Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(5), 958-964
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.85109

Hans汉斯

The John Theorem for Triangles in 2-Dimension Euclidean Space $\mathbb{R}^2$

Tongyi Ma[1], **Tian Xiao**[2]

[1]College of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye Gansu
[2]Class 1 of Grade 2016 of Information and Computation Science, Department of Mathematics, Hainan University, Haikou Hainan
Email: matongyi@126.com

Received: May 5th, 2019; accepted: May 20th, 2019; published: May 27th, 2019

Abstract

In this paper, a description of the John contact points of a regular triangle was given. It was proved that the John ellipse of any triangle is circle if and only if this triangle is regular and that the John ellipse of a regular triangle is its inscribed circle.

Keywords

Triangle, John Theorem, John Ellipse, Barycentric Coordinates

关于欧氏平面$\mathbb{R}^2$中三角形的John定理

马统一[1]，**肖　添**[2]

[1]河西学院数学与统计学院，甘肃 张掖
[2]海南大学数学系信息与计算科学2016级1班，海南 海口
Email: matongyi@126.com

收稿日期：2019年5月5日；录用日期：2019年5月20日；发布日期：2019年5月27日

摘　要

本文利用著名的John定理研究三角形的极值性质，刻画了正三角形的John接触点的特征，证明了任意一个三角形的John椭圆是圆当且仅当该三角形是正三角形。

文章引用: 马统一, 肖添. 关于欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中三角形的 John 定理[J]. 应用数学进展, 2019, 8(5): 958-964.
DOI: 10.12677/aam.2019.85109

关键词

三角形，Hohn椭圆，John定理，重心坐标

1. 引言

早在 1948 年，F. John 证明了 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的每一个凸体都包含一个唯一的体积最大的椭球，现在我们把这个椭球称为该凸体的 John 椭球，当这个 John 椭球是欧氏单位球 B 的时候，F. John 给出了一组充分必要条件，从而把这个单位球刻画了出来。这就是下面著名的 John 定理(参见[1]-[6])。

定理 A：n-维欧氏空间 $\mathbb{R}^n\ (n \geq 2)$ 中的每一个凸体 K 都包含一个唯一的体积最大的椭球。这个椭球是球当且仅当 $B \subset K$ 并且对于某个正整数 $m \geq n$，存在一列正实数 $\{c_i\}_1^m$，同时在 K 的边界上存在一列单位向量 $\{u_i\}_1^m$ 满足：

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i = I_n, \tag{1.1}$$

和

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i = 0, \tag{1.2}$$

这里，算子 $u_i \otimes u_i$ 定义为对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$u_i \otimes u_i(x) = \langle u_i, x \rangle u_i$，而 I_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的单位算子。

条件(1.1)表明 $\{u_i\}_1^m$ 类似 $\mathbb{R}^n$ 中的一组正交基，它的一种等价表示是，对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$，都有下面的等式成立：

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle u_i, x \rangle^2, \tag{1.3}$$

或者

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i \rangle u_i, \tag{1.4}$$

其中，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中通常的内积。关于上述等价关系的详细论述可参考 K. Ball 的文章[2]。

我们把凸体 K 的边界上满足(1.1)和(1.2)的点称为接触点。$\mathbb{R}^n$ 中最简单的凸体就是立方体 $[-1,1]^n$，显然它的接触点就是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准基向量 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 以及 $\{-e_1, \cdots, -e_n\}$。

本文的主要目的是利用 John 定理对 2 维欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中三角形的一些性质做些描述，并得到如下两个结论。

定理 1：正三角形的 John 椭圆就是它的内切圆。

定理 2：任意一个三角形的 John 椭圆是圆当且仅当该三角形是正三角形。

2. 准备知识

在定理的证明中，我们需要用到重心坐标的概念。众所周知，重心坐标是距离几何中的一个常用概

念，在三角形中它的定义如下(见[5] [7])：

设 A 是 2 维欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中以 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 为顶点的一个三角形，且 M 是 $\mathbb{R}^2$ 中任意一点，记以 $\{M,A_2,A_3\}$，$\{A_1,M,A_3\}$ 和 $\{A_1,A_2,M\}$ 为顶点的三角形的面积分别为 S_1,S_2 和 S_3，则我们称面积比

$$S_1:S_2:S_3=\mu_1:\mu_2:\mu_3$$

为点 M 关于三角形 A 的重心坐标，记为 $M=\mu_1:\mu_2:\mu_3$。

从上述定义可知，对于某个点 M 的重心坐标可记为 $(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，也可记为 $(k\mu_1:k\mu_2:k\mu_3)$，即其记法并非唯一，是可以相差一个非零的常数因子 k 的。

对于 M 点的重心坐标 $(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$，若令 $\lambda_i=\dfrac{\mu_i}{\sum_{j=1}^{3}\mu_j},i=1,2,3$，则 $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=1$，则我们称 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 为点 M 的规范重心坐标，这就是有限元法中的面积坐标。

假设 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 是某一个正三角形的顶点，且标准单位圆 B 是它的内切圆，我们记 B 与顶点 A_1,A_2,A_3 所对的边 $\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1}$ 和 $\overline{A_1A_2}$ 上的切点分别为 B_1,B_2 和 B_3，边 $\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1}$ 和 $\overline{A_1A_2}$ 上过点 B_1,B_2 和 B_3 的单位外法向量分别为 u_1,u_2,u_3。根据重心坐标定义，通过简单的计算可得 B_1,B_2 和 B_3 的重心坐标分别为：

$$\left(0:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}:0:\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:0\right)。$$

因此，对任意一个正三角形，它的接触点的重心坐标具有如下的形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中矩阵的每一行向量代表一个接触点的重心坐标。

3. 定理 1 的证明

根据 John 定理，我们只要证明正三角形的内切圆的切点满足 John 定理即可。首先约定 2 维欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的正三角形及相关元素的记号同第 2 节。在此规定下，由重心坐标的定义不难求得坐标原点的重心坐标为 $(1:1:1)$。令 $c_i=\frac{2}{3},i=1,2,3$，则

$$\sum_{i=1}^{3}c_iB_i=\frac{2}{3}\left(0:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}:0:\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:0\right)=(1:1:1)。$$

于是，我们验证了 John 定理中的(1.2)式。

下面我们将验证向量 u_1,u_2,u_3 满足 John 定理中的(1，1)式。事实上我们只需证明与(1.1)式等价的式子如下，即对任意 $x\in\mathbb{R}^2$，都有下面的等式成立：

$$x=\sum_{i=1}^{3}c_i\langle x,u_i\rangle u_i, \tag{3.1}$$

其中，$c_i=\frac{2}{3},i=1,2,3$。

由于我们所考虑的凸体是 $\mathbb{R}^2$ 中三角形 $A=\Delta A_1A_2A_3$，所以它的 3 个边 $a_1=\overline{A_2A_3}$，$a_2=\overline{A_3A_1}$ 和

$a_3 = \overline{A_1A_2}$ 上的单位法向量 u_1,u_2,u_3 所形成的空间必为 $\mathbb{R}^2$，也即

$$\operatorname{Span}(u_1,u_2,u_3) = \mathbb{R}^2。$$

因此，对任意的向量 $x \in \mathbb{R}^2$，一定存在实数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，使得

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3。$$

分别以 u_1,u_2,u_3 与上式的两端作内积，我们可得

$$\begin{cases} \langle u_1,x\rangle = \alpha_1\langle u_1,u_1\rangle + \alpha_2\langle u_1,u_2\rangle + \alpha_3\langle u_1,u_3\rangle, \\ \langle u_2,x\rangle = \alpha_1\langle u_2,u_1\rangle + \alpha_2\langle u_2,u_2\rangle + \alpha_3\langle u_2,u_3\rangle, \\ \langle u_3,x\rangle = \alpha_1\langle u_3,u_1\rangle + \alpha_2\langle u_3,u_2\rangle + \alpha_3\langle u_3,u_3\rangle. \end{cases}$$

若记 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\beta = (\langle u_1,x\rangle,\langle u_2,x\rangle,\langle u_3,x\rangle)$，且向量 u_1,u_2,u_3 的 Gram 矩阵为

$$G = G(u_1,u_2,u_3) = \begin{pmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle & \langle u_1,u_3\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle & \langle u_2,u_3\rangle \\ \langle u_3,u_1\rangle & \langle u_3,u_2\rangle & \langle u_3,u_3\rangle \end{pmatrix}。$$

因此，上面的方程可改写为

$$G\alpha^{\mathrm{T}} = \beta^{\mathrm{T}}, \tag{3.2}$$

其中 α^{T}，β^{T} 分别表示 α 和 β 的转置。

考虑到 G 的任一元素 $\langle u_i,u_j\rangle (1 \le i \le j \le 3)$ 是三角形的两个边 a_i 与 a_j 对应的单位外法向量 u_i 与 u_j 的夹角的余弦，又由于法向量 u_i 与 u_j 的夹角与三角形的边 a_i，a_j 所形成的夹角 $\angle(a_i,a_j)$ 是互补的，所以

$$\langle u_i,u_j\rangle = -\cos\angle(a_i,a_j)。$$

我们仍然用 a_1,a_2,a_3 分别表示三角形的边 $\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1},\overline{A_1A_2}$ 的边长。对于 $\cos\angle(a_i,a_j)$，我们有

$$\cos\angle(a_i,a_j) = \frac{a_{ji}}{a_j},$$

其中 a_{ji} 表示边 a_j 沿 $-u_i$ 方向向边 a_i 作垂直投影所得到的投影的长度。

为了得到 Gram 矩阵 G 的值，我们只需计算 $\frac{a_{ji}}{a_j}$ 的值即可。由于我们所考虑的是正三角形，所以对于 $i \ne j$ 所有的 $\frac{a_{ji}}{a_{ij}} = \frac{1}{2}$，对于 $i = j$ 所有的 $\frac{a_{ji}}{a_j} = -1$。这样就得到了矩阵 G，即

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}。$$

由此，把(1.2)和(3.2)式联立可得

$$\begin{cases} G\alpha^{\mathrm{T}} = \beta^{\mathrm{T}}, \\ \sum_{i=1}^{3}\langle u_i,x\rangle = 0. \end{cases}$$

将 $\alpha=\left(\frac{2}{3}\langle u_1,x\rangle,\frac{2}{3}\langle u_2,x\rangle,\frac{2}{3}\langle u_3,x\rangle\right)$ 代入上面的方程组可知 α 是该方程组的一组解。因此 $\mathbb{R}^2$ 中的任意一点可以表示成(3.1)式的形式，定理 1 证毕。

4. 定理 2 的证明

首先，我们介绍 H. J. Brascamp 和 E. H. Lieb 建立的一个著名不等式作为引理(参见[3] [4])，它可以被看作卷积不等式的推广，被称为 Brascamp-Lieb 不等式。

引理 4.1： 设 $\{u_i\}_1^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列单位向量，$\{c_i\}_1^m$ 是一列正实数，使得它们满足下面的等式：

$$\sum_{i=1}^{m}c_iu_i\otimes u_i=I_n\text{ 。}$$

如果 $f_i:\mathbb{R}\to(0,\infty),i=1,\cdots,m$ 是一列可积函数，那么

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{m}f_i\left(\langle u_i,x\rangle\right)^{c_i}\mathrm{d}x\le\prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}}f_i(t)\mathrm{d}t\right)^{c_i}\text{ 。}\tag{4.1}$$

F. Barthe 在文[3]中给出了引理 4.1 等式成立的一组必要条件，即下面的引理。

引理 4.2： 设 $\{u_i\}_1^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列单位向量，$\{c_i\}_1^m$ 是一列正实数，使得它们满足下面的等式：

$$\sum_{i=1}^{m}c_iu_i\otimes u_i=I_n\text{ 。}$$

如果 $\{f_i\}_1^m$ 是 $L_1(\mathbb{R})$ 中不全为零的函数，并且 $\{f_i\}_1^m$ 不都是高斯分布的密度函数，那么(4.1)式取等式的必要条件是

$$m=n\text{ ，}$$

并且 $\{u_i\}_1^m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基。

现在我们给出定理 2 的证明。

由定理 1 立即可得定理 2 的充分性。下面我们证明定理 2 的必要性，即如果三角形 A 的 John 椭圆是欧氏单位圆 B，那么三角形 A 是正三角形。

首先我们注意到如果三角形 A 的 John 椭圆是单位圆 B，那么这个圆一定是该三角形的内切圆。如若不然，那么不妨设 B 与三角形的某个边 a_i 不相切，设边 a_i 的外法向量是 u_i，那么一定存在一个正实数 ε，使得单位圆 B 沿方向 u_i 平行移动 ε 后，单位圆 B 不在与三角形 A 的任何边相切。这时一定存在另一个正实数 ε'，如果我们对单位圆 B 沿方向 u_i 平行移动 ε' 后，再令单位圆 B 做一个膨胀 r，使得膨胀后得到的圆 rB 成为三角形 P 的内切圆。这与我们的条件——单位圆 B 是 John 椭圆相矛盾。

因为三角形 A 的内切圆是其 John 椭圆，由 John 定理，存在一组正实数 $\{c_i\}_1^3$ 以及在 A 的边界上存在一组单位向量 $\{u_i\}_1^3$，使得

$$\sum_{i=1}^{3}c_iu_i\otimes u_i=I_2\text{ ，}\tag{4.2}$$

和

$$\sum_{i=1}^{3}c_iu_i=0\text{ 。}\tag{4.3}$$

设 $K=\left\{x\in\mathbb{R}^2:\langle x,u_i\rangle\le1,1\le i\le3\right\}$，则 K 也是 $\mathbb{R}^2$ 中的三角形。由于 $\{u_i\}_1^3$ 是 A 和 B 的接触点，所以

$$A\subset\left\{x\in\mathbb{R}^2:\langle x,u_i\rangle\le1,1\le i\le3\right\}=K\text{ 。}$$

注意到 B 也是三角形 A 的内切圆且 K，A 与 B 有相同的切点 $\{u_i\}_1^3$，所以我们有

$$A = K\text{。}$$

现在问题转化为只需要证明 K 是正三角形即可。在下面的讨论中，我们把 $\mathbb{R}^3$ 视为 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$，令

$$v_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-u_i, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{R}^3, i = 1,2,3\text{。}$$

$$d_i = \frac{3}{2}c_i, i = 1,2,3\text{。}$$

容易验证 $\{u_i\}_1^3$ 是单位向量，并且结合(4.2)和(4.3)，我们有

$$\sum_{i=1}^{3} d_i v_i \otimes v_i = I_3\text{。}$$

定义函数列 $\{f_i\}_1^k$ 如下：

$$f_i(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}, & \text{如果} t \ge 0, \\ 0, & \text{如果} t < 0. \end{cases}$$

对于任意的 $x \in \mathbb{R}^3$，令

$$F(x) = \prod_{i=1}^{3} f_i\left(\langle v_i, x\rangle\right)^{d_i},$$

由引理 4.1，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^3} F(x) \le \prod_{i=1}^{3}\left(\int_{\mathbb{R}} f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)^{d_i} = 1\text{。} \tag{4.4}$$

现在，假设 $x = (y, r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$，对于每一个 i，我们有

$$\langle v_i, x\rangle = \frac{r}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle u_i, y\rangle, i = 1,2,3\text{。}$$

因为 $\sum_{i=1}^{3} c_i u_i = 0$，则存在 j (仅依赖于 y)使得 $\langle u_j, y\rangle \ge 0$。因此，如果 $r < 0, \langle v_j, x\rangle < 0$，则 $F(x) = 0$。

另一方面，如果 $r \ge 0$，则对于每一个 i，当 $\langle u_i y\rangle \le \frac{r}{\sqrt{2}}$ 时，$F(x) \ne 0$。从而我们可得

$$\begin{aligned} F(x) &= \exp\left[-\sum_{i=1}^{3} d_i\left(\frac{r}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle u_i, y\rangle\right)\right] \\ &= \exp\left(-\sqrt{3}r + \sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle \sum_{i=1}^{3} c_i u_i, y\right\rangle\right) \\ &= \exp\left(-\sqrt{3}r\right) \end{aligned}$$

因此对于每一个 $r \ge 0$，我们可得 F 在平面 $\{x : x_3 = r \ge 0\}$ 上的积分为：

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} S\left(\frac{r}{\sqrt{2}}K\right) = \mathrm{e}^{-\sqrt{3}}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 S(K),$$

其中 $S(K)$ 表示三角形 K 的面积。因此由(4.4)式可得

$$1 \ge S(K)\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{3}r}\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 \mathrm{d}r = \frac{S(K)}{3\sqrt{3}},$$

即

$$S(K) \le 3\sqrt{3} \text{。} \tag{4.5}$$

注意到(4.5)式的右端正是以单位圆 B 为内切圆的正三角形的面积。

考虑到函数 $\{f_i\}_1^3$ 的构造，并对(4.4)式应用引理 4.2，可得(4.4)式等式成立的条件是 $\{v_i\}_1^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组正交基。任取这组正交基中的两个向量

$$v_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-u_i, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

和

$$v_j = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-u_j, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

我们有

$$0 = \langle v_i, v_j \rangle = \frac{2}{3}\langle u_i, u_j \rangle + \frac{1}{2},$$

所以

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{3}{4}, i \ne j$$

是一个常数。由于 $\{u_i\}_1^3$ 是三角形 K 的三个边上的单位外法向量，因此，K 是正三角形。定理 2 证毕。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(No: 11561020)。

参考文献

[1] Ball, K. (1992) Ellipsoids of Maximal Volume in Convex Bodies. *Geometriae Dedicata*, **41**, 241-250. https://doi.org/10.1007/BF00182424

[2] Ball, K. (1997) An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry. In: Levy, S., Ed., *Flavors of Geometry*, Cambridge University Press, New York, 1-58.

[3] Barthe, F. (1998) On a Reverse Form of the Brascamp-Lieb Inequality. *Inventiones Mathematicae*, **134**, 335-361. https://doi.org/10.1007/s002220050267

[4] Brascamp, H.J. and Lieb, E.H. (1976) Best Contants in Young's Inequality, Its Converse, and Its Generalization to More than Three Functions. *Advances in Mathematics*, **20**, 151-173. https://doi.org/10.1016/0001-8708(76)90184-5

[5] Coxeter, H.S.M. (1969) Barycentric Coordinates. §13.7 in Introduction to Geometry, 2nd Edition, Wiley, New York, 216-221.

[6] John, F. (1948) Extremum Problems with Inequatlities as Subsidiary Conditions. Courant Anniversary Volume, Interscience, New York, 187-204.

[7] Lin, S., Ge, X. and Leng, G.-S. (2006) The John Theorem for Simplex. *Journal of Shanghai University* (*English Edition*), **10**, 487-490. https://doi.org/10.1007/s11741-006-0043-4

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org