

Phase Diagrams of a Class of Generalized KdV Traveling Wave Systems

Tong Lin

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 417194282@qq.com

Received: Feb. 28th, 2019; accepted: Mar. 13th, 2019; published: Mar. 20th, 2019

Abstract

The generalized KdV equation is an extension of the KdV equation proposed hundreds of years ago. This paper will study one of its forms. Because the equation has unknown parameters, we will adopt the method of classified discussion through variable substitution and simplification, transform this non-linear partial differential equation into ordinary differential equations, and then obtain the traveling wave system of the equation. In the process of researching traveling wave system, we need to discuss the influence of parameter value on the location of singularity distribution, and get the bifurcation curve on the parameter plane. Then the branching phase diagrams of the traveling wave system are obtained under different regions of the branching curve.

Keywords

The Traveling Wave System, Branch Curve, Numerical Simulation, Branch Phase Diagram

一类广义KdV行波系统的相图研究

林 桐

华南理工大学数学学院, 广东 广州
Email: 417194282@qq.com

收稿日期: 2019年2月28日; 录用日期: 2019年3月13日; 发布日期: 2019年3月20日

摘 要

广义KdV方程是由数百年前被提出的KdV方程延伸出来的一个方程, 本文将研究其中一种形式。由于方程带有未知参数, 我们将采取分类讨论的方法, 通过变量替换和化简, 把这一非线性偏微分方程转化为常微分方程组, 从而得到该方程的行波系统。在对这一行波系统进行研究的过程中, 我们需要讨论参数

的取值对奇点分布位置的影响，并得到参数平面上的分支曲线。然后在分支曲线划分的不同区域下分别得到行波系统的分支相图。

关键词

行波系统，分支曲线，数值模拟，分支相图

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对非线性微分方程的研究，比线性微分方程的研究难度大得多，大多只能依靠数值解法。数学家们提出反散射法、达布变换法， \tanh 、雅可比函数展开法等构造性解法，是非线性偏微分方程研究的福音。目前已知的非线性偏微分方程，大约只有 3000 多种，而有名的，也不过一百多种。多以发现它们的学者名字命名，例如，LAX 可积系统下的有：BBM 方程、Belousov-Zhabotinsky 方程、本杰明 - 小野方程、Bogoyavlenski-Konoplechenko 方程、波恩 - 英菲尔德方程、Boussinesq 方程、博格斯方程、KdV 方程、MKdV 方程、五阶 KdV 方程、五阶色散 KdV 方程等。

关于 KdV 方程的研究，已有许多著名的结果，B. Dey 研究精确的哈密顿密度和守恒定律，给出了方程的两个扭解[1] [2]。J. F. Zhang 等人使用两种不一样的方法给出了方程的孤立波解和奇异波解，他们针对 KdV 和 mKdV 方程，提出了两种构造新的精确孤波解的方法，并且总结出 12 种类型的孤子解，归结为 mKdV 方程的孤子解[3] [4]。J. Yu 采用齐次平衡法得到了一个扭解[5]。R. Grimshaw 等人为方程研究了大幅度孤子[6]。E. G. Fan 使用代数方法给出了方程的钟形孤立子、扭形孤立子和雅可比周期解[7]，继而改进了这个方法，又构造了一般非线性方程的一系列显式精确解[8]。M. Y. Tang 运用动力系统分支法给方程研究了孤立波和它们的分支[9]。Y. Z. Peng 用改进的隐射方法得到了一些包含双曲型函数的孤立波解、包含雅各比椭圆函数的周期波解和三角函数的周期波解[10]。刘正荣将研究微分方程数值解的基本方法编撰在[11]中，宋明运用了这本书的方法，研究了广义 KP-BBM 方程的周期波解[12]。

本文研究的方程形式如下：

$$u_t + (a + bu)uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

我们将讨论方程在由参数 a 和 b 构成的平面上的分支相图。

2. 预备知识

2.1. 行波系统的奇点

假设我们有系统：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= q(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

使得 $p(x, y) = 0, q(x, y) = 0$ 的特殊点 (x_0, y_0) 称为奇点，计算雅各比矩阵

$$J = \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{pmatrix}$$

令行列式 $|J - \lambda I| = 0$ 的 λ 就是该奇点的特征值。当奇点的特征值都不为零时, 对应的情况如下:

- ① 如果 λ_1 和 λ_2 都是实数, 且 λ_1 不等于 λ_2 , $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, 那么 (x_0, y_0) 是一个结点, 并且, λ_1 和 λ_2 都小于 0 时是稳定结点, 都大于 0 时是非稳定结点;
- ② 如果 λ_1 和 λ_2 都是实数, 且 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, 那么 (x_0, y_0) 是一个鞍点;
- ③ 如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 是实数, 且 $p_y(x_0, y_0)$ 和 $q_x(x_0, y_0)$ 中至少有一个非零, 那么 (x_0, y_0) 是一个退化结点, 当 $\lambda < 0$ 时是稳定的, $\lambda > 0$ 时是不稳定的;
- ④ 如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 是实数, 且 $p_y(x_0, y_0) = q_x(x_0, y_0) = 0$, 那么 (x_0, y_0) 是一个临界结点, 当 $\lambda < 0$ 时是稳定的, $\lambda > 0$ 时是不稳定的;
- ⑤ 如果 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha \neq 0$, 那么 (x_0, y_0) 是一个焦点, 当 $\alpha < 0$ 时是稳定的, $\alpha > 0$ 时是不稳定的;
- ⑥ 如果 $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, 并且可以找到

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= q(x, y) \end{aligned}$$

的首次积分, 那么 (x_0, y_0) 是一个中心。

假设方程(1)存在行波解 $\xi = x - ct$, 代入 $u = \varphi(\xi)$, 得到

$$\begin{aligned} u_t &= -c\varphi'(\xi) \\ u_x &= \varphi'(\xi) \\ u_{xxx} &= \varphi'''(\xi) \end{aligned}$$

代入方程(1), 得到

$$-c\varphi'(\xi) + a\varphi(\xi)\varphi'(\xi) + b\varphi^2(\xi)\varphi'(\xi) + \varphi'''(\xi) = 0$$

对上式进行积分, 并且取积分常数为零, 得到

$$-c\varphi(\xi) + \frac{a}{2}\varphi^2(\xi) + \frac{b}{3}\varphi^3(\xi) + \varphi''(\xi) = 0$$

下面, 令 $\varphi'(\xi) = y$

代入方程, 得到微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= y \\ \frac{dy}{d\xi} &= c\varphi - \frac{a}{2}\varphi^2 - \frac{b}{3}\varphi^3 \end{aligned} \quad (3)$$

于是我们就把一个非线性偏微分高阶方程化简为一个二阶的常微分方程组。

接下来, 令

$$y = 0, c\varphi - \frac{a}{2}\varphi^2 - \frac{b}{3}\varphi^3 = 0$$

我们可以得到本系统的奇点。

2.2. 行波系统的首次积分

由微分方程组(3)，我们令

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{y}{c\varphi - \frac{a}{2}\varphi^2 - \frac{b}{3}\varphi^3}$$

解得

$$y(\xi) = \pm \frac{\sqrt{6c\varphi^2 - 2a\varphi^3 - b\varphi^4 + 12C}}{\sqrt{6}}$$

于是，我们得到积分函数

$$H(\varphi, y) = 6y^2 + 2a\varphi^3 + b\varphi^4 - 6c\varphi^2$$

当 H 取值为固定的常数时，可以得到 φ 和 y 的关系，得到一条轨线。我们取经过某一点的 H 值，便得到了经过该点的轨线。取不同的值，我们得到许多条轨线，从而获得相图的形状。

3. 主要结果

3.1. 参数不同取值下的奇点情况

下面，我们需要研究方程：

$$c\varphi - \frac{a}{2}\varphi^2 - \frac{b}{3}\varphi^3 = 0$$

当参数 c 不为零时，由求根公式判别法可知，当 $b = -(3a^2)/16c$ 时，方程有一个根；当 $b < -(3a^2)/16c$ 且 $c > 0$ 时，无实根；当 $b > -(3a^2)/16c$ 且 $c > 0$ 时，有两个不同的根；当 $b > -(3a^2)/16c$ 且 $c < 0$ 时，无实根；当 $b < -(3a^2)/16c$ 且 $c < 0$ 时，有两个不同的根。

当 $c > 0$ 时，系统奇点判断如下：

- ① $a = 0, b = 0$ 时，有 $(0, 0)$ 一个鞍点；
- ② $a \neq 0, b = 0$ 时，有一个鞍点 $(0, 0)$ ，一个中心；
- ③ $a = 0, b > 0$ 时，有一个鞍点 $(0, 0)$ ，两个中心；
- ④ $a \neq 0, b > 0$ 时，有一个鞍点 $(0, 0)$ ，两个中心；
- ⑤ $-(3a^2)/16c < b < 0$ 时，有一个中心，两个鞍点，其中一个鞍点是 $(0, 0)$ ；
- ⑥ $b < -(3a^2)/16c$ 时，只有一个鞍点 $(0, 0)$ ；
- ⑦ $b = -(3a^2)/16c$ 时，有一个鞍点 $(0, 0)$ ，和一个退化奇点。

$c > 0$ 时的积分曲线图和数值模拟图见图 1。

当 $c < 0$ 时，奇点判断如下：

- ① $a = 0, b = 0$ 时，有 $(0, 0)$ 一个中心；
- ② $a \neq 0, b = 0$ 时，有一个中心 $(0, 0)$ ，一个鞍点；
- ③ $a = 0, b < 0$ 时，有一个中心 $(0, 0)$ ，两个鞍点；
- ④ $a \neq 0, b > 0$ 时，有一个中心 $(0, 0)$ ，两个鞍点；
- ⑤ $0 < b < -(3a^2)/16c$ 时，有一个鞍点，两个中心，其中一个中心是 $(0, 0)$ ；
- ⑥ $b > -(3a^2)/16c$ 时，只有一个中心 $(0, 0)$ ；

⑦ $b = -(3a^2)/16c$ 时, 有一个中心 $(0,0)$, 和一个退化奇点。

$c < 0$ 时的积分曲线图和数值模拟图见图 2。

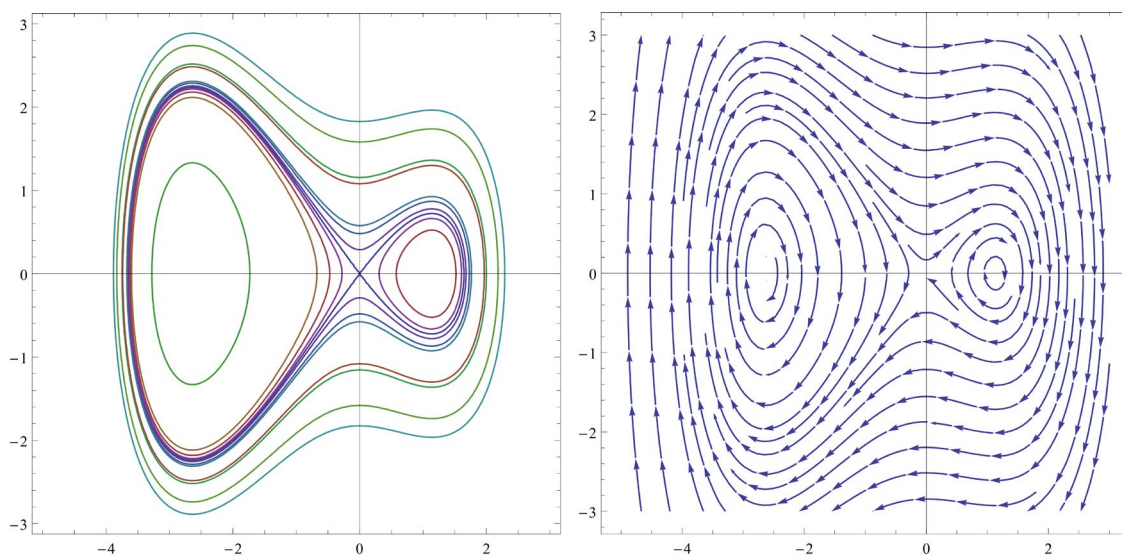


Figure 1. The integral curve and numerical simulation diagram when $a = b = c = 1$

图 1. $a = b = c = 1$ 时的积分曲线图和数值模拟图

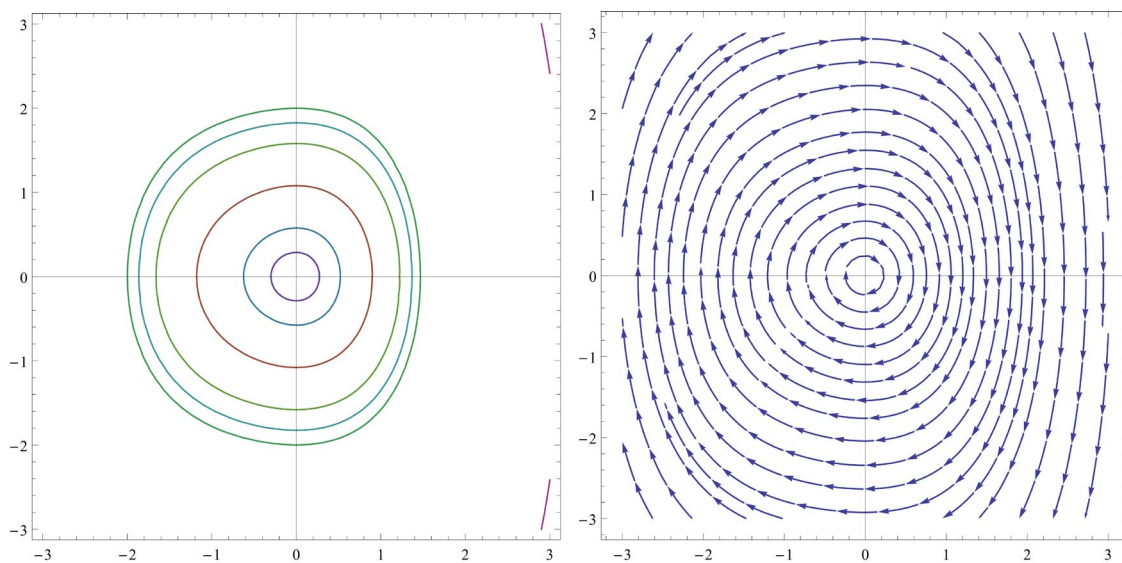


Figure 2. The integral curve and numerical simulation diagram when $a = b = 1, c = -1$

图 2. $a = b = 1, c = -1$ 时的积分曲线图和数值模拟图

当 $c = 0$ 时, $(0,0)$ 是一个退化奇点, 奇点判断如下:

- ① $a = 0, b = 0$ 时, 有 $(0,0)$ 一个退化奇点;
- ② $b > 0$ 时, 有 $(0,0)$ 一个退化奇点, 还有一个中心;
- ③ $b < 0$ 时, 有 $(0,0)$ 一个退化奇点, 还有一个鞍点。

$c = 0$ 时的积分曲线图和数值模拟图见图 3。

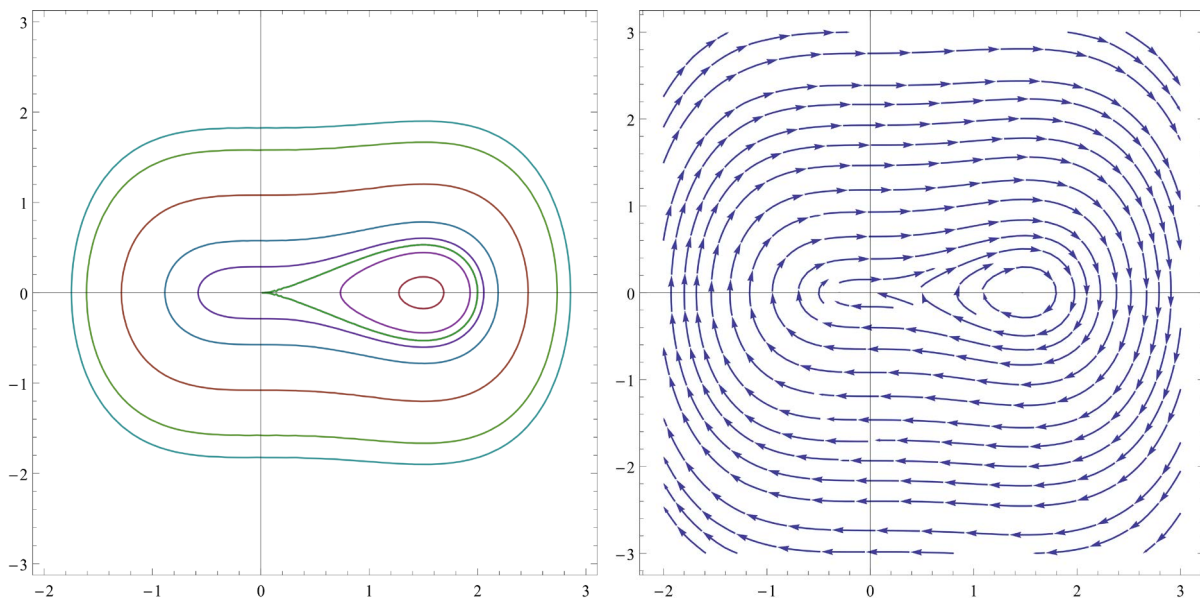


Figure 3. The integral curve and numerical simulation diagram when $a = -1, b = 1, c = 0$
图 3. $a = -1, b = 1, c = 0$ 时的积分曲线图和数值模拟图

3.2. ab 平面上的分支曲线和分支相图

接下来，为了得到分支曲线，我们令

$$H\left(-\frac{3a - \sqrt{9a^2 + 48bc}}{4b}, 0\right) = H(0, 0) = 0$$

解得结果为：

$$b = -\frac{a^2}{6c}$$

于是得到两条分支曲线 $b = -a^2/6c$ 和 $b = -3a^2/16c$ 。

下面，我们将 ab 平面用分支曲线分割成不同区域，见图 4：

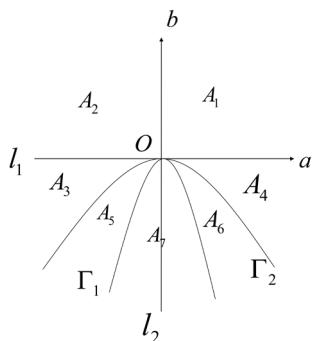


Figure 4. Bifurcation curve on ab plane when $c > 0, c < 0, c = 0$
图 4. 分别在 $c > 0, c < 0, c = 0$ 时的 ab 平面上的分支曲线

与之对应的分支相图分别见图 5~7。

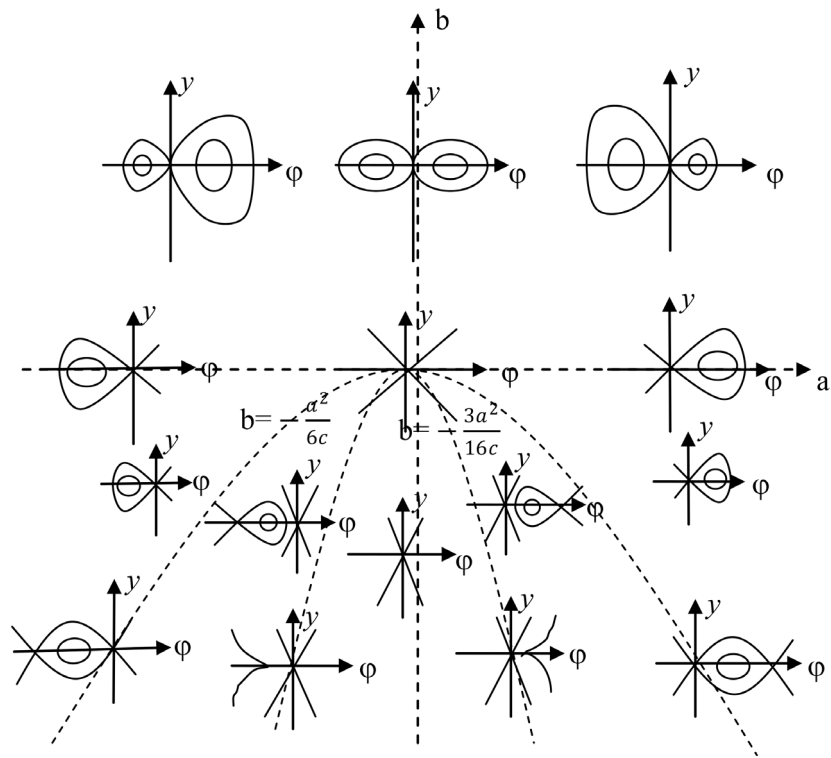


Figure 5. Bifurcation phase diagram on ab plane when $c > 0$

图 5. $c > 0$ 时的 ab 平面上的分支相图

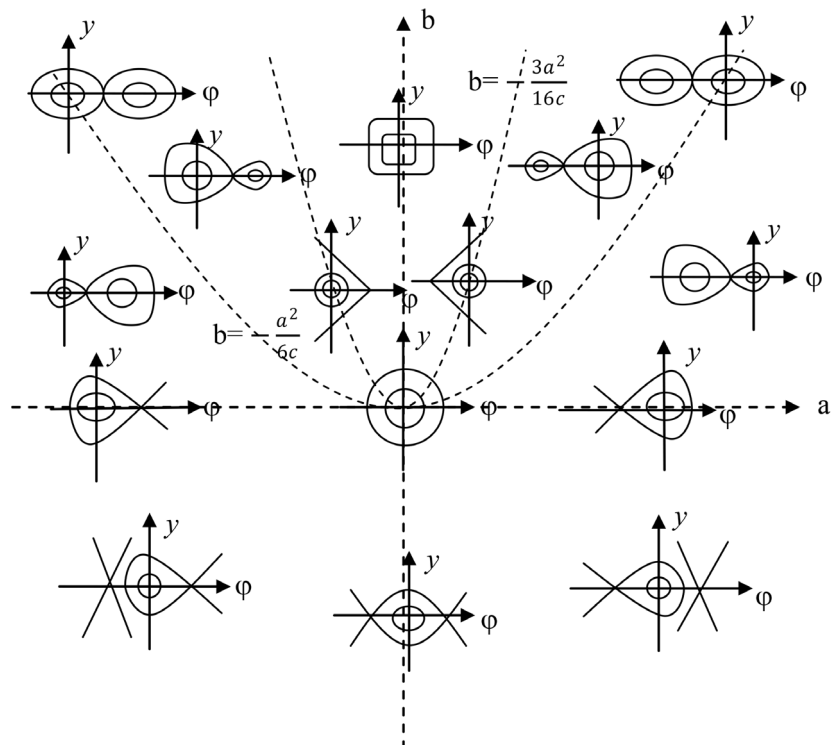


Figure 6. Bifurcation phase diagram on ab plane when $c < 0$

图 6. $c < 0$ 时的 ab 平面上的分支相图

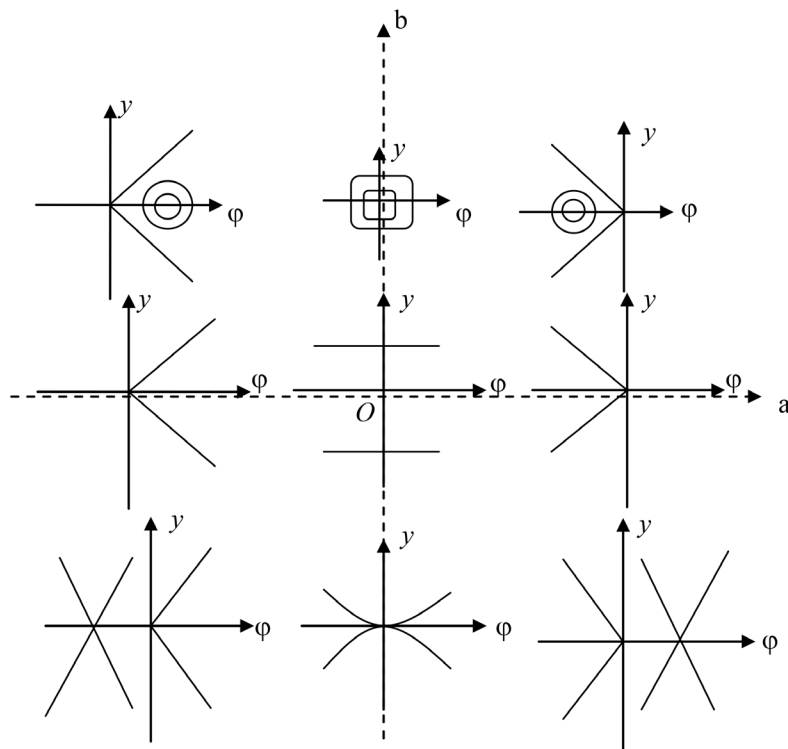


Figure 7. Bifurcation phase diagram on ab plane when $c=0$

图 7. $c=0$ 时的 ab 平面上的分支相图

4. 总结

本文的工作难点在于，方程中带有未知数 a 、 b ，而且变量替换时，行波解中也带有未知数 c ，于是我们需要进行繁杂的分类讨论。本文把 c 分成大于零、小于零和等于零三种情况来讨论。然后再讨论 ab 的关系对于奇点坐标的影响，从而得到 ab 关系的分界线，也就是分支曲线。最后在 c 的不同取值下，在 ab 平面上作出分支相图。

通过观察发现，不管 c 的取值为何，每个 ab 平面上的分支相图都是关于 b 轴对称的，也就是说， a 的取值只是改变了相图的左右对称的方向。而且每个相邻的区域之间的相图存在缓慢的过渡，在边界上达到定性的变化，然后逐渐展开。

参考文献

- [1] Dey, B. (1986) Domain Wall Solutions of KdV-Like Equations with Higher Order Nonlinearity. *Journal of Physics A*, **19**, L9-L12. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/19/1/003>
- [2] Dey, B. (1988) KdV Like Equations with Domain Wall Solutions and Their Hamiltonians. In: *Solitons*, Springer, Berlin, 188-194.
- [3] Zhang, J.F. (1998) New Solitary Wave Solution of the Combined KdV and mKdV Equation. *International Journal of Theoretical Physics*, **37**, 1541-1546. <https://doi.org/10.1023/A:1026615919186>
- [4] Zhang, J.F., Wu, F.M. and Shi, J.Q. (2000) Simple Soliton Solution Method for the Combined KdV and mKdV Equation. *International Journal of Theoretical Physics*, **39**, 1697-1702. <https://doi.org/10.1023/A:1003648715053>
- [5] Yu, J. (2000) Exact Solitary Wave Solutions to a Combined KdV and mKdV Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **23**, 1667-1670. [https://doi.org/10.1002/1099-1476\(200012\)23:18<1667::AID-MMA180>3.0.CO;2-L](https://doi.org/10.1002/1099-1476(200012)23:18<1667::AID-MMA180>3.0.CO;2-L)
- [6] Grimshaw, R., Pelinovsky, D., Pelinovsky, E. and Slunyaev, A. (2002) Generation of Large-Amplitude Solitons in the Extended Korteweg-de Vries Equation. *Chaos*, **12**, 1070-1076. <https://doi.org/10.1063/1.1521391>

-
- [7] Fan, E.G. (2002) Multiple Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations Using a Unified Algebraic Method. *Journal of Physics A*, **35**, 6853-6872. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/32/306>
- [8] Fan, E.G. (2003) Uniformly Constructing a Series of Explicit Exact Solutions to Nonlinear Equations in Mathematical Physics. *Chaos, Solitons and Fractals*, **16**, 819-839. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(02\)00472-1](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00472-1)
- [9] Tang, M.Y., Wang, R.Q. and Jing, Z.J. (2002) Solitary Waves and Their Bifurcations of KdV Like Equation with Higher Order Nonlinearity. *Science in China A*, **45**, 1255-1267.
- [10] Peng, Y.-Z. (2003) New Exact Solutions to the Combined KdV and mKdV Equation. *International Journal of Theoretical Physics*, **42**, 863-868. <https://doi.org/10.1023/A:1024475003055>
- [11] 刘正荣. 微分方程定性方法与数值模拟[M]. 广州: 华南理工大学, 2013.
- [12] 宋明. 几类高次非线性波方程的行波解研究[D]: [博士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2014.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org