**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2019, 8(5), 937-942
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.85106

Hans汉斯

# Poisson Algebra Structures on the Super-Virasoro Algebra

**Chensheng Ma, Panting Wang, Dong Liu***

School of Science, Huzhou University, Huzhou Zhejiang
Email: *liudong@zjhu.edu.cn

Received: May 1st, 2019; accepted: May 16th, 2019; published: May 23rd, 2019

## Abstract

**Poisson algebras are algebras with an algebra structure and a Lie algebra structure, both of which satisfy the Leibniz law. Super Virasoro algebra is a kind of infinite dimensional Lie superalgebra, which plays an important role in the quantum field theory. This paper mainly studies the Poisson structure on the super Virasoro algebra.**

## Keywords

**Super Poission Algebra, Leibniz Law, Super Virasoro Algebra**

# 超Virasoro代数上的Poisson超结构

**麻晨晟，王藩婷，刘　东***

湖州师范学院，理学院，浙江　湖州
Email: *liudong@zjhu.edu.cn

收稿日期：2019年5月1日；录用日期：2019年5月16日；发布日期：2019年5月23日

## 摘　要

**超Virasoro代数是一类无限维李超代数，在共形量子场理论中具有重要作用。本文研究超Virasoro代数上的Poisson结构，主要得到如下结论：超Virasoro代数上的任意Poisson结构都是平凡的。本文研究对于研究其它超共型代数上的Poisson结构有一定帮助。**

## 关键词

**Poisson超代数，Leibniz法则，超Virasoro代数**

*通讯作者。

文章引用: 麻晨晟, 王藩婷, 刘东. 超 Virasoro 代数上的 Poisson 超结构[J]. 应用数学进展, 2019, 8(5): 937-942.
DOI: 10.12677/aam.2019.85106

## 1. 引言

Virasoro 代数是一个特征零域上的无限维李代数，在二维共形量子场理论中具有重要作用，受到数学家和物理学家的关注。超 Virasoro 代数，也称作 $N=1$ 超共形代数(见[1])，可以看成是 Virasoro 代数的非平凡 $Z_2$ 扩张。这样的扩张主要有两种，它们分别是 Ramond 代数和 Neveu-Schwarz 代数。这两类代数在超弦理论和超共形场理论中有着密切的联系和重要的应用(见[2] [3])。确定超 Virasoro 代数上的其它代数结构问题是李代数研究中比较有意义的一项工作，论文[4]和[5]分别研究了超 Virasoro 代数上的左超对称代数结构和李超双代数结构。

Poisson 代数源于 Poisson 几何的研究，具有代数结构和李代数结构，乘法与李代数乘法之间满足 Leibniz 法则。近来许多人研究了结合的 Poisson 代数结构问题，如姚裕丰等研究了 Witt 代数和 Virasoro 代数上的 Poisson 代数结构[6]，靳全勤和佟洁在文[7] [8]中研究了 Toroidal 李代数等代数上的结合 Poisson 代数结构。

目前，非交换、非结合的 Poisson 代数的研究较少。近来部分论文研究了 Kac-Moody 李代数，W(2,2)以及扭 Heisenberg-Virasoro 代数上的非交换、非结合的 Poisson 代数结构(见[9]-[16])。本文在[10] [11]的基础上研究超 Virasoro 代数的 Poisson 超代数结构。本文的研究对进一步研究 $N = 2$ 超共形代数上的 Poisson 超代数结构有较大帮助。

在本文中，$\mathbb{Z}$ 表示整数环，$\mathbb{C}$ 表示复数域，所有的代数(向量空间)都定义在 $\mathbb{C}$ 上。

## 2. 预备知识

本节主要介绍相关超 Virasoro 代数以及 Poisson 超代数的相关概念。

**定义 1.2** [1]：令 $\varepsilon=0,\frac{1}{2}$，则超 Virasoro 代数 $\mathcal{N}[\varepsilon]$ 是指作为 $\mathbb{C}$ 上的向量空间有一组基 $\{L_m,G_r,C\mid m\in\mathbb{Z},r\in\mathbb{Z}+\varepsilon\}$，且满足如下关系式：

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{n+m}+\frac{1}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}C,$$

$$[L_m,G_r]=\left(\frac{m}{n}-r\right)G_{m+r},$$

$$[G_r,G_s]=2L_{r+s}+\frac{1}{12}(4r^2-1)\delta_{r+s,0}C,$$

$$[\mathcal{N}_{\bar{0}},C]=[\mathcal{N}_{\bar{1}},C]=0,\ \forall n,m,r,s\in\mathbb{Z}$$

其中向量空间 $\mathcal{N}=\mathcal{N}_{\bar{0}}\oplus\mathcal{N}_{\bar{1}}$，偶子空间 $\mathcal{N}_{\bar{0}}=span_{\mathbb{C}}\{L_m,C\mid m\in\mathbb{Z}\}$，奇子空间 $\mathcal{N}_{\bar{1}}=span_{\mathbb{C}}\{G_r\mid r\in\mathbb{Z}+\varepsilon\}$，显然，$N=1$ 超共形代数 $\mathcal{N}$ 的偶部分 $\mathcal{N}_{\bar{0}}$ 是 Virasoro 代数。

$\mathcal{N}$ 是 $(1-\varepsilon)\mathbb{Z}$-阶化的：$\mathcal{N}=\otimes_{i\in(1-\varepsilon)\mathbb{Z}}\mathcal{N}_i$。当 $\varepsilon=0$ 时，$\mathcal{N}_i=\mathrm{span}\{L_i,G_i,\delta_{i,0}C\}$；当 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 时，对任意 $i\in\mathbb{Z}$，$\mathcal{N}_i=span_{\mathbb{C}}\{L_i,\delta_{i,0}C\}$ 及 $\mathcal{N}_{i+\frac{1}{2}}=span_{\mathbb{C}}\left\{G_{i+\frac{1}{2}}\right\}$。其 Cantar 子代数为 $\mathcal{H}=\mathbb{C}L_0+\mathbb{C}C$。

记 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{N}$ 关于理想 $\mathbb{C}\{C\}$ 的商代数，则 $\mathcal{N}$ 为李超代数 $\mathcal{S}$ 的普遍中心扩张[14]。

**定义 1.3** [9]：域 $\mathbb{C}$ 上的 Poisson 超代数 $(A,*,[-,-])$ 是指 $\mathbb{C}$ 上的一个向量空间 $A$，同时具代数乘法$*$以及李超代数乘法$[-,-]$，且满足如下的 Leibniz 法则：

$$[a,b*c]=[a,b]*c+(-1)^{|a||b|}b*[a,c],\forall a,b,c\in A. \tag{2.1}$$

如果乘法$*$满足结合律，则称 Poisson 超代数 $A$ 是结合的；如果乘法$*$满足超交换律，则称 Poisson 超代数 $A$ 是超交换的。

超 Virasoro 代数的偶部分 Virasoro 代数 $\mathcal{N}_{\bar{0}}$ 的 Poisson 代数结构由[10]给出。

**引理 1.1** [10]：Virasoro 代数 $\mathcal{N}_{\bar{0}}$ 上的任何 Poisson 代数结构都具有如下形式：

$$L_m*L_n=-c_1(n-m)L_{m+n}-\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_1C=-c_1[L_m,L_n], \tag{2.2}$$

其余为零，其中 $c_1\in\mathbb{C}$。

## 3. 李超代数 $\mathcal{S}$ 上的 Poisson 超代数结构

本节主要讨论李超代数 $\mathcal{S}$ 上的 Poisson 超代数结构。

**引理 3.1**：若在李超代数 $\mathcal{S}$ 上存在一个代数乘积$*$使得 $(\mathcal{S},*,[-,-])$ 成为一个 Poisson 代数，则有

$$\mathcal{S}_i*\mathcal{S}_j\subseteq\mathcal{S}_{i+j},\ \forall i,j\in\mathbb{Z}.$$

**证明**：对于任意的 $x\in\mathcal{S}_i,y\in\mathcal{S}_j$ 有

$$[L_0,x*y]=[L_0,x]*y+x*[L_0,y]=-ix*y-jx*y=-(i+j)x*y.$$

即 $x*y\in\mathcal{S}_{i+j}$。因此对任意的 $i,j\in\mathbb{Z}$，都有 $\mathcal{S}_i*\mathcal{S}_j\subseteq\mathcal{S}_{i+j}$。

**定理 3.1**：$\mathcal{S}$ 上的任何 Poisson 代数结构都满足如下形式：

$$\begin{aligned}L_m*G_r&=-G_r*L_m=c_1(m-2r)G_{m+r},\\G_r*G_s&=2c_1L_{r+s}\end{aligned}$$

其中 $c_1$ 为任意常数，$m\in\mathbb{Z},r,s\in\mathbb{Z}+\varepsilon$。

**证明：情形一**：主要讨论 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 情形。$\varepsilon=0$ 类似。

由引理 2.1 及引理 3.1 可设，

$$\begin{aligned}L_m*L_n&=c_1(m-n)L_{m+n},\\L_m*G_r&=a_{m,r}G_{m+r},\\G_r*L_m&=b_{r,m}G_{m+r},\\G_r*G_s&=c_{r,s}L_{r+s}\end{aligned}$$

其中 $a_{m,r},b_{r,m},c_{r,s}\in C,\forall m,n\in\mathbb{Z},r,s\in\mathbb{Z}+\varepsilon$。

下面我们分四步，可计算出系数 $a_{m,r},b_{r,m},c_{r,s}$ 与 $c_1$ 的关系：

**步骤 1**：由于 $[L_k,L_m*G_r]=[L_k,L_m]*G_r+(-1)^{|L_k||L_m|}L_m*[L_k,G_r]$，

整理可得

$$\left(\frac{k}{2}-r-m\right)a_{m,r}=(k-m)a_{m+k,r}+\left(\frac{k}{2}-r\right)a_{m,r+k}. \tag{3.1}$$

在(3.1)中取 $k=m$，有 $\left(r+\frac{m}{2}\right)a_{m,r}=\left(r-\frac{m}{2}\right)a_{m,k+m}$。于是，

$$\frac{a_{m,r}}{r-\frac{m}{2}}=\frac{a_{m,r+m}}{r+m-\frac{m}{2}}=c_2,$$

故

$$a_{m,r}=c_2\left(r-\frac{m}{2}\right), \tag{3.2}$$

其中 $c_2\in\mathbb{C}$。

**步骤 2：** 由于 $\left[L_k,L_m*G_r\right]=\left[L_k,L_m\right]*G_r+(-1)^{|L_k||L_m|}L_m*\left[L_k,G_r\right]$，整理得

$$\left(\frac{k}{2}-r-m\right)b_{r,m}=\left(\frac{k}{2}-r\right)b_{r+k,m}+(k-m)b_{r,m+k}, \tag{3.3}$$

在(3.2)式中取 $k=m$，有 $\left(r+\frac{m}{2}\right)b_{r,m}=\left(r-\frac{m}{2}\right)b_{r+m,m}$ 于是，

$$\frac{b_{r,m}}{r-\frac{m}{2}}=\frac{b_{r+m,m}}{r+m-\frac{m}{2}}=c_3,$$

故

$$b_{r,m}=c_3\left(r-\frac{m}{2}\right), \tag{3.4}$$

其中 $c_3\in\mathbb{C}$。

**步骤 3：** 由 $\left[G_k,G_r*G_s\right]=\left[G_k,G_r\right]*G_s+(-1)^{|G_k||G_r|}G_r*\left[G_k,G_s\right]$，可得

$$\left(\frac{r+s}{2}-k\right)c_{r,s}=2b_{r,k+s}-2a_{k+r,s}, \tag{3.5}$$

在(3.5)中取 $k=r,r\neq s$ 再根据(3.2)，(3.4)得 $\frac{s-r}{2}c_{r,s}=2c_3\frac{r-s}{2}-2c_2(s-r)$。

在(3.5)中取 $k=r,s\neq r$ 再根据(3.2)，(3.4)得 $\frac{r-s}{2}c_{r,s}=2c_3(r-s)+2c_2\frac{s-r}{2}$。

可得 $c_2=-c_3$，从而

$$c_{r,s}=2c_3=-2c_2. \tag{3.6}$$

**步骤 4：** 根据 $\left[G_k,L_m*G_r\right]=\left[G_k,L_m\right]*G_r+(-1)^{|G_k||L_m|}L_m*\left[G_k,G_r\right]$，整理得

$$\left(\frac{m}{2}-k\right)c_{m+k,r}=-2a_{m,r}+2c_1(m-k-r). \tag{3.7}$$

在(3.7)中取 $k=r$，再根据(3.2)，(3.6)得

$$c_1=-c_2=c_3.$$

通过上述讨论可知 $\mathcal{S}$ 上的任何 Poisson 代数结构形式如下所示：

$$L_m*G_r=-G_r*L_m=c_1\left(\frac{m}{2}-r\right)G_{m+r},$$

$$G_r*G_s=2c_1L_{r+s}$$

其中 $c_1$ 为任意常数，$m\in\mathbb{Z}$，$r\in\mathbb{Z}+\varepsilon$。

## 4. 超 Virasoro 代数 $\mathcal{N}$ 上的 Poisson 超结构

根据上节内容，本节主要确定超 Virasoro 代数 $\mathcal{N}$ 上的 Poisson 超代数结构。

**定理 4.1**：超 Virasoro 代数 $\mathcal{N}$ 上的任何 Poisson 代数结构都具有如下形式

$$L_m * L_n = c_1(m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_1C = c_1[L_m, L_n], \tag{4.1}$$

$$L_m * G_r = -G_r * L_m = c_1\left(\frac{m}{2}-r\right)G_{m+r} = c_1[L_m, G_r], \tag{4.2}$$

$$G_r * G_s = 2c_1L_{r+s} - \frac{4r^2-1}{12}\delta_{r+s,0}c_1C = c_1[G_r, G_s], \tag{4.3}$$

其余为零，其中 $\forall m,n\in\mathbb{Z}, r,s\in\mathbb{Z}+\varepsilon, c_1\in\mathbb{C}$。

**证明**：下面分三个步骤来确定 $\mathcal{N}$ 上的 Poisson 乘法结构。

**步骤 1**：确定元素 $L_m, G_r$ 之间的 Poisson 乘法结构，分两种情形进行讨论。

根据引理 2.1，我们能得到元素 $L_m, L_n$ 之间的 Poisson 乘法结构满足上述结论。其余的 Poisson 超代数结构分两种情形进行讨论。

**情形 1**：当 $r+s\neq 0$ 时，由定理 3.1 得 $\mathcal{N}$ 上的任何 Poisson 代数结构满足(4.1)~(4.3)。

**情形 2**：当 $r=-s\neq 0$ 时，根据引理 3.1 及定理 3.1 可假设

$$G_r * G_{-r} = a_rL_0 + c_rC,$$

再根据等式

$$[L_k, G_{r-k} * G_{-r}] = [L_k, G_{r-k}] * G_{-m} + G_{r-k} * [L_k, G_{-r}],$$

我们有

$$\begin{cases}\left(\frac{3k}{2}-r\right)a_r + \left(r+\frac{k}{2}\right)a_{r-k} = 4kc_1\\ \left(\frac{3k}{2}-r\right)c_r + \left(r+\frac{k}{2}\right)c_{r+\frac{k}{2}} = 2\frac{k^3-k}{12}\end{cases} \tag{4.4}$$

在(4.4)式中取 $k=-2r\neq 0$，可得

$$a_r = 2c_1,\ c_r = \frac{4r^2-1}{12}c_1.$$

由此可知，

$$G_r * G_{-r} = 2c_1L_0 + \frac{4r^2-1}{12}c_1C.$$

**步骤 2**：确定 $G_r$ 与中心元素 $C$ 之间的 Poisson 乘法结构。注意到

$$C = 2[L_2, L_{-2}] - 8L_0$$

因此我们有

$$\begin{aligned} G_r * C &= 2G_r * [L_2, L_{-2}] - 8G_r * L_0\\ &= 2([L_2, G_r * L_{-2}] - [L_2, G_r] * L_{-2}) - 8G_r * L_0\\ &= 2c_1(r-3)(r+1)G_r - 2c_1(r+3)(r-1)G_r + 8c_1rG_r\\ &= 0 \end{aligned}$$

类似地，由下列等式

$$C*G_r=2[L_2,L_{-2}]*G_r-8L_0*G_r.$$

可得对任意的$r\in\mathbb{Z}+\varepsilon$，都有

$$C*G_r=0.$$

**步骤 3**：由[11]可知，中心元素 $C$ 之间的 Poisson 乘法结构：

$$C*C=0.$$

从定理 4.1 看出，超 Virasoro 代数上任一 Poisson 代数结构“$*$”都是其换位运算的常数倍，因此有：

**推论 4.1**：$N=1$ 超共形代数上没有非平凡的结合的 Poisson 代数结构。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(Nos. 11871249, 11371134)；浙江省自然科学基金项目(No. LZ14A010001)。

## 参考文献

[1] Yamanaka, I. and Sasaki, R. (1988) Super Virasoro Algebra and Solvable Supersymmetric Quantum Field Theories. *Progress of Theoretical Physics*, **79**, 1167-1184. https://doi.org/10.1143/PTP.79.1167

[2] Kac, V.G. (1997) Superconformal Algebra and Transitive Groups Actions on Quadrics. *Communications in Mathematical Physics*, **186**, 233-252. https://doi.org/10.1007/BF02885680

[3] Ademollo, M., *et al*. (1976) Supersymmetric Strings and Colour Confinement. *Physics Letters B*, **62**, 105-110. https://doi.org/10.1016/0370-2693(76)90061-7

[4] Kong, Xi. and Bai, C. (2008) Left-Symmetric Superalgebra Structures on the Super Virasoro Algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, **235**, 43-55. https://doi.org/10.2140/pjm.2008.235.43

[5] Yang, H. (2009) Lie Super-Bialgebra Structures on Super-Virasoro Algebra. *Frontiers of Mathematics in China*, **4**, 365-379. https://doi.org/10.1007/s11464-009-0012-x

[6] 姚裕丰. Witt 代数和 Virasoro 代数上的 Poisson 代数结构[J]. 数学年刊, 2013, 34A(1): 111-128.

[7] 靳全勤, 佟洁. Toroidal 李代数上的 Poisson 代数结构[J]. 数学年刊, 2007, 28A(1): 57-70.

[8] 佟洁, 靳全勤. 李代数的 Poisson 代数结构 II [J]. 数学杂志, 2010, 30(1): 145-151.

[9] Zusmanovich, P. (2013) A Compendium of Lie Structures on Tensor Products. *Journal of Mathematical Science*, **199**, 266-288. https://doi.org/10.1007/s10958-014-1855-6

[10] 李雅南, 高寿兰, 刘东. 李代数 W(2,2)上的 Poisson 结构[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2016, 37(3): 267-272.

[11] 赵晓晓, 高寿兰, 刘东. 扭 Heisenberg-Virasoro 代数上的 Poisson 结构[J]. 数学学报, 2016, 59(6): 775-782.

[12] Liu, D., Pei, Y. and Zhu, L. (2012) Lie Bialgebra Structures on the Twisted Heisenberg-Virasoro Algebra. *Journal of Algebra,* **359**, 35-48. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.03.009

[13] Liu, D. and Pei, Y. (2019) Deformations on the Twisted Heisenberg-Virasoro Algebra. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **40**, 111-116. https://doi.org/10.1007/s11401-018-0121-5

[14] Liu, D. and Jiang, C. (2018) Harish-Chandra Modules over the Twisted Heisenberg-Virasoro Algebra. *Journal of Mathematical Physics*, **49**, Article ID: 012901. https://doi.org/10.1063/1.2834916

[15] Liu, D. and Zhu, L. (2009) The Generalized Heisenberg-Virasoro Algebra. *Frontiers of Mathematics in China*, **4**, 297-310. https://doi.org/10.1007/s11464-009-0019-3

[16] Liu, D. (2016) Classification of Harish-Chandra Modules over Some Lie Algebras Related to the Virasoro Algebra. *Journal of Algebra*, **447**, 548-559. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.09.035

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org