

An Approach of High Order Numerical Flux

Yanjing Wen¹, Yuyue Yang^{1*}, Yanxia Wei²

¹Xiangtan University, Xiangtan Hunan

²Zhongke Soft Technology Co., LTD., Beijing

Email: *yyy@xtu.edu.cn

Received: May 9th, 2019; accepted: May 24th, 2019; published: May 31st, 2019

Abstract

Referring to the construction idea of the MUSCL scheme, we present a construction method for high-order numerical fluxes. The higher order numerical flux is applied to the finite volume (difference) ENO, WENO and DG schemes to obtain single step higher order Semi-Lagrangian scheme. For the one-dimensional Euler equations, this paper presents a new feature line processing scheme in the feature space, which solves the difficulty that the Semi-Lagrangian method is difficult to generalize to multidimensional. Numerical experiments show that the new format is smaller than the original format, the efficiency is higher, and the simulation effect on the shock wave is also greatly improved.

Keywords

MUSCL, Semi-Lagrangian, High-Order Numerical Flux, One-Step High Order Semi-Lagrangian Scheme, Euler Equations, Sod Shock Tube Problem

一种高阶数值通量的探讨

温燕静¹, 杨玉月^{1*}, 魏雁霞²

¹湘潭大学数学系, 湖南 湘潭

²中科软科技股份有限公司, 北京

Email: *yyy@xtu.edu.cn

收稿日期: 2019年5月9日; 录用日期: 2019年5月24日; 发布日期: 2019年5月31日

摘要

参考MUSCL格式的构造思想, 我们给出了一种高阶数值通量的构造方法。将高阶数值通量应用于有限体

*通讯作者。

文章引用: 温燕静, 杨玉月, 魏雁霞. 一种高阶数值通量的探讨[J]. 应用数学进展, 2019, 8(5): 990-997.

DOI: 10.12677/aam.2019.85113

积(差分)ENO, WENO和DG等格式得到单步高阶Semi-Lagrangian格式。针对一维Euler方程组,本文在特征空间给出了一种新的特征线的处理方案,解决了Semi-Lagrangian方法难以推广到多维的难点。数值实验表明,新格式比原格式误差更小,效率更高,对激波的模拟效果也有较大提升。

关键词

MUSCL, Semi-Lagrangian, 高阶数值通量, 单步高阶Semi-Lagrangian格式, Euler方程组, Sod激波管问题

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1959年, Godunov首次提出以Riemann问题解为基础来构造网格物理量均值的Godunov格式,它有效地解决了所有内部状态变量的局部黎曼问题[1][2]。随后, Van Leer首次讨论了二阶Godunov格式的构造得到了MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws)格式,这个格式包括了保单调性的插值和利用Riemann解得到的迎风通量,提高了数值精度和分辨率[2]。MUSCL格式已经被许多人研究[3][4][5],并被广泛用于科学和工程问题的模拟[5]。

1959年, Wiin-Nielsen提出了一种修正轨迹方法[6],随后Sawyer将其发展为Semi-Lagrangian方法[7]。该方法具有固定的(欧拉)数值网格,根据Riemann不变量沿特征线不变的性质,从而推进每个时间步,使得时间步长不受CFL条件的限制,减少计算工作量和数值扩散[8]。Semi-Lagrangian方法成功地推广到了有限差分,有限元和谱方法,并广泛应用于天气预报,海洋学模型的数值模拟和线性对流的建模[9][10]。1982年, Robert将半隐式(SI)和半拉格朗日(SL)这两种方法相结合,在NWP模型中实现了显著的效率增益,为许多环境应用产生了许多有效的SISL模型[11]。1999年, Strain将水平集方法和半拉格朗日方法相结合,能有效、自适应和模块化求解几何运动界面问题[10][12]。2006年, Bonaventura和Restelli等人将DG方法与半拉格朗日方法相结合为SLDG,能有效地融合了两种方法优点,又避免了缺点[13],对于shallow water方程模拟,SLDG具有较高的精度和有效性,并可自动选择局部逼近程度[11]。2010年, Qiu等人将Strang时间分裂与空间高阶WENO重构相结合,应用于Semi-Lagrangian方法来求解Vlasov方程,比使用显式时间步长的Vlasov-Poisson系统的欧拉公式计算更高效,更灵活[14]。

然而,对于一维或高维Euler方程组,求解特征线方程仍然是Semi-Lagrangian方法的难点。2011年, Lentine等人基于文[15]提出的分裂方法,用保守Semi-Lagrangian对流代替Meno对流格式求解方程组对流项,但局部产生虚假振荡[16]。目前尚未在现有文献中发现更好的处理方案。2015年,吴浪根据文[17]提出的方法,针对守恒律方程给出了几种高阶Semi-Lagrangian格式,通过数值模拟验证了该方法的高阶精度和无振荡性质[18]。处理过程用到了一维Euler方程组的Riemann不变量,并反解出原物理量。这个过程增加了计算量,针对不同维数Euler方程组需要给出不同的Riemann不变量,不方便推广到多维问题,即便是通过交替方向法也不行。

本文给出了一种高阶数值通量的构造方法,将其应用于有限体积(差分)ENO, WENO和DG,即相应的Semi-Lagrangian方法。针对于一维Euler方程组,在特征空间上给出了一种新的处理特征线的方法。数值实验表明:高阶数值通量能应用于有限体积(差分)ENO, WENO和DG等格式,针对Euler方程组的特

征线处理方法能保持空间离散格式本身的本质无震荡性, 能获得更高的分辨率且具备更高的计算效率。

2. 二阶数值通量的推导

为了推导双曲型方程数值计算格式中的二阶数值通量, 我们考察如下方程

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

已知 $u(x, t_n)$ 在第 j 个单元 ($I_j := [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$) 端点的单侧极限分别为 $u_{j+1/2}^-(t_n)$ 和 $u_{j-1/2}^+(t_n)$, 容易给出它在 I_j 内的插值多项式

$$p_j(x) = u(x, t_n) = u_{j+1/2}^-(t_n) + \frac{u_{j+1/2}^-(t_n) - u_{j-1/2}^+(t_n)}{h_j} (x - x_{j+1/2}), \quad (3)$$

其中 $h_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ 。

过点 $(x_{j+1/2}, t_{n+1})$ 的特征线与直线 $t = t_n$ 相交于一点 X

$$\frac{d}{ds} X(x, t; t+s) = \frac{\partial}{\partial u} f(u(X(x, t; t+s), t+s)) = h(X(x, t; t+s), t+s), \quad (4)$$

其中 $X(x, t; t) = x$ 。利用一阶 Runge-Kutta 方法, 可得

$$X = x_{j+1/2} - \Delta sh(X(x_{j+1/2}, t_n; t_n + s), t_n + s), \quad (5)$$

将 X 代入 $u(x, t_n)$, 得

$$u(X, t_n) = u_{j+1/2}^-(t_n) + \frac{u_{j+1/2}^-(t_n) - u_{j-1/2}^+(t_n)}{h_j} \Delta sh(X(x_{j+1/2}, t_n; t_n + s), t_n + s). \quad (6)$$

其中 $u(X, t_n)$ 是近似代替 $u(x_{j+1/2}, t_{n+1})$ 。

最后, 利用梯形公式可计算出 $[t_n, t_{n+1}]$ 内 $x_{j+1/2}$ 处的二阶数值通量

$$\hat{f}_{j+1/2} = \frac{f(u(X, t_n)) + f(u(x_{j+1/2}, t_n))}{2}. \quad (7)$$

3. 二阶数值通量在 DG 格式的应用

为了将二阶数值通量应用于 DG 格式, 我们将方程(1)两边同时乘 $\varphi(x)$, 并在时空单元 Ω_j 上求积分,

$$\iint_{\Omega_j} (\partial_t u_h + \partial_x f(u_h)) \varphi(x) dx dt = 0, \quad (8)$$

其中 $\varphi(x)$ 为区间 I_j 上的光滑函数。由格林公式, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (u_h(x, t_{n+1}) - u_h(x, t_n)) \varphi(x) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u_h(x_{j+1/2}, t)) \varphi(x_{j+1/2}) dt \\ & - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u_h(x_{j-1/2}, t)) \varphi(x_{j-1/2}) dt - \iint_{\Omega_j} f(u_h) \partial_x \varphi(x) dx dt = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

我们再将方程(2)两边同乘 $\varphi(x)$ 并在单元 I_j 上积分得

$$\int_{I_j} u_h(x, 0) \varphi(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) \varphi(x) dx. \quad (10)$$

这样就得到了方程(1-2)的弱形式(9-10)。

参照经典二阶 DG 格式, 取 Legendre 多项式 $P_l(x)$ 为局部基函数, 并设 $u_h(x, t) = \sum_{l=0}^k u_j^l(t) \varphi_l(x)$, 其中 $\varphi_l(x) = P_l(\xi) = P_l\left(\frac{x-x_j}{\Delta x/2}\right)$ 。将方程(9)中的 $\varphi(x)$ 替换成 $\varphi_l(x)$, 则有

当 $l=0$ 时, (9)式简写为

$$u_j^0(t_{n+1}) = u_j^0(t_n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}), \quad (11)$$

当 $l=1$ 时, (9)式简写为

$$u_j^1(t_{n+1}) = u_j^1(t_n) - \frac{3\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2} + \hat{f}_{j-1/2}) + \frac{3}{\Delta x} \iint_{\Omega_j} f(u_h) \partial_x \varphi_1(x) dx dt. \quad (12)$$

将(12)式中的二重积分项简记为 K , 利用如下梯形公式计算

$$K = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\int_{I_j} f(u_h(x, t_{n+1})) dx + \int_{I_j} f(u_h(x, t_n)) dx \right), \quad (13)$$

其中 $\int_{I_j} f(u_h(x, t_n)) dx$ 继续利用梯形公式(或其他积分公式), $u_h(x, t_{n+1})$ 由方程(7,11)得到的单元均值 $u_j^0(t_{n+1})$ 来近似代替, 得

$$K = \Delta t \left[f(u_j^0(t_{n+1})) + \frac{1}{2} (f(u_h(x_{j+1/2}, t_n)) + f(u_h(x_{j-1/2}, t_n))) \right]. \quad (14)$$

再利用上一节所介绍的二阶数值通量的推导方法, 可求解(12)式中的 $\hat{f}_{j+1/2}$ 这样, 我们得到相应的单步二阶 DG 格式(10)~(12)。

4. 一维 Euler 方程组上的二阶数值通量的推导

一维 Euler 方程组可以表示为

$$\mathbf{u}_t + [F(\mathbf{u})]_x = 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho u, \rho E)^T, \quad F(\mathbf{u}) = (\rho u, \rho u^2 + p, (\rho E + p)u)^T$$

其中压力 $p = (\gamma - 1) \left(\rho E + \frac{1}{2} \rho u^2 \right)$, 比热比 $\gamma = 1.4$ 。Jacobian 矩阵 $A = \frac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$, A 的特征值为

$$\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u + c,$$

方程组(15)化成特征空间形式

$$\mathbf{u}_t + (R\Lambda R^{-1}\mathbf{u})_x = 0,$$

其中 R 为右特征矩阵, R^{-1} 为左特征矩阵, $\Lambda = \text{diag}(u - c, u, u + c)$ 。

已知 $\mathbf{u}(x, t_n)$ 在第 j 个单元 ($I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$) 端点的单侧极限分别为 $\mathbf{u}_{j+1/2}^-(t_n)$ 和 $\mathbf{u}_{j-1/2}^+(t_n)$ 可以给出它在 I_j 内的插值多项式

$$p_j(x, t_n) = \mathbf{u}(x, t_n) = \mathbf{u}_{j+1/2}^-(t_n) + \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^-(t_n) - \mathbf{u}_{j-1/2}^+(t_n)}{h_j} (x - x_{j+1/2}),$$

特征线方程 $\frac{dX}{dt} = -\lambda$ 与直线 t_n 相交, 有

$$\frac{d}{ds} X_k(x, t; t+s) = -\lambda_k(X_k(x, t; t+s), t+s), k = 1, 2, 3 \tag{16}$$

利用二阶 Runge-Kutta 法求解常微分方程(16), 再将 X_k 代入 $u(x, t_n)$ 得到 $u_k(X_k, t_n)$ 。令

$$W_k(X_k, t_n) = R^{-1}u_k(X_k, t_n) = (W_{k1}, W_{k2}, W_{k3})^T, \text{ 则 } W(x_{j+1/2}, t_{n+1}) = (W_{11}, W_{22}, W_{33})^T。$$

最后, 利用梯形公式可计算出 $[t_n, t_{n+1}]$ 内 $x_{j+1/2}$ 处的二阶数值通量

$$\hat{F}_{j+1/2} = \frac{F(u(x_{j+1/2}, t_n)) + F(u(x_{j+1/2}, t_{n+1}))}{2} = \frac{R\Lambda(W(x_{j+1/2}, t_n) + W(x_{j+1/2}, t_{n+1}))}{2}。 \tag{17}$$

5. 数值算例

求解方程(1)的守恒型有限体积(差分)格式通常可以写成

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}), \tag{18}$$

我们将由公式(7)或(17)计算所得的通量替代(18)式中的 \hat{f} , 这样就得到单步二阶格式。

算例 1: 一维 Burger 方程

考虑方程(1-2), 其中 $f(u) = u^2/2, (x, t) \in [0, 2\pi] \times [0, 2], u_0(x) = \sin x + 0.5$, 采用周期边界条件。为了考

Table 1. Numerical error table for single-step second-order ENO, DG format and original format at $t = 0.5$

表 1. 单步二阶 ENO, DG 格式与原格式在 $t = 0.5$ 时刻的数值误差表

N	FV-ENO2-HNF $\ u_h - u\ _l$				FV-ENO2 $\ u_h - u\ _l$			
	误差	阶数	CPU(ms)	误差比	误差	阶数	CPU(ms)	误差比
100	6.33e-004	—	0.00e+000	1.00	1.14e-003	—	0.00e+000	1.80
200	1.65e-004	1.93	1.00e+000	1.00	3.20e-004	1.84	1.00e+000	1.94
400	4.34e-005	1.93	4.00e+000	1.00	8.66e-005	1.89	7.00e+000	1.99
FD-ENO2-HNF $\ u_h - u\ _l$								
100	5.04e-004	—	0.00e+000	1.00	1.04e-003	—	0.00e+000	2.06
200	1.33e-004	1.92	1.00e+000	1.00	2.87e-004	1.87	3.00e+000	2.15
400	3.50e-005	1.93	5.00e+000	1.00	7.71e-005	1.90	1.10e+001	2.20
DG2-HNF $\ u_h - u\ _l$								
100	1.59e-004	—	1.00e+000	1.00	6.14e-004	—	4.00e+000	3.86
200	4.01e-005	1.99	2.00e+000	1.00	1.47e-004	2.06	1.90e+001	3.66
400	1.02e-005	1.98	9.00e+000	1.00	3.37e-005	2.09	7.30e+001	3.30

Table 2. Numerical error meter of third order WENO scheme in = 0.5 FVWENO3-HNF

表 2. $t = 0.5$ 时三阶 WENO 格式的误差表

N	FV-WENO3-HNF l^1		FV-WENO3 l^1		FD-WENO3-HNF l^1		FD-WENO3 l^1	
	误差	阶数	误差	阶数	误差	阶数	误差	阶数
100	5.54e-004	—	9.06e-004	-	4.58e-004	—	8.70e-004	-
200	1.42e-004	1.96	2.11e-004	2.09	1.22e-004	1.91	2.06e-004	2.07
400	3.63e-005	1.97	3.49e-005	2.59	3.16e-005	1.94	3.61e-005	2.51
800	9.04e-006	2.01	3.28e-006	3.41	7.87e-006	2.01	3.62e-006	3.32

察格式的截断误差阶, 我们给出 $t = 0.5$ (尚未产生间断) 的误差表, 见表 1~表 2。其中后缀“HNF”表示使用公式(7)的单步二阶格式, 另一个表示使用相应的二阶 SSP Runge-Kutta 时间离散格式。

由表 1~表 2 可以看出: 1) 本文给出的二阶数值通量能应用于 ENO, WENO 和 DG 等格式, 得到相应的单步二阶格式。2) 单步二阶格式的计算误差比相应原格式更小(三阶 WENO 格式当网格充分细密时出现超收敛, 误差更小)。3) 单步二阶格式所耗 CPU 时间更少, 当 $N = 6400$ 时, FV-ENO2-HNF 格式比原格式节约了 48%, FD-ENO2-HNF 格式比原格式节约了 56%, DG2-HNF 格式比原格式节省了 88%。

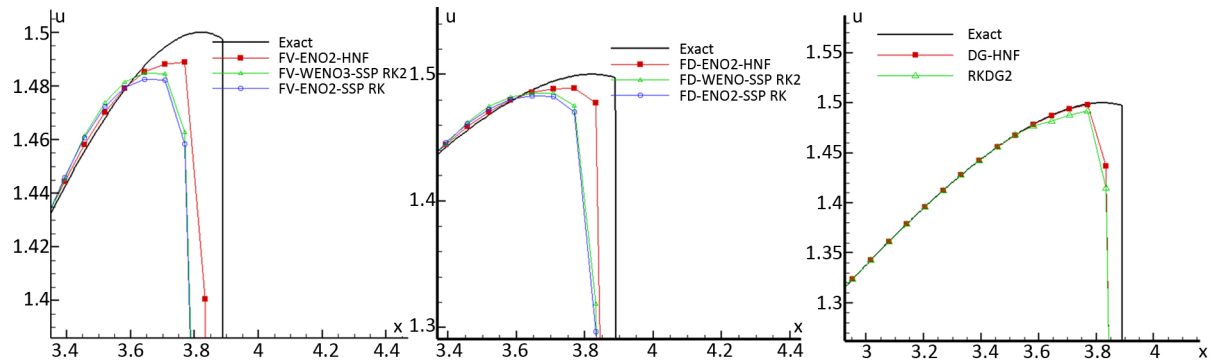


Figure 1. The local comparison of real and numerical solutions in $t = 1.5$

图 1. $t = 1.5$ 真解与数值解的局部对比

当 $t = 1.5$ 时, 该问题已产生激波, 见图 1。由图可知: 单步二阶格式在处理激波间断时具有更高的分辨率, 模拟效果更好。

算例 2: Sod 激波管问题

考虑方程(15), 其中 $x \in [0, 1]$ 。采用紧支边界, 初始条件: $t=0$ 时刻,

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1), & x \leq 0.5 \\ (0.125, 0, 0.1), & x > 0.5 \end{cases}$$

真解 $N=1600$, 数值解 $N=100$ 时, 使用二阶数值通量单步 ENO 格式与标准二阶 FD-ENO2 格式的对比如(见图 2~图 3)。

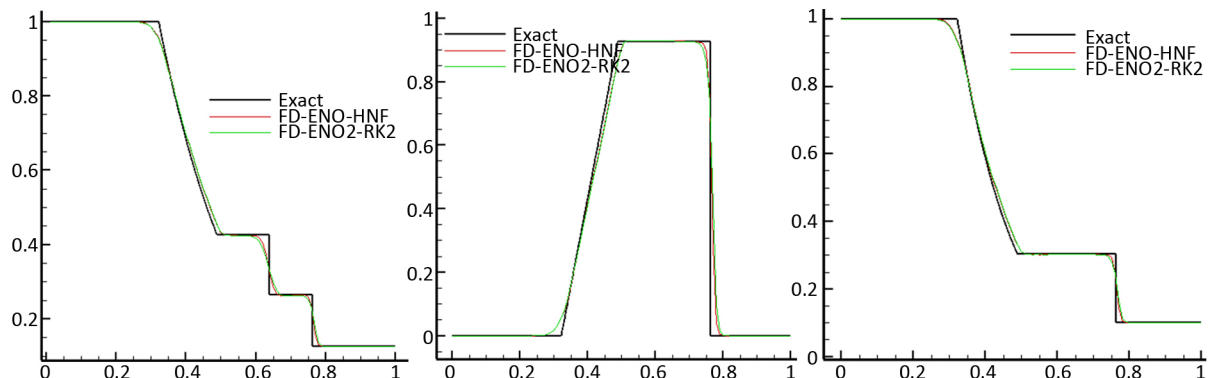


Figure 2. The overall comparison between the true solution and the numerical solution in $t = 0.15$

图 2. $t = 0.15$ 时真解与数值解的整体对比

由图 2~图 3 可以看出: 使用二阶数值通量的单步格式比原格式具有更高的分辨率。当 $N = 1000$ 时,

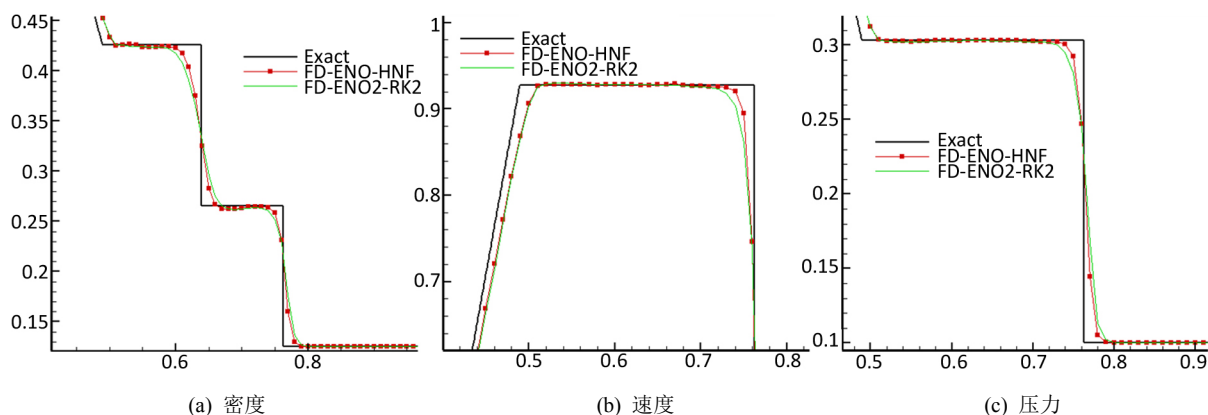


Figure 3. The local comparison between the true solution and the numerical solution in $t = 0.15$

图 3. $t = 0.15$ 时真解与数值解的局部对比

FD-ENO2-HNF 格式所消耗的 CPU 时间为 282 毫秒(ms), 标准 FD-ENO2 格式所消耗的 CPU 时间为 400 毫秒(ms), FD-ENO-HNF 格式比标准 FD-ENO2 格式节约了 29.5%左右。

6. 总结

本文以二阶数值通量为例, 给出了一种高阶数值通量的构造方法, 能应用于有限体积(差分) ENO, WENO 和 DG 格式得到单步高阶 Semi-Lagrangian 格式。格式天然具备守恒性、紧致性、并行性, 且并行效率比时间离散应用 SSP Runge-Kutta 方法的相应格式更高。本文还给出了一种在特征空间处理特征线的方法, 能应用于 Euler 方程组, 比原格式具备更好的模拟效果和更高的效率。同时, 这种方法能利用交替方向法推广到多维问题, 并无需推导其 Riemann 不变量, 也为 Semi-Lagrangian 方法在多维 Euler 方程组中的研究与应用提供了一种有效的途径。

参考文献

- [1] Bidadi, S. and Rani, S.L. (2014) Quantification of Numerical Diffusivity due to TVD Schemes in the Advection Equation. *Journal of Computational Physics*, **261**, 65-82. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.12.011>
- [2] 水鸿寿. 一维流体力学差分方法[M]. 北京: 国防大学出版社, 1998: 15-26.
- [3] Hou, J., Liang, Q., Zhang, H. and Hinkelmann, R. (2015) An Efficient Unstructured MUSCL Scheme for Solving the 2D Shallow Water Equations. *Environmental Modelling & Software*, **66**, 131-152. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2014.12.007>
- [4] Sun, D. (2018) Performance Study of MUSCL Schemes Based on Different Numerical Fluxes. *Wireless Personal Communications*, **102**, 1763-1772. <https://doi.org/10.1007/s11277-017-5234-8>
- [5] Sohn, S.I. (2005) A New TVD-MUSCL Scheme for Hyperbolic Conservation Laws. *Computers & Mathematics with Applications*, **50**, 231-248. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2004.10.047>
- [6] Wiin-Nielsen, A. (1959) On the Application of Trajectory Methods in Numerical Forecasting. *Tellus*, **11**, 180-196. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v11i2.9300>
- [7] Sawyer, J.S. (1963) A Semi-Lagrangian Method of Solving the Vorticity Advection Equation. *Tellus*, **15**, 336-342. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v15i4.8862>
- [8] Huang, C.-S., Arbogast, T. and Hung, C.-H. (2016) A Semi-Lagrangian Finite Difference WENO Scheme for Scalar Nonlinear Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, **322**, 559-585. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.06.027>
- [9] Piao, X., Kim, P. and Kim, D. (2018) One-Step, $L(\alpha)$ -Stable Temporal Integration for the Backward Semi-Lagrangian Scheme and Its Application in Guiding Center Problems. *Journal of Computational Physics*, **366**, 327-340. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.04.019>

- [10] Strain, J. (1999) Semi-Lagrangian Methods for Level Set Equations. *Journal of Computational Physics*, **151**, 498-533. <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6194>
- [11] Tumolo, G., Bonaventura, L. and Restelli, M. (2013) A Semi-Implicit, Semi-Lagrangian, p -Adaptive Discontinuous Galerkin Method for the Shallow Water Equations. *Journal of Computational Physics*, **232**, 46-67. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.06.006>
- [12] Robert, A. (1982) A Semi-Lagrangian and Semi-Implicit Numerical Integration Scheme for the Primitive Meteorological Equations. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, **60**, 319-325. https://doi.org/10.2151/jmsj1965.60.1_319
- [13] Restelli, M., Bonaventura, L. and Sacco, R. (2006) A Semi-Lagrangian Discontinuous Galerkin Method for Scalar Advection by Incompressible Flows. *Journal of Computational Physics*, **216**, 195-215. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.11.030>
- [14] Qiu, J.-M. and Christlieb, A. (2010) A Conservative High Order Semi-Lagrangian WENO Method for the Vlasov Equation. *Journal of Computational Physics*, **229**, 1130-1149. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.10.016>
- [15] Kwatra, N., Su, J., Grétarsson, J.T. and Fedkiw, R. (2009) A Method for Avoiding the Acoustic Time Step Restriction in Compressible Flow. *Journal of Computational Physics*, **228**, 4146-4161. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.02.027>
- [16] Lentine, M., Grétarsson, J.T. and Fedkiw, R. (2011) An Unconditionally Stable Fully Conservative Semi-Lagrangian Method. *Journal of Computational Physics*, **230**, 2857-2879. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.12.036>
- [17] Li, S. and Xiao, F. (2007) CIP/Multi-Moment Finite Volume Method for Euler Equations: A Semi-Lagrangian Characteristic Formulation. *Journal of Computational Physics*, **222**, 849-871. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.08.015>
- [18] 吴浪. 双曲守恒律方程的高阶半拉格朗日方法[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org