Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(3), 561-568**
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.83062

Optimal Dividend Strategy with Constrained Compound Poisson Model

Yanshuang Zheng, Guoxin Liu

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin
Email: metaphor13s@outlook.com, gxliu@hebut.edu.cn

Received: Mar. 5th, 2019; accepted: Mar. 20th, 2019; published: Mar. 27th, 2019

Abstract

In this paper, we study the optimal dividend problem for a compound Poisson risk model with constant interest rate under bounded dividend rate. We aim to maximize the expected cumulative discounted dividends before bankruptcy by using bounded dividend rate. And the relevant characteristics of the dividend strategy are given. Finally, based on the measure-valued generator theory, this paper deduces the associated measure-valued dynamic programming equation (DPE), and further analyzes the relationship between the measure-valued DPE and the quasi-variational inequality.

Keywords

Compound Poisson Model, Optimal Dividend, Bounded Dividend Rates, Measure-Valued DPE

带约束复合泊松模型的最优分红策略

郑艳双，刘国欣

河北工业大学理学院，天津
Email: metaphor13s@outlook.com, gxliu@hebut.edu.cn

收稿日期：2019年3月5日；录用日期：2019年3月20日；发布日期：2019年3月27日

摘　要

本文研究了在有界分红速率下的关于带有常数利率的复合泊松风险模型的最优分红问题，且在有限分红速率的约束下，旨在将破产之前最大化收到的预期累积折现分红，并给出分红策略的相关特征。最后根据测度值生成元理论，本文确定了相关联的测量值动态规划方程(**DPE**)，并进一步分析出测度值**DPE**与拟变分不等式之间的关系。

文章引用: 郑艳双, 刘国欣. 带约束复合泊松模型的最优分红策略[J]. 应用数学进展, 2019, 8(3): 561-568.
DOI: 10.12677/aam.2019.83062

关键词

复合泊松模型，最优分红，有限分红速率，测度值DPE

1. 引言

最优分红策略最早是 De Finitti (1957) [1]在第十五届精算大会上提出的，他指出公司应当寻求破产前所有分红期望折现值的最大化。2006 年 Gerber [2]研究了连续时间经典风险模型中的最优分红策略，证明了经典累积风险模型的最优分红策略。Azcue & Muler [3] (2012)将最优值函数刻画为关联 HJB 方程的最小粘性解，并证明了使预期折现分红最大化的最优分红策略是带状策略。当给定的可行分红策略的值函数光滑且满足 HJB 方程，Gerber [4]给出了验证结果，表明它是最优值函数。Schmidli [5]在 2008 年考虑索赔额分布连续的情况，给出了 Cramér-Lundberg 风险模型中更一般的验证定理。Albrecher [6]在 2008 年讨论了在风险模型中包含常利率的最大化分红问题。至此，关于最优分红问题的研究也越来越多。

关于带利率的最优分红问题，2006 年 Cai [7]盈余以恒定的利率获得投资收益。2007 年 Fang [8]研究了常利率复合泊松风险模型中的类似问题，证明了最优分红策略是指数索赔分布情况下的阈值策略，并且 Zhu [9] 2015 年考虑了在复合泊松模型下的正信用利率和负借贷利率的红利优化问题。上述结果表明，在相应的条件限制中，最优策略均是带状的。

基于上述研究背景和理论，本文运用带利率作用的复合泊松模型，分析任意索赔额分布的最优分红问题。此外，我们对分红速率加以约束，之后我们使用测度值生成元的方法(参见刘国欣等(2007) [10])来导出动态规划原理(DPP)和相应的动态规划方程(DPE)。

2. 模型介绍

2.1. 基本模型

令 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为全概率空间，Ω 为左连右极集合，其中所有随机变量均可在该空间上定义。对于任意 $t\ge 0, s\ge 0, \omega\in\Omega$，定义转移算子 $\theta_t:\Omega\to\Omega$ 为 $(\theta_t\omega)_s=\omega_{s+t}$，则盈余过程 $X=\{X_t\}_{t\ge 0}$ 可以表示为

$$X_t = x + ct - \sum_{k=1}^{N_t} U_k + i\int_0^t X_s \mathrm{d}s, \tag{1}$$

其中，$x\ge 0$ 为初始准备金。保费收入假设以常速率 $c>0$ 连续收入。索赔个数 $N=\{N_t\}_{t\ge 0}$ 为一列参数为 λ 的齐次泊松过程。索赔额 $\{U_k\}_{k\in N}$ 是一列独立同分布的随机变量，且所索赔额分布连续，记为 Q。积分项表示由固定利率 $i>0$ 带来的额外收入。τ_n 表示第 n 次破产时刻。$\{\mathcal{F}\}_{t\ge 0}$ 表示 X 的过滤概率空间。

记分红策略为过程 $L=\{L_t\}_{t\ge 0}$，其中 L_t 为到 t 时刻的累积分红，则受控后的风险盈余过程 X^L 可以写成

$$X_t^L = x + ct - \sum_{k=1}^{N_t} U_k + i\int_0^t X_s \mathrm{d}s - L_t. \tag{2}$$

令 $\tau^L := \inf\{t \ge 0 : X_t^L < 0\}$ 表示保险公司的破产时刻。给定分红速率上限 $l_0 \ge 0$，则分红策略 $L = \{L_t\}_{t<0}$ 是可行的，如果

- 过程 L 是非降适应 $\{\mathcal{F}\}_{t\ge 0}$ 的，且满足 $L_0 = 0$；
- 对 $h \ge 0$，有 $L_{t+h} - L_t \le l_0 h$；
- 分红不会导致破产；
- SDE(2)有唯一强解。

定义 Π_x 为所有初始盈余为 $x \ge 0$ 的可行分红策略集合。对任意可行分红策略 $L \in \Pi_x$，累积期望折现分红为

$$V^L(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^L} \mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}L_s \,\middle|\, X_0 = x\right] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau^L} \mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}L_s\right], \tag{3}$$

其中，$\delta > 0$ 代表折现因子，可作为衡量股东在风险过程的生命周期中更倾向于在早期支付的偏好。因此值函数可以定义为

$$V(x) = \sup\left\{V^L(x), L \in \Pi_x\right\}, x \ge 0. \tag{4}$$

按照惯例，当 $x < 0$ 时，我们定义 $V(x) = 0$。

2.2. 值函数

引理 2.1：值函数 V 满足：

i) $\forall y > x \ge 0, \exists V(x) \le V(y)$；

ii) $\forall x \ge 0, \exists V(x) \le l_0/\delta$；

iii) $V(x)$ 是局部利普西茨连续的。

证明：(i)对两不等初始资金可得第一条性质成立；第(ii)条性质服从 $V(x) \le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t} l_0 \mathrm{d}t = l_0/\delta$。对于性质(iii)，给定 $y > x \ge 0$ 和 $\epsilon > 0$，假设可行策略 $L \in \Pi_y$ 使得 $V^L(x) \ge V(y) - \epsilon$。并取初始盈余 x，当 $X_t^{\tilde{L}} < y$ 时不进行分红，且当达到盈余 y 时服从分红策略 L。则策略 $\tilde{L}$ 是可行策略。当没有索赔时发生时，盈余 $X_t^{\tilde{L}}$ 在 $t_0 = (1/i)\ln(iy + c/ix + c)$ 的时间内到达 y。因此我们可以得到

$$V(x) \ge V^{\tilde{L}}(x) \ge \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t_0} V^L(y) \ge \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t_0}\left(V(y) - \epsilon\right).$$

因此有 $0 \le V(y) - V(x)\left(1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t_0}\right) \le \left[l_0(\lambda+\delta)/\delta(ix+c)\right](y-x)$。则性质得证。

3. DPP&DPE

3.1. 动态规划原理

引理 3.1：(动态规划原理)对于任意 $x \ge 0$，假设存在平稳马氏策略 $L^* \in \Pi_x$ 使得 $V(x) = V^{L^*}(x)$，令 $\mathbb{M}$ 表示可测函数集合 $l : \mathbb{R}_+ \to [0, l_0]$ 满足 $\phi_x^l(t) = x + \int_0^t \left[c + i\phi_x^l(s) - l\left(\phi_x^l(s)\right)\right]\mathrm{d}s$，则对任意 $t \ge 0$，有

$$V(x) = \sup_{l\in\mathbb{M}} \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\delta s} l\left(X_s^l\right)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)} V\left(X_{t\wedge\tau_1}^l\right)\right].$$

证明：设 $l^* \in \mathbb{M}$ 是最优平稳马氏策略 L^* 的关联函数，对任意 $x, t \ge 0$ 有

$$V(x) = V^{L^*}(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\delta s} l^*\left(X_s^{l^*}\right)\mathrm{d}s\right] + \mathbb{E}_x\left[\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^{L^*}} \mathrm{e}^{-\delta s} l^*\left(X_s^{l^*}\right)\mathrm{d}s\right]$$

我们考虑等式右侧的第二项，根据过程 X^{l^*} 的强马氏性，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x\left[\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^{L^*}} \mathrm{e}^{-\delta s} l^*\left(X_s^{l^*}\right)\mathrm{d}s\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^{L^*}} \mathrm{e}^{-\delta s} l^*\left(X_s^{l^*}\right)\mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_{t\wedge\tau_1}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^{L^*}} \mathrm{e}^{-\delta s} l^*\left(X_s^{l^*}\right)\mathrm{d}s \middle| X_{t\wedge\tau_1}^{l^*}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)}\mathbb{E}_{X_{t\wedge\tau_1}^{l^*}}\left(\int_0^{\tau^{L^*}} \mathrm{e}^{-\delta s} l^*\left(X_s^{l^*}\right)\mathrm{d}s\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)} V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{l^*}\right)\right].
\end{aligned}$$

因此有

$$V(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\delta s} l^*\left(X_s^{l^*}\right)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)} V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{l^*}\right)\right]. \tag{5}$$

此时对任意函数 $l \in \mathbb{M}$，我们可以构建一个新的分红策略 $\hat{L}$：

$$\hat{L}_s = \begin{cases} \int_0^s l\left(X_s^{\hat{L}}\right)\mathrm{d}s, & 0 \le s \le t\wedge\tau_1; \\ \hat{L}_{t\wedge\tau_1} + \int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^{L^*}} l^*\left(X_s^{\hat{L}}\right)\mathrm{d}s, & t\wedge\tau_1 < s \le \tau^{\hat{L}}. \end{cases}$$

则易证 $\hat{L}$ 是马氏策略。因此，

$$V(x) \ge V^{\hat{L}}(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\delta s} l\left(X_s^l\right)\mathrm{d}s + \int_{t\wedge\tau_1}^{\tau^{\hat{L}}} \mathrm{e}^{-\delta s} l^*\left(X_s^{l^*}\right)\mathrm{d}s\right].$$

记 $X_{t\wedge\tau_1}^{\hat{L}} = X_{t\wedge\tau_1}^{l}$。根据推导(5)的方法，同样我们可以得到

$$V(x) \ge \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\delta s} l\left(X_s^l\right)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)} V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{l}\right)\right].$$

故得证。

3.2. 动态规划方程

定理 3.2：对于任意 $x \ge 0$，假设存在平稳马氏策略 $L^* \in \Pi_x$ 使得 $V(x) = V^{L^*}(x)$，则对任意 $t \ge 0$ 有

$$0 = \sup_{l\in\mathbb{M}}\left\{\mathcal{L}^l V(x,t) + \int_0^t l\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s - \delta\int_0^t V\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s\right\}, \tag{6}$$

其中 $\mathcal{L}^l V(x,t) = V\left(\phi_x^l(t)\right) - V(x) + \lambda\int_0^t \left(QV\left(\phi_x^l(s)\right) - V\left(\phi_x^l(s)\right)\right)\mathrm{d}s$ 且 $QV(x) = \int_0^x V(x-y)\mathrm{d}Q(y)$。

证明：对于任意 $x,t \ge 0$ 和 $l \in \mathbb{M}$，根据引理 3.1 有

$$\begin{aligned}
V(x) &\ge \mathbb{E}_x\left[\int_0^{t\wedge\tau_1} \mathrm{e}^{-\delta s} l\left(X_s^l\right)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau_1)} V\left(X_{t\wedge\tau_1}^{l}\right)\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta s} l\left(X_s^l\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s}\int_0^s \mathrm{e}^{-\delta u} l\left(X_u^l\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\
&\quad + \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t} V\left(\phi_x^l(s)\right) + \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s} QV\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

根据 Stieltjes 积分的分部积分公式可知

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta s} l\left(X_s^l\right)\mathrm{d}s\\&=\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s} l\left(X_s^l\right)\mathrm{d}s-\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s}\int_0^s \mathrm{e}^{-\delta u} l\left(X_u^l\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t} V\left(\phi_x^l(t)\right)-V(x)\\&=\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathrm{d}V\left(\phi_x^l(s)\right)-(\lambda+\delta)\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s} V\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此可得

$$\begin{aligned}0 &\geq \int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathrm{d}V\left(\phi_x^l(s)\right)+\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s} l\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s\\&\quad-(\lambda+\delta)\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s} V\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathcal{Q}V\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s\\&=\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathcal{H}^l V(x,\mathrm{d}s),\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $\mathcal{H}^l V(x,t)=\mathcal{L}^l V(x,t)+\int_0^t l\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s-\delta\int_0^t V\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s$。根据可加泛函 ϕ 及 $\mathbb{M}$ 的定义有 $\phi_x^l(s+t)=\phi_{\phi_x^l(s)}^l(t)$，则易检验得到 $\mathcal{H}^l V(x,s+t)=\mathcal{H}^l V(x,s)+\mathcal{H}^l V\left(\phi_x^l(s),t\right)$。因此

$$\begin{aligned}&\int_0^{t+h}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathcal{H}^l V(x,\mathrm{d}s)\\&=\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathcal{H}^l V(x,\mathrm{d}s)+\int_t^{t+h}\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathcal{H}^l V(x,\mathrm{d}s)\\&=\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathcal{H}^l V(x,\mathrm{d}s)+\mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)t}\int_0^h \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathcal{H}^l V\left(\phi_x^l(t),\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

根据(7)记 $\int_0^h \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathcal{H}^l V\left(\phi_x^l(t),\mathrm{d}s\right)\leq 0$，则 $\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\delta)s}\mathcal{H}^l V(x,\mathrm{d}s)$ 是非增的，且 $\mathcal{H}^l V(x,\mathrm{d}s)$ 对于任意固定 $x\geq 0$ 是非负可测的，这表明

$$0\geq \mathcal{L}^l V(x,t)+\int_0^t l\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s-\delta\int_0^t V\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s.\tag{8}$$

另一方面，假设 $l^*\in\mathbb{M}$ 是最优平稳马氏策略 L^* 的关联函数。根据推导(7)的方法，同理可得

$$0=\mathcal{L}^{l^*}V(x,t)+\int_0^t l^*\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)\mathrm{d}s-\delta\int_0^t V\left(\phi_x^{l^*}(s)\right)\mathrm{d}s.\tag{9}$$

我们结合(8)和(9)可以得到：

$$0=\sup_{l\in\mathbb{M}}\left\{\mathcal{L}^l V(x,t)+\int_0^t l\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s-\delta\int_0^t V\left(\phi_x^l(s)\right)\mathrm{d}s\right\}.\tag{10}$$

令 $\mathbb{U}_x$ 表示函数 $\alpha:\mathbb{R}_+\mapsto[0,l_0]$ 的集合且满足 $\phi_x^\alpha(t)=x+\int_0^t\left[c+i\phi_x^\alpha(s)\right]\mathrm{d}s$。现在对于任意固定的 $x\geq 0$，根据(6)有

$$0=\sup_{\alpha\in\mathbb{U}_x}\left\{\mathcal{L}^l V(x,t)+\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s-\delta\int_0^t V\left(\phi_x^\alpha(s)\right)\mathrm{d}s\right\}.\tag{11}$$

其中 $\mathcal{L}^\alpha V(x,t)=V\left(\phi_x^\alpha(t)\right)-V(x)+\lambda\int_0^t \mathcal{Q}V\left(\phi_x^\alpha(s)\right)-V\left(\phi_x^\alpha(s)\right)\mathrm{d}s$。方程(11)是可测的，故称为测度值动态规划方程(测度值 DPE)。

4. 测度值 DPE 与 QVI 的关系

定理 4.1：对于任意 $x\geq 0$，测度值 DPE(6)表明

$$
\begin{aligned}
0=\sup_{l\in\mathbb{M}}\Big\{&\big(1-V'\big(\phi_x^l(t)\big)\big)l\big(\phi_x^l(t)\big)+V'\big(\phi_x^l(t)\big)\big(c+i\phi_x^l(t)\big)\\
&-(\lambda+\delta)V\big(\phi_x^l(t)\big)+\lambda\mathcal{Q}V\big(\phi_x^l(t)\big)\Big\}\quad a.e.\ \text{w.r.t. } t.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

其中，

$$
V'(x)=\begin{cases}V'(x), & \text{导数存在;}\\ 1, & \text{其他.}\end{cases}
$$

证明：根据引理 2.1 知道值函数 V 是局部利普西茨连续的，则导数极限几乎处处存在，因此有

$$
\begin{aligned}
V\big(\phi_x^l(t)\big)-V(x)&=\int_0^{\phi_x^l(t)}V'(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^t V'\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}\phi_x^l(s)\\
&=\int_0^t V'\big(\phi_x^l(s)\big)\Big(c+i\phi_x^l(s)-l\big(\phi_x^l(s)\big)\Big)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

测度值 DPE(6)可重写为

$$
\begin{aligned}
0&=\sup_{l\in\mathbb{M}}\Big\{\int_0^t\Big[\big(1-V'\big(\phi_x^l(s)\big)\big)l\big(\phi_x^l(s)\big)+V'\big(\phi_x^l(s)\big)\big(c+i\phi_x^l(s)\big)\\
&\qquad-(\lambda+\delta)V\big(\phi_x^l(s)\big)+\lambda\mathcal{Q}V\big(\phi_x^l(s)\big)\Big]\mathrm{d}s\Big\}\\
&=\sup_{l\in\mathbb{M}}\Big\{\int_0^t\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s\Big\},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

其中 $\mathcal{G}^lV(x)=\big(1-V'(x)\big)l(x)+V'(x)(c+ix)-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\mathcal{Q}V(x)$。

则对任意 $x\ge 0, l\in\mathbb{M}$，我们可以得到

$$
\int_0^t\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s\le 0.
\tag{14}
$$

根据引理 3.1 中 $\mathbb{M}$ 的性质对任意 $l\in\mathbb{M}$ 有 $\phi_x^l(s+t)=\phi_{\phi_x^l(s)}^l(t)$。因此

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t+h}\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s&=\int_0^{h}\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s+\int_0^{t+h}\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{h}\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s+\int_0^{t}\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(h+s)\big)\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{h}\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s+\int_0^{t}\mathcal{G}^lV\big(\phi_{\phi_x^l(h)}^l(s)\big)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

根据(14)式记 $\int_0^t\mathcal{G}^lV\big(\phi_{\phi_x^l(h)}^l(s)\big)\mathrm{d}s\le 0$，因此 $\int_0^t\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s$ 是非增的，这表明 $\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\le 0$。由于

$$
0=\sup_{l\in\mathbb{M}}\Big\{\int_0^t\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s\Big\}\le\int_0^t\sup_{l\in\mathbb{M}}\mathcal{G}^lV\big(\phi_x^l(s)\big)\mathrm{d}s\le 0,
$$

故(12)式成立。

接下来定义三个算子为

$$
\Lambda V(x):=c+ix-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\mathcal{Q}V(x);
$$

$$
\mathcal{A}V(x):=\big(1-V'(x)\big)l_0+(c+ix)V'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\mathcal{Q}V(x);
$$

$$
\mathcal{B}V(x):=(c+ix)V'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\mathcal{Q}V(x).
$$

并定义

$$
\mathbb{D}_1=\{x\in\mathbb{R}_+:c+ix<l_0\}
$$

$$\mathbb{D}_2=\{x\in\mathbb{R}_+:c+ix=l_0\}$$

$$\mathbb{D}_3=\{x\in\mathbb{R}_+:c+ix>l_0\}.$$

因此当 $l_0<c$，则有 $\mathbb{D}_1=\mathbb{D}_2=\varnothing,\mathbb{D}_3=\mathbb{R}_+$；当 $l_0=c$，则有 $\mathbb{D}_1=\varnothing,\mathbb{D}_2=\{0\},\mathbb{D}_3=(0,\infty)$；当 $l_0>c$，则有 $\mathbb{D}_1=\left[0,\frac{l_0-c}{i}\right),\mathbb{D}_2=\left\{\frac{l_0-c}{i}\right\},\mathbb{D}_3=\left(\frac{l_0-c}{i},\infty\right)$。

定理 4.2：假设测度值 DPE 成立。当 $x\in\mathbb{D}_1\cup\mathbb{D}_2$，则值函数 V 满足 QVI(I)

$$\begin{cases}\Lambda V(x)\le 0;\\ \mathcal{A}V(x)\le 0,\quad \text{a.e.};\\ \mathcal{B}V(x)\le 0,\quad \text{a.e.};\\ (\Lambda V(x))(\mathcal{A}V(x))(\mathcal{B}V(x))=0,\quad \text{a.e.}\end{cases}$$

当 $x\in\mathbb{D}_3$，则值函数 V 满足 QVI(II)

$$\begin{cases}\mathcal{A}V(x)\le 0,\quad \text{a.e.};\\ \mathcal{B}V(x)\le 0,\quad \text{a.e.};\\ (\mathcal{A}V(x))(\mathcal{B}V(x))=0,\quad \text{a.e.}\end{cases}$$

证明：我们首先证明 QVI(I)。记(12)式表示值函数 V 满足

$$0=\sup_{a\in[0,l_0]}\left\{a(1-V'(x))+(c+ix)V'(x)-(\lambda+\delta)V(x)+\lambda\mathcal{Q}V(x)\right\}\quad \text{a.e.}\tag{15}$$

对于任意 $x\in\mathbb{D}_1\cup\mathbb{D}_2$，当 $V'(x)>1$，则有

$$\Lambda V(x)<BV(x),\ \mathcal{A}V(x)<BV(x).$$

此时当 $a=0$ 时，(15)式有最大值，即在 $\{x\in\mathbb{D}_1\cup\mathbb{D}_2:V'(x)>1\}$ 有

$$\mathcal{B}V(x)=0,\quad \text{a.e.}$$

对于任意 $x\in\mathbb{D}_1\cup\mathbb{D}_2$，当 $V'(x)=1$，则有

$$\Lambda V(x)=\mathcal{A}V(x)=\mathcal{B}V(x).$$

又(15)式右侧括号内的值与 a 是独立的。因此(12)式表明在 $\{x\in\mathbb{D}_1\cup\mathbb{D}_2:V'(x)=1\}$ 有

$$\Lambda V(x)=\mathcal{A}V(x)=\mathcal{B}V(x)=0,\ \text{a.e.}$$

对于任意 $x\in\mathbb{D}_1\cup\mathbb{D}_2$，当 $V'(x)<1$，则有

$$\Lambda V(x)\le\mathcal{A}V(x),\ \mathcal{B}V(x)<AV(x).$$

此时当 $a=l_0$ 时，(15)式有最大值，即在 $\{x\in\mathbb{D}_1\cup\mathbb{D}_2:V'(x)<1\}$ 有

$$\mathcal{A}V(x)=0,\quad \text{a.e.}$$

综上所述，我们可以得到对于任意 $x\in\mathbb{D}_1\cup\mathbb{D}_2$，QVI(I)成立。

同理可证明 QVI(II)：

在 $\{x\in\mathbb{D}_3:V'(x)>1\}$ 有 $\mathcal{B}V(x)=0$, a.e.，且 $\mathcal{A}V(x)<BV(x)$。

在 $\{x\in\mathbb{D}_3:V'(x)=1\}$ 有 $\mathcal{A}V(x)=\mathcal{B}V(x)=0$, a.e.。

在 $\{x \in \mathbb{D}_3 : V'(x) < 1\}$ 有 $\mathcal{A}V(x) = 0$, a.e.，且 $\mathcal{B}V(x) < \mathcal{A}V(x)$。

故对任意 $x \in \mathbb{D}_3$，QVI(II)成立。

参考文献

[1] De Finetti, B. (1957) Su un'Impostazione Alternativa Della Teoria Collettiva del Rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, **2**, 433-443.

[2] Gerber, H.U. and Shiu, E.S. (2006) On Optimal Dividend: From Reflection to Refraction. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **186**, 4-22. https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.03.062

[3] Azcue, P. and Muler, N. (2012) Optimal Dividend Policies for Compound Poisson Processes: The Case of Bounded Dividend Rates. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **51**, 26-42. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2012.02.011

[4] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (2006) On Optimal Dividend Strategies in the Compound Poisson Model. *North American Actuarial Journal*, **10**, 76-93. https://doi.org/10.1080/10920277.2006.10596249

[5] Schmidli, H. (2008) Stochastic Control in Insurance. Springer, Berlin.

[6] Albrecher, H. and Thonhauser, S. (2008) Optimal Dividend Strategies for a Risk Process under Force of Interest. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **43**, 134-149. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.03.012

[7] Cai, J., Gerber, H.U. and Yang, H. (2006) Optimal Dividends in an Ornstein-Uhlenbeck Type Model with Credit and Debit Interest. *North American Actuarial Journal*, **10**, 94-108. https://doi.org/10.1080/10920277.2006.10596250

[8] Fang, Y. and Wu, R. (2007) Optimal Dividend Strategy in the Compound Poisson Model with Constant Interest. *Stochastic Models*, **23**, 149-166. https://doi.org/10.1080/15326340601142271

[9] Zhu, J. (2015) Dividend Optimization for General Diffusions with Restricted Dividend Payment Rates. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2015**, 592-615. https://doi.org/10.1080/03461238.2013.872174

[10] Liu, Z., Jiao, Y. and Liu, G. (2017) Measure-Valued Generators of General Piecewise Deterministic Markov Processes. arXiv:1704.00938