，凸体的经典 Brunn-Minkowski 理论(见[16] [17] [18] [19]) (包括 L_p Brunn-Minkowski 理论(见[20]))已被推广到 Orlicz-Brunn-Minkowski 理论之中。

设 S^{n-1} 和 B 分别表示 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面和标准单位球，用 κ^n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有凸体(非空内点的紧凸集)构成的集合，κ_o^n，κ_s^n 分别表示 κ^n 中以原点为内点和关于原点对称的所有凸体构成的集合。$vol_k(\cdot)$ 表示 k 维体积，且记 $vol_n(B)=\omega_n$。在 $\mathbb{R}^n$ 中，一个紧的星形(关于原点) K 的径向函数 $\rho_K=\rho(K,\cdot)$ 被定义为：对 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，$\rho_K(x)=\rho(K,x)=\max\{\lambda\ge 0:\lambda x\in K\}$。当 ρ_K 是一个正的连续函数时，称 K 是一个星体(关于原点)。设 S^n 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有星体(支撑上有连续径向函数的关于原点的星形集)构成的集合，用 S_o^n 表示 S^n 中以原点为内点的所有星体构成的集合。如果 $K,L\in S_o^n$ 且 $\rho_K(u)/\rho_L(u)$ 与 $u\in S^{n-1}$ 无关，则称 K 和 L 互为膨胀。显然，当 $K,L\in S_o^n$ 时，

$$K\subseteq L \text{ 当且仅当 } \rho_K\le\rho_L. \tag{1.1}$$

若 $c>0$，就有

$$\rho_{cK}(x)=c\rho_K(x),\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \tag{1.2}$$

一般地，根据径向函数的定义可得：若 $T\in GL(n)$，则 K 的象 $TK=\{Ty:y\in K\}$ 的径向函数为(见[16] [21])

$$\rho_{TK}(x)=\rho_K(T^{-1}x),\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \tag{1.3}$$

其中 $GL(n)$ 表示一般的非奇异线性变换群，T^{-1} 为 T 的逆变换。

关于凸体仿射均质积分的概念，Lutwak (见[22])已给出了明确的定义：如果 $K\in\kappa_o^n$，$\tilde{\Phi}_0(K)=V(K)$，$\tilde{\Phi}_n(K)=\omega_n$，那么当 $0<i<n$ 时，凸体 K 的仿射均质积分被定义为

$$\Phi_{n-i}(K)=\omega_n\left(\int_{G(n,i)}\left[\frac{vol_i(K\mid\xi)}{\omega_i}\right]^{-n}\mathrm{d}\mu_i(\xi)\right)^{-\frac{1}{n}},$$

其中 $G(n,i)$, μ_i 和 $vol_i(K\mid\xi)$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 中 i 维线性子空间的 Grassman 流形(且 $\mu(G(n,i))=1$)，$G(n,i)$ 上规范 Haar 测度和 K 在 i 维子空间 $\xi\subset\mathbb{R}^n$ 上正交投影的 i 维体积。

在文献[23]中，Lutwak 进一步给出对偶仿射均质积分的定义：如果 $K\in S_o^n$，$\tilde{\Phi}_0(K)=V(K)$，

$\tilde{\Phi}_n(K)=\omega_n$，那么对于 $0<i<n$，星体 K 的对偶仿射均质积分被定义为

$$\tilde{\Phi}_{n-i}(K)=\omega_n\left(\int_{G(n,i)}\left[\frac{vol_i(K\cap\xi)}{\omega_i}\right]^n \mathrm{d}\mu_i(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.4}$$

其中 $vol_i(K\cap\xi)$ 表示 K 与 i 维子空间 $\xi\subset\mathbb{R}^n$ 交的 i 维体积。

随后，袁俊(见[9])给出混合 p 次对偶仿射均质积分的概念：如果 $K,L\in S_o^n$，$\xi\in G(n,i)$，那么对于 $0\le p\le i$，混合 p 次对偶仿射均质积分被定义为

$$\tilde{\Phi}_{p,n-i}(K,L)=\omega_n\left(\int_{G(n,i)}\left[\frac{\tilde{V}_{p,i}(K,L;\xi)}{\omega_i}\right]^n \mathrm{d}\mu_i(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.5}$$

其中 $\tilde{V}_{p,i}(K,L;\xi)=\tilde{V}(K\cap\xi,i-p;L\cap\xi,p)$。当 $p=1$ 时，$\tilde{\Phi}_{1,i}(K,L)$ 可记为对偶混合仿射均质积分 $\tilde{\Phi}_i(K,L)$。当 $0\le p\le n-i$ 时，就有 $\tilde{\Phi}_{p,i}(K,K)=\tilde{\Phi}_i(K)$，$\tilde{\Phi}_{n-i,i}(K,L)=\tilde{\Phi}_i(L)$。

在此基础上，袁俊(见[9])给出了如下两个重要的不等式：

定理 A： 如果 $K,L\in S_o^n$，且 $0\le i\le n-1$，那么当 $0\le P\le i$ 时，

$$\tilde{\Phi}_{p,i}(K,L)^{n-i}\le\tilde{\Phi}_i(K)^{n-i-p}\,\tilde{\Phi}_i(L)^p, \tag{1.6}$$

等号成立当且仅当 K 是 L 的膨胀。

定理 B： 如果 $K,L\in S_o^n$，且 $0\le i\le n-1$，那么

$$\tilde{\Phi}_i(K\,\tilde{+}\,L)^{\frac{1}{n-i}}\le\tilde{\Phi}_i(K)^{\frac{1}{n-i}}+\tilde{\Phi}_i(L)^{\frac{1}{n-i}}, \tag{1.7}$$

等号成立当且仅当 K 是 L 的膨胀。

设 Ψ 是所有严格增的凹函数 $\phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 所构成的集合，且使得 $\phi(0)=0,\phi(1)=1$ 和 $\lim_{t\to\infty}\phi(t)=\infty$。

文献[14]和[15]各自独立地给出了如下的对偶 Orlicz 混合体积 $\tilde{V}_\phi(K,L)$ 的公式：对于 $\phi\in\Psi$，$K,L\in S^n$，对偶 Orlicz 混合体积 $\tilde{V}_\phi(K,L)$ 为

$$\tilde{V}_\phi(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_L(u)}{\rho_K(u)}\right)\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u). \tag{1.8}$$

其中 S 是 S^{n-1} 上的 Lebesgue 测度。当 $\phi(t)=t^p,0<p\le1$ 时，对于 $K,L\in S_o^n$，对偶 Orlic 混合体积 $\tilde{V}_\phi(K,L)$ 变为 p 次对偶混合体积，即

$$\tilde{V}_p(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-p}(u)\rho_L^p(u)\mathrm{d}S(u).$$

本文提出了如下对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的定义，从而推广了混合 p 次对偶仿射均质积分的概念。在此基础上，讨论了对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的一些性质，建立了对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的 Orlicz-Minkowski 不等式和 Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式。

首先，提出对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的定义。

定义 1.1： 设 $K,L\in S_o^n$，$\xi\in G(n,i)$。如果 $\phi\in\Psi$，那么对每一个 $i=0,1,\cdots,n-1$，对偶 Orlicz 混合仿射均质积分被定义为

$$\tilde{\Phi}_{\phi,n-i}(K,L)=\frac{\omega_n}{\omega_i}\left(\int_{G(n,i)}\left[\tilde{V}_\phi^{(i)}(K\cap\xi,L\cap\xi)\right]^n \mathrm{d}\mu_i(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{1.9}$$

其中 $\tilde{V}_{\phi}^{(i)}(K\cap\xi, L\cap\xi)$ 表示 $K\cap\xi$ 和 $L\cap\xi$ 的 i 维对偶 Orlicz 混合体积。

当 $\phi(t)=t^p, 0<p\le 1$ 时，对偶 Orlicz 混合仿射均质积分(1.9)变为袁俊(见[9])的混合 p 次偶仿射均质积分(1.5)。

其次，获得了对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的 Orlicz-Minkowski 不等式。

定理 1.2：如果 $K,L\in S_o^n$， $\phi\in\Psi$，那么对每一个 $i=0,1,\cdots,n-1$，

$$\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,L)\le\tilde{\Phi}_i(K)\phi\left(\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(L)}{\tilde{\Phi}_i(K)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right), \tag{1.10}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀。

最后，利用定理 1.2，建立了可推出对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的 Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式。

定理 1.3：如果 $K,L\in S_o^n$， $\phi\in\Psi$ 且 $\alpha,\beta>0$。那么对每一个 $i=0,1,\cdots,n-1$，

$$\alpha\phi\left(\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(K)}{\tilde{\Phi}_i(\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)+\beta\phi\left(\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(K)}{\tilde{\Phi}_i(\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)\ge 1, \tag{1.11}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀(径向 Orlicz 线性组合 $\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L$ 的定义请见第二节(2.2))。

2. 预备知识及引理

如果 $K_1,\cdots,K_r\in S_o^n$， $\lambda_1,\cdots,\lambda_r\in\mathbb{R}$，那么径向 Minkowski 线性组合， $\lambda_1K_1\tilde{+}\cdots\tilde{+}\lambda_rK_r$，被定义为

$$\lambda_1K_1\tilde{+}\cdots\tilde{+}\lambda_rK_r=\{\lambda_1x_1\tilde{+}\cdots\tilde{+}\lambda_rx_r:x_i\in K_i\}.$$

当 $K,L\in S_o^n$， $\alpha,\gamma\ge 0$ 时，

$$\alpha(K\tilde{+}L)=\alpha K\tilde{+}\alpha L,\ (\alpha\tilde{+}\gamma)K=\alpha K\tilde{+}\gamma K.$$

由此，易得

$$\rho_{\alpha K\tilde{+}\gamma L}(\cdot)=\alpha\rho_K(\cdot)+\gamma\rho_L(\cdot).$$

对于 $K,L\in S_o^n$，在 S_o^n 上定义径向 Hausdorff 度量为

$$\tilde{\delta}(K,L)=\max_{u\in S^{n-1}}|\rho_K(u)-\rho_L(u)|=:\|\rho(K,\cdot)-\rho(L,\cdot)\|_\infty.$$

若当 $i\to\infty$，$\tilde{\delta}(K_i,K)\to 0$。则星体列 $\{K_i\}$ 收敛于 K。这意味着当且仅当 $\rho_{K_i}(\cdot)$ 一致收敛于 $\rho_K(\cdot)$ 时，序列 $\{K_i\}$ 收敛于 K。

一个紧的星形 K 的 n 维体积的极坐标公式是

$$V(K)=vol_n(K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K(u)^n\,\mathrm{d}S(u). \tag{2.1}$$

最近，Gardner(见[14])等人给出了径向 Orlicz 线性组合 $\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L$ 的定义：设 $K,L\in S^n$，如果 $\alpha,\beta>0$， $\phi\in\Psi$，那么对任意 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，径向 Orlicz 线性组合 $\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L$ 被定义为

$$\rho_{\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L}(x)=\inf\left\{\lambda>0:\alpha\phi\left(\frac{\rho_K(x)}{\lambda}\right)+\beta\phi\left(\frac{\rho_L(x)}{\lambda}\right)\le 1\right\}, \tag{2.2}$$

并有 $\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L\in S^n$，由(2.2)可以知道， $\rho_{\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L}$ 在 S^{n-1} 上是 Borel 可测的。

等价地，设 $K,L\in S^n$，如果 $\phi\in\Psi$， $\rho_K(u)+\rho_L(u)>0$，那么对于任意 $u\in S^{n-1}$，径向 Orlicz 线性组

合$\alpha * K \tilde{+}_\phi \beta * L$亦可定义为

$$\alpha\phi\left(\frac{\rho_K(u)}{\rho_{\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L}(u)}\right)+\alpha\phi\left(\frac{\rho_L(u)}{\rho_{\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L}(u)}\right)=1. \tag{2.3}$$

那么，当$K,L\in S_o^n$时，$\alpha * K \tilde{+}_\phi \beta * L\in S_o^n$。

引理 2.1：设$K,L\in S_o^n$，$\alpha,\beta>0$，如果$\phi\in\Psi$，那么对于$T\in GL(n)$，

$$T\left(\alpha * K \tilde{+}_\phi \beta * L\right)=\alpha * TK \tilde{+}_\phi \beta * TL.$$

证明：对于任意$x\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$，由等式(1.3)和径向 Orlicz 线性组合的定义(2.2)，得

$$\begin{aligned}\rho\left(\alpha * TK \tilde{+}_\phi \beta * TL,x\right)&=\inf\left\{\lambda>0:\alpha\phi\left(\frac{\rho_{TK}(x)}{\lambda}\right)+\beta\phi\left(\frac{\rho_{TL}(x)}{\lambda}\right)\le 1\right\}\\&=\inf\left\{\lambda>0:\alpha\phi\left(\frac{\rho_{K}(T^{-1}x)}{\lambda}\right)+\beta\phi\left(\frac{\rho_{L}(T^{-1}x)}{\lambda}\right)\le 1\right\}\\&=\rho\left(\alpha * K \tilde{+}_\phi \beta * L,T^{-1}x\right)\\&=\rho\left(T\left(\alpha * K \tilde{+}_\phi \beta * L\right),x\right).\end{aligned}$$

引理 2.2：设$K,L\in S_o^n$，$\alpha,\beta>0$，且$i=0,1,\cdots,n-1$，如果$\phi\in\Psi$，那么对于$\xi\in G(n,i)$，

$$\left(\alpha * K \tilde{+}_\phi \beta * L\right)\cap\xi=\alpha*(K\cap\xi)\tilde{+}_\phi\beta*(L\cap\xi).$$

证明：设$\xi\in G(n,i)$是任意固定的，记$S^{i-1}=S^{n-1}\cap\xi$。对于$u\in S^{i-1}$和$Q\in S_o^n$，有$\rho_Q(u)=\rho_{Q\cap\xi}(u)$。由此，利用$\alpha * K \tilde{+}_\phi \beta * L$的定义，对$u\in S^{i-1}$，可得

$$\alpha\phi\left(\frac{\rho_{K\cap\xi}(u)}{\rho_{(\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L)\cap\xi}(u)}\right)+\beta\phi\left(\frac{\rho_{L\cap\xi}(u)}{\rho_{(\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L)\cap\xi}(u)}\right)=1.$$

另一个方面，利用ξ上$\alpha*(K\cap\xi)\tilde{+}_\phi\beta*(L\cap\xi)$的定义，可得

$$\alpha\phi\left(\frac{\rho_{K\cap\xi}(u)}{\rho_{\alpha*(K\cap\xi)\tilde{+}_\phi\beta*(L\cap\xi)}(u)}\right)+\beta\phi\left(\frac{\rho_{L\cap\xi}(u)}{\rho_{\alpha*(K\cap\xi)\tilde{+}_\phi\beta*(L\cap\xi)}(u)}\right)=1.$$

因此，在ξ中，$\left(\alpha * K \tilde{+}_\phi \beta * L\right)\cap\xi$和$\alpha*(K\cap\xi)\tilde{+}_\phi\beta*(L\cap\xi)$是同一个星体。

Gardner (见[14])等证明了如下对偶 Orlicz 混合体积的对偶 Orlicz-Minkowski 不等式。

引理 2.3：如果$K,L\in S_o^n$，$\phi\in\Psi$，那么

$$\tilde{V}_\phi(K,L)\le V(K)\phi\left(\left(\frac{V(L)}{V(K)}\right)^{\frac{1}{n}}\right),$$

等号成立当且仅当K和L互为膨胀。

3. 主要结果的证明

首先获得了对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的一些基本性质。

性质 3.1：如果$K,L,L_1,L_2\in S_o^n$，$\phi\in\Psi$，那么

1) $\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,K)=\phi(1)\tilde{\Phi}_i(K)=\tilde{\Phi}_i(K)$。

2) $\tilde{\Phi}_{\phi,0}(K,L)=\tilde{V}_{\phi}(K,L)$。

3) 如果 $L_1\subseteq L_2$，那么 $\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,L_1)\le\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,L_2)$。

4) 当 $T\in SL(n)$ 时，$\tilde{\Phi}_{\phi,i}(TK,TL)=\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,L)$。

我们只给出性质(4)的证明。

证明：设 $\xi\in G(n,n-i)$，记 $S^{n-i-1}=S^{n-1}\cap\xi$。如果 $T\in SL(n)=\{T\in GL(n):|T|=1\}$，则对于 $u\in S^{n-i-1}$，$Q\in S_o^n$，有 $\rho_{TQ}(u)=\rho_{TQ\cap\xi}(u)$。当 $x\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ 时，记 $\langle x\rangle=x/\|x\|$，利用对偶 Orlicz 混合体积(1.8)和等式(1.3)，使得当 $K,L\in S_o^n$，$\phi\in\Psi$ 时，可得

$$
\begin{aligned}
&\tilde{V}_{\phi}^{n-i}(TK\cap\xi,TL\cap\xi)\\
&=\frac{1}{n-i}\int_{S^{n-1}\cap\xi}\phi\left(\frac{\rho_{TL\cap\xi}(u)}{\rho_{TK\cap\xi}(u)}\right)\rho_{TK\cap\xi}^{n-i}(u)\,\mathrm{d}S(u)\\
&=\frac{1}{n-i}\int_{S^{n-1}}\phi\left(\frac{\rho_L(\langle T^{-1}u\rangle)}{\rho_K(\langle T^{-1}u\rangle)}\right)\rho_K^{n-i}(\langle T^{-1}u\rangle)\,\mathrm{d}S(\langle T^{-1}u\rangle)\\
&=\frac{1}{n-i}\int_{S^{n-1}\cap\xi}\phi\left(\frac{\rho_{L\cap\xi}(\langle T^{-1}u\rangle)}{\rho_{K\cap\xi}(\langle T^{-1}u\rangle)}\right)\rho_{K\cap\xi}^{n-i}(\langle T^{-1}u\rangle)\,\mathrm{d}S(\langle T^{-1}u\rangle)\\
&=\tilde{V}_{\phi}^{(n-i)}(K\cap\xi,L\cap\xi).
\end{aligned}
$$

由此，当 $T\in SL(n)$ 时，根据对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的定义，可得

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Phi}_{\phi,i}(TK,TL)\\
&=\frac{\omega_n}{\omega_{n-i}}\left(\int_{G(n,n-i)}\left[\tilde{V}_{\phi}^{(n-i)}(TK\cap\xi,TL\cap\xi)\right]^n\mathrm{d}\mu_{n-i}(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}\\
&=\frac{\omega_n}{\omega_{n-i}}\left(\int_{G(n,n-i)}\left[\tilde{V}_{\phi}^{(n-i)}(K\cap\xi,L\cap\xi)\right]^n\mathrm{d}\mu_{n-i}(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}\\
&=\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,L).
\end{aligned}
$$

设 $K\in S_o^n$，规范化的仿射均质积分的对偶 conical 测度 $\tilde{\Phi}_{n-i}^*(K,\cdot)$ 可被定义为

$$
\mathrm{d}\tilde{\Phi}_{n-i}^*(K,\cdot)=\left(\frac{\omega_n}{\omega_{n-i}\tilde{\Phi}_i(K)}\right)^n\left[vol_{n-i}(K\cap\cdot)\right]^n\mathrm{d}\mu_{n-i}, \tag{3.1}
$$

其中，μ_{n-i} 是 $G(n,n-i)$ 上的 Haar 测度。显然，规范化的仿射均质积分的对偶 conical 测度 $\tilde{\Phi}_{n-i}^*(K,\cdot)$ 是 $G(n,n-i)$ 上的一个概率测度。

定理 1.2 的证明：利用对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的定义(1.9)，对偶仿射均质积分的定义(1.4)，引理 2.3，Jensen 不等式(见[14])，Höld 不等式以及严格增的凹函数 $\phi^n(t)=(\phi(t))^n$，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,L)}{\tilde{\Phi}_i(K)}\\
&=\frac{\omega_n}{\omega_{n-i}\tilde{\Phi}_i(K)}\left(\int_{G(n,n-i)}\left[\tilde{V}_{\phi}^{(n-i)}(K\cap\xi,L\cap\xi)\right]^n\mathrm{d}\mu_{n-i}(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}\\
&\le\frac{\omega_n}{\omega_{n-i}\tilde{\Phi}_i(K)}\left(\int_{G(n,n-i)}\left[vol_{n-i}(K\cap\xi)\right]^n\phi^n\left(\left(\frac{vol_{n-i}(L\cap\xi)}{vol_{n-i}(K\cap\xi)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)\mathrm{d}\mu_{n-i}(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

$$=\left(\int_{G(n,n-i)}\phi^{n}\left(\left(\frac{vol_{n-i}(L\cap\xi)}{vol_{n-i}(K\cap\xi)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)\mathrm{d}\tilde{\Phi}_{n-i}^{*}(K,\xi)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq\phi\left(\int_{G(n,n-i)}\left(\frac{vol_{n-i}(L\cap\xi)}{vol_{n-i}(K\cap\xi)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\mathrm{d}\tilde{\Phi}_{n-i}^{*}(K,\xi)\right)$$

$$=\phi\left(\frac{\omega_n}{\omega_{n-i}\tilde{\Phi}_i(K)}\left(\int_{G(n,n-i)}\left[vol_{n-i}(K\cap\xi)\right]^{n\left(\frac{n(n-i)-1}{n(n-i)}\right)}\left[vol_{n-i}(L\cap\xi)\right]^{n\left(\frac{1}{n(n-i)}\right)}\mathrm{d}\mu_{n-i}(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n}$$

$$\leq\phi\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(K)^{\frac{n(n-i)-1}{n(n-i)}}\tilde{\Phi}_i(L)^{\frac{1}{n(n-i)}}}{\tilde{\Phi}_i(K)}\right)^{n}$$

$$=\phi\left(\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(L)}{\tilde{\Phi}_i(K)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right),$$

则所需不等式成立。

若上述不等式的等号成立，由于 ϕ 是严格增的函数，则对偶 Minkowski 不等式的等号成立。因此存在 $c>0$ 使得 $L=cK$，从而对任意 $u\in S^{n-1}$，有 $\rho_L(u)=c\rho_K(u)$。

反之，当 $L=cK$ 时，利用对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的定义(1.9)，可得

$$\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,L)=\tilde{\Phi}_i(K)\phi(c)=\tilde{\Phi}_i(K)\phi\left(\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(L)}{\tilde{\Phi}_i(K)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right).$$

当 $\phi(t)=t^p,0\leq p\leq1$ 时，对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的对偶 Orlicz-Minkowski 不等式(1.10)变为袁俊(见[9])的混合 p 次对偶仿射均质积分的 Minkowski 不等式(1.6)。

推论 3.2：设 $\phi\in\Psi$，$M\in S_o^n$，且 $K,L\in M$。如果

$$\tilde{\Phi}_{\phi,i}(M,K)=\tilde{\Phi}_{\phi,i}(M,L),\tag{3.2}$$

或者

$$\frac{\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,M)}{\tilde{\Phi}_i(K)}=\frac{\tilde{\Phi}_{\phi,i}(L,M)}{\tilde{\Phi}_i(L)},\tag{3.3}$$

则 $K=L$。

证明：若(3.2)成立，令 $K=M$，根据 $\phi(1)=1$，对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的定义(1.9)，以及对偶仿射均质积分的定义(1.4)，得到

$$\tilde{\Phi}_i(K)=\phi(1)\tilde{\Phi}_i(K)=\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,K)=\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,L).$$

由此，利用定理 1.2，可得

$$1=\phi(1)\leq\phi\left(\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(L)}{\tilde{\Phi}_i(K)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right),$$

等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀。因为 ϕ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格增的，则

$$\tilde{\Phi}_i(K)\le\tilde{\Phi}_i(L),$$

等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀。如果取 $L=M$，类似地，可得 $\tilde{\Phi}_i(K)\ge\tilde{\Phi}_i(L)$，等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀。因此，$\tilde{\Phi}_i(K)=\tilde{\Phi}_i(L)$。由于 K 和 L 具有相同的对偶仿射均质积分，则 $K=L$。

若(3.3)成立，如果令 $K=M$，根据 $\phi(1)=1$，对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的定义(1.9)，以及对偶仿射均质积分的定义(1.4)，得到

$$1=\phi(1)=\frac{\tilde{\Phi}_{\phi,i}(K,K)}{\tilde{\Phi}_i(K)}=\frac{\tilde{\Phi}_{\phi,i}(L,K)}{\tilde{\Phi}_i(L)}.$$

根据定理 1.2，就有

$$1=\phi(1)\le\phi\left(\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(K)}{\tilde{\Phi}_i(L)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right),$$

等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀。因为 ϕ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格增的，则

$$\tilde{\Phi}_i(L)\le\tilde{\Phi}_i(K),$$

等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀。如果取 $L=M$，类似地，可得 $\tilde{\Phi}_i(L)\ge\tilde{\Phi}_i(K)$，等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀。因此，$\tilde{\Phi}_i(K)=\tilde{\Phi}_i(L)$。由于 K 和 L 具有相同的对偶仿射均质积分，则 $K=L$。

为了证明定理 1.3，我们还需以下引理：

引理 3.3：设 $K,L\in S_o^n$，$\phi\in\Psi$。

1) 如果 K 和 L 互为膨胀，那么对于 $\alpha,\beta>0$，K 和 $\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L$ 互为膨胀。

2) 设 $\alpha,\beta>0$，如果 K 和 $\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L$ 互为膨胀，则 K 和 L 互为膨胀。

证明：为了证明(1)，假设存在常数 $\varepsilon>0$，使得 $L=\varepsilon K$。令 $\tilde{C}_S=\left\{\rho_{K|S^{n-1}}:K\in S_o^n\right\}$。径向 Orlicz 线性组合的定义表明函数 $\rho\left(\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L,\cdot\right)$ 为

$$\alpha\phi\left(\frac{\rho_K}{f}\right)+\beta\phi\left(\frac{\varepsilon\rho_K}{f}\right)=1,\ f\in\tilde{C}_S,$$

的唯一解。

另一方面，存在 $\delta>0$ 使得

$$\alpha\phi\left(\frac{1}{\delta}\right)+\beta\phi\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)=1,$$

这意味着

$$\alpha\phi\left(\frac{\rho_K}{\rho_{\delta K}}\right)+\beta\phi\left(\frac{\varepsilon\rho_K}{\rho_{\delta K}}\right)=1.$$

因此，$\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L=\delta K$。

为证明(2)，假设存在常数 $\lambda>0$ 使得 $\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L=\lambda K$。于是对任意 $u\in S^{n-1}$，有

$$\alpha\phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\beta\phi\left(\frac{\rho_L(u)}{\rho_{\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L}(u)}\right)=1,$$

这表明，对于 $u\in S^{n-1}$，

$$\phi\left(\frac{\rho_L(u)}{\rho_{\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L}(u)}\right)$$

是一个常数。由 ϕ 的性质可知 $\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L$ 和 L 互为膨胀。

定理 1.3 的证明：为方便起见，令

$$K_\phi=\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L.$$

于是，当 $\xi\in G(n,n-i)$ 时，利用引理 2.2，可得

$$K_\phi\cap\xi=(\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L)\cap\xi=\alpha*(K\cap\xi)\tilde{+}_\phi\beta*(L\cap\xi).$$

对于 $u\in S^{n-i-1}$，$K_\phi\cap\xi\in S_o^n$ 的定义表明

$$\alpha\phi\left(\frac{\rho_{K\cap\xi}(u)}{\rho_{K_\phi\cap\xi}(u)}\right)+\beta\phi\left(\frac{\rho_{L\cap\xi}(u)}{\rho_{K_\phi\cap\xi}(u)}\right)=1 \tag{3.4}$$

因此，利用 $\phi(1)=1$，对偶仿射均质积分的定义(1.4)，(3.4)式，Minkowski 不等式以及定理 1.2，可得

$$\begin{aligned}\phi(1)&=\frac{\omega_n}{\omega_{n-i}\tilde{\Phi}_i(K_\phi)}\left(\int_{G(n,n-i)}\left[\phi(1)vol_{n-i}(K_\phi\cap\xi)\right]^n\mathrm{d}\mu_{n-i}(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}\\&=\frac{\omega_n}{\omega_{n-i}\tilde{\Phi}_i(K_\phi)}\left(\int_{G(n,n-i)}\left[\alpha\tilde{V}_\phi^{(n-i)}(K_\phi\cap\xi,K\cap\xi)+\beta\tilde{V}_\phi^{(n-i)}(K_\phi\cap\xi,L\cap\xi)\right]^n\mathrm{d}\mu_{n-i}(\xi)\right)^{\frac{1}{n}}\\&\le\alpha\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(K_\phi,K)}{\tilde{\Phi}_i(K_\phi)}\right)+\beta\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(K_\phi,L)}{\tilde{\Phi}_i(K_\phi)}\right)\\&\le\alpha\phi\left(\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(K)}{\tilde{\Phi}_i(\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right)+\beta\phi\left(\left(\frac{\tilde{\Phi}_i(L)}{\tilde{\Phi}_i(\alpha*K\tilde{+}_\phi\beta*L)}\right)^{\frac{1}{n-i}}\right).\end{aligned}$$

从而所需不等式得证。根据定理 1.2 和引理 3.3，定理 1.3 等号成立的条件可立即得出。

当 $\phi(t)=t,t>0$ 时，对偶 Orlicz 混合仿射均质积分的对偶 Orlicz-Brunn-Minkowski 不等式(1.11)变为袁俊(见[9])的对偶仿射均质积分的 Brunn-Minkowski 不等式(1.7)。

参考文献

[1] Firey, W.J. (1962) *p*-Means of Convex Bodies. *Mathematica Scandinavica*, **10**, 17-24. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10510

[2] Lutwak, E. (1993) The Brunn-Minkowski-Firey Theory, I: Mixed Volumes and the Minkowski Problem. *Journal of Differential Geometry*, **38**, 131-150. https://doi.org/10.4310/jdg/1214454097

[3] Lutwak, E. (1996) The Brunn-Minkowski-Firey Theory, II: Affine and Geominimal Surface Areas. *Advances in Mathematics*, **118**, 244-294. https://doi.org/10.1006/aima.1996.0022

[4] Ludwig, M. (2010) General Affine Surface Areas. *Advances in Mathematics*, **224**, 2346-2360. https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.02.004

[5] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2005) L_p John Ellipsoids. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **90**, 497-520. https://doi.org/10.1112/S0024611504014996

[6] Lv, S. and Leng, G. (2008) L_p-Curvature Images of Convex Bodies and L_p-Projection Bodies. *Proceedings Mathematical Sciences*, **118**, 413-424. https://doi.org/10.1007/s12044-008-0032-6

[7] Ma, T. (2012) On the Busemann-Petty's Problem for L_p-Intersection Body. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, **27**, 259-269.

[8] Ma, T. (2014) The *i*th *p*-Geominimal Surface Area. *Journal of Inequalities and Applications*, **2014**, 356. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-356

[9] Yuan, J. and Leng, G. (2006) Inequalities for Dual Affine Quermassintegrals. *Journal of Inequalities and Applications*, **2006**, Article No. 50181. https://doi.org/10.1155/JIA/2006/50181

[10] Wang, W. and Leng, G. (2005) L_p-Dual Mixed Guermassintegraks. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **36**, 177-188.

[11] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2010) Orlicz Projection Bodies. *Advances in Mathematics*, **223**, 220-242. https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.08.002

[12] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2010) Orlicz Centroid Bodies. *Journal of Differential Geometry*, **84**, 365-387. https://doi.org/10.4310/jdg/1274707317

[13] Gardner, R.J., Hug, D. and Weil, W. (2013) The Orlicz-Brunn-Minkowski Theory: A General Framework, Additions, and Inequalities. arXiv:1301.5267v1.

[14] Gardner, R.J., Hug, D., Weil, W. and Ye, D. (2014) The Dual Orlize-Brunn-Minkowski Theory. arXiv:1407.7-311v1.

[15] Zhu, B., Zhou, J. and Xu, W. (2014) Dual Orlicz-Brunn-Minkowski Theory. *Advances in Mathematics*, **264**, 700-725. https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.07.019

[16] Gardner, R.J. (2006) Geometric Tomography. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781107341029

[17] Gruber, P.M. (2007) Convex and Discrete Geometry. Springer, Berlin.

[18] Schneider, R. (1993) Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526282

[19] Thompson, A.C. (1996) Minkowski Geometry. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781107325845

[20] Rao, M.M. and Ren, Z.D. (1991) Theory of Orlicz Spaces. Marcel Dekker, New York.

[21] Paouris, G. and Werner, E. (2012) Relative Entropy of Cone-Volumes and L_p Centroid Bodies. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **104**, 253-186. https://doi.org/10.1112/plms/pdr030

[22] Lutwak, E. (1984) A General Isepiphanic Inequality. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **90**, 415-421. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1984-0728360-3

[23] Lutwak, E. (1975) Dual Mixed Volumes. *Pacific Journal of Mathematics*, **58**, 531-538. https://doi.org/10.2140/pjm.1975.58.531