Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(6), 1192-1200
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.86137

Hans汉斯

Pricing of Financial Products in Maturity Interval under Time-Varying Volatility Model

Hongmei Dai, Liangqiong Jin

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou
Email: 18084363623@163.com, jinliangqiong@163.com

Received: Jun. 11th, 2019; accepted: Jun. 21st, 2019; published: Jun. 28th, 2019

Abstract

In this paper, we study the pricing of maturity interval financial products under the Black-Scholes model of time-varying volatility. First, the pricing formula of financial wealth management products is obtained by using the partial differential equation method. Then, the quadratic variation method is used to extract the integral volatility, and then four wealth management products are selected for empirical analysis, and suggestions are given for their selection. Finally, it provides a series of reference suggestions for investors to choose financial wealth management products.

Keywords

Financial Products, Partial Differential Equation, Pricing Formula, Secondary Deterioration

时变波动率模型下到期区间理财产品定价问题

代洪梅，金良琼

贵州民族大学，数据科学与信息工程学院，贵州 贵阳
Email: 18084363623@163.com, jinliangqiong@163.com

收稿日期：2019年6月11日；录用日期：2019年6月21日；发布日期：2019年6月28日

摘　要

本文在时变波动率Black-Scholes模型下，研究了到期区间理财产品的定价问题。首先，利用偏微分方程方法得到了金融理财产品的定价公式。接着，利用二次变差方法提取积分波动率，再选取四种理财产品进行实证分析，并对其选择给出建议。最后，为投资者选择金融理财产品提供了一系列的参考建议。

文章引用: 代洪梅, 金良琼. 时变波动率模型下到期区间理财产品定价问题[J]. 应用数学进展, 2019, 8(6): 1192-1200.
DOI: 10.12677/aam.2019.86137

关键词

金融理财产品，偏微分方程，定价公式，二次变差

1. 引言

随着时代的发展，我国个人财富以及个人理财有了较大增长。为了抵补资本在时间上的损失，人们常常将流动资产用于投资。同时，银行为了吸纳闲散资金，推出了各种理财产品，到期区间理财产品就是其中一种。

理财产品的核心问题是定价，一个理财产品是否成功，关键在于定价是否合理，是否能让发行单位和投资人实现双赢。金融理财产品的定价源自于欧式期权定价。目前，相关期权定价方法的理论研究日趋成熟。文献[1]以零息票为计价单位，研究了利率服从 HJM 模型下的欧式期权定价问题。为了刻画欧式期权价格估值的不确定性和投资者的犹豫程度，文献[2]用三角直觉模糊数表示风险资产的变化因子，构建了三角直觉模糊数的二叉树模型，进而研究了欧式期权定价问题。文献[3] [4]采用了摄动方法研究了非线性 Black-Scholes 模型下的欧式障碍期权定价问题。在一定的假设条件下，用 Green 函数分析了近似结论的误差估计。之后文献[5]采用单参数方法分别研究了修正的欧式期权定价问题，并且采用了 Feymann-Kac 公式分析了相应结论的误差问题。

关于期权定价方法的研究国内外有很多，但具体到银行理财产品定价问题的文献却不多见。考虑理财产品的价值是投资人选择理财产品的重要指标之一，同时，理财产品的定价对理财产品的投资活动具有指导意义。基于此，本文研究了挂钩于沪深 300 指数的到期区间理财产品定价问题。

2. 金融市场数学模型

表 1 收集了四款挂钩于沪深 300 指数的到期区间理财产品。在进行理财产品价值分析之前，先对沪深 300 指数适合的随机模型进行识别和参数估计。本节选取了 2018 年 5 月 16 日至 8 月 14 日的沪深 300 指数数据，时间间隔为 1 天，共计 63 个数据(见表 2)。

Table 1. Agricultural bank of China financial services products
表 1. 中国农业银行金融理财产品

序号	产品名称	发售期	理财期限/天	起购金额/万元	预期年化收益率
1	金钥匙·如意组合 2016 年第 283 期沪深 300 指数到期宽幅波动人民币金融理财产品	16.08.16~16.08.22	62	5	3%~3.95%
2	金钥匙·如意组合 2016 年第 283 期沪深 300 指数到期窄幅波动人民币金融理财产品	16.08.16~16.08.22	62	5	3%~3.95%
3	金钥匙·如意组合 2016 年第 284 期沪深 300 指数到期窄幅波动人民币金融理财产品	16.08.16~16.08.22	90	5	3%~4.2%
4	金钥匙·如意组合 2016 年第 284 期沪深 300 指数到期宽幅波动人民币金融理财产品	16.08.16~16.08.22	90	5	3%~4.2%

Table 2. The csi 300 index data
表 2. 沪深 300 指数数据

周次	日期	周一	周二	周三	周四	周五
1	5.16~5.22	3064.53	3095.52	3071.53	3060.34	3047.78
2	5.23~5.29	3078.52	3083.24	3079.75	3056.60	3059.73
3	5.30~6.05	3056.31	3068.60	3172.96	3158.03	3172.95
4	6.06~6.12	3192.78	3182.44	3171.81	-	-
5	6.13~6.19	3134.05	3058.44	3043.96	3104.36	3096.09
6	6.20~6.26	3114.91	3124.90	3100.45	3129.72	3110.65
7	6.27~7.03	3056.13	3107.40	3142.48	3152.83	3156.93
8	7.04~7.10	3136.39	3199.16	3197.63	3206.55	3199.75
9	7.11~7.17	3199.04	3201.91	3274.02	3277.48	3278.84
10	7.18~7.24	3269.71	3260.44	3246.86	3238.34	3251.24
11	7.25~7.31	3220.17	3228.23	3270.08	3204.47	3217.19
12	8.01~8.07	3196.43	3173.76	3179.68	3190.55	3201.35
13	8.08~8.14	3199.57	3232.60	3255.18	3239.56	3231.81

首先，将数据录入 Eviews 软件，取对数并一次差分后进行 ADF 检验，输出结果见表 3，由结果可知 t 统计量为−8.333832，比三个临界值都要小，说明处理之后的数据不存在单位根，即通过单位根检验，故我们认定数据平稳。

Table 3. The csi 300 index opening price: the logarithmic difference the stationarity of data
表 3. 沪深 300 指数开盘价格：对数差分数据的平稳性

		t-Stalistlic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		−8.333832	0.0000
Test critical values:	1% level	−3.542097	
	5% level	−2.910019	
	10% level	−2.592645	

其次，由数据的自相关性(见图 1)，数据的自相关系数全部位于虚线内并且对应的 P 值均大于 0.05，这表明数据之间不相关，符合白噪声序列的条件之一。

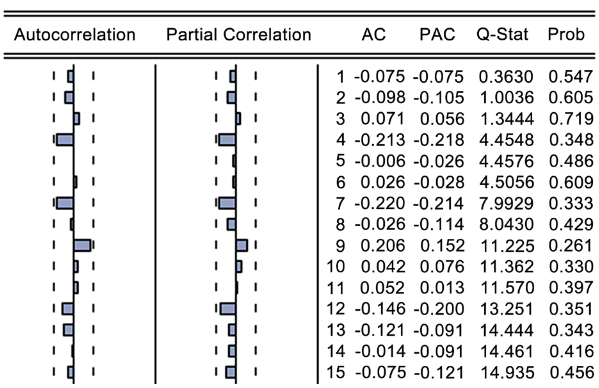

Figure 1. The csi 300 index opening price: logarithmic difference data correlation
图 1. 沪深 300 指数开盘价格：对数差分数据的相关性

最后，由描述统计数据(见图 2)，均值为−0.000204，中位数为−0.000641，最大值为 0.034319，最小值为−0.038160，标准差为 0.014282，偏度系数为 0.035154，表明数据无偏，峰度系数为 3.407955，表明数据的分布比标准正态分布略尖。计算得到的 JB 统计量的值为 0.435568，对应的 P 值为 0.804299，不能拒绝对数数据的一次差分是正态的。由表 4 也不能拒绝沪深 300 指数对数一次差分数据之间是独立的，从而我们可以认定沪深 300 指数对数一次差分为正态白噪声序列。

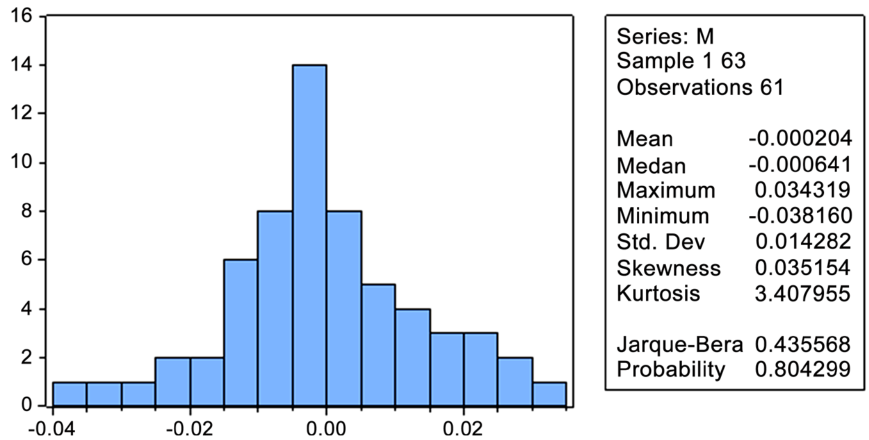

Figure 2. The csi 300 index opening price: statistical description of the log data of a difference
图 2. 沪深 300 指数开盘价格：对数数据一次差分的统计描述

Table 4. The csi 300 index opening price: the independence of the log data of a difference
表 4. 沪深 300 指数开盘价格：对数数据一次差分的独立性

Dimension	BDS Statistic		Std.Error	z-Statistic	Prob.
2	0.047739		0.010722	4.452420	0.0000
3	0.061689		0.017262	3.573607	0.0004
4	0.059362		0.020827	2.850317	0.0044
5	0.047317		0.021996	2.151191	0.0315
6	0.037657		0.021497	1.751747	0.0798
Raw epsilon	0.020928				
Pairs within epsilon	2635.000		V-Statistic	0.708143	
Triples within epsilon	123249.0		V-Statistic	0.542993	
Dimension	C(m,n)	c(m,n)	C(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1)	c(1,n(m-1))
2	949.0000	0.536158	1237.000	0.698870	0.488419
3	687.0000	0.401520	1194.000	0.697838	0.339831
4	480.0000	0.290381	1146.000	0.693285	0.231019
5	326.0000	0.204261	1102.000	0.690476	0.156944
6	219.0000	0.142208	1057.000	0.686364	0.104550

基于以上分析，本文采用如下修正的几何 Brown 运动模型来描述进行对数一次差分处理后的沪深 300 指数

$$\mathrm{d}S_t=\mu(t)S_t\mathrm{d}t+\sigma(t)S_t\mathrm{d}\omega_t \tag{1}$$

其中 ω_t 表示定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上的布朗运动，波动率 $\sigma(t)$，无风险收益率 $r(t)$ 和股票期望收益率 $\mu(t)$ 都是时间的函数。

在接下来的章节中，将用公式(1)刻画沪深300指数，并用其研究挂钩于沪深300指数的到期区间理财产品定价问题。

3. 区间金融理财产品的定价公式

根据到期区间理财产品的收益说明(见表1)，其到期之后的收益可以表示为

$$(1+r_1T)I_{\{S(T)\in[K_1,K_2]\}}+(1+r_2T)I_{\{S(T)\notin[K_1,K_2]\}} \tag{2}$$

其中 $S(T)$ 表示在到期日 T 时刻黄金的价格，r_1 表示起始日的利率，r_2 表示到期日的利率，$[K_1, K_2]$表示约定的执行区间。根据金融市场的自融资策略[6]，投入一个单位的本金、并且损益公式为公式(2)的金融理财产品的价格满足抛物偏微分方程。

$$\begin{cases} LC=0,\ (t,S)\in(0,T]\times R_+ \\ C(T,S)=(1+r_1T)I_{\{S\in[K_1,K_2]\}}+(1+r_2T)I_{\{S\notin[K_1,K_2]\}},\ S\in R_+ \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$LC=\partial_tC+\frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2(t)S^2\partial_{ss}C+r(t)S\partial_sC-r(t)C$$

下面我们考察公式(3)的解。令

$$x=\ln S+\int_t^T r(z)\mathrm{d}z-s,\quad s=\frac{1}{2}\int_t^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s \tag{4}$$

并定义

$$C(t,S)=\exp\left\{-\int_t^T r(z)\mathrm{d}z\right\}U(s,x) \tag{5}$$

则

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\exp\left\{-\int_t^T r(z)\mathrm{d}z\right\}\left[r(t)U-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial U}{\partial s}+\left(-r(t)+\frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial S}=\frac{1}{S}\exp\left\{-\int_t^T r(z)\mathrm{d}z\right\}\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}=\frac{1}{S^2}\exp\left\{-\int_t^T r(z)\mathrm{d}z\right\}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial x}\right]$$

将上述结果代入公式(3)得

$$\frac{\partial U}{\partial s}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ (s,x)\in[0,T]\times R$$

由公式(4)和公式(5)可知，当 $t=T$，$U(0,x)=C(T,S)$ 时

$$U(0,x)=(1+r_1T)I_{\{e^x\in[K_1,K_2]\}}+(1+r_2T)I_{\{e^x\notin[K_1,K_2]\}} \tag{6}$$

根据热传导方程的经典解理论，其唯一强解可表示为

$$U(s,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\int_R u_0(z)\exp\left\{-\frac{(z-x)^2}{4s}\right\}\mathrm{d}z=I_1+I_2 \tag{7}$$

其中

$$I_1=(1+r_1T)\frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\int_R I_{\{e^x\in[K_1,K_2]\}}\exp\left\{-\frac{(z-x)^2}{4s}\right\}\mathrm{d}z$$

$$I_2=(1+r_2T)\frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\int_R I_{\{e^x\notin[K_1,K_2]\}}\exp\left\{-\frac{(z-x)^2}{4s}\right\}\mathrm{d}z$$

利用公式(7)可得本文的主要结论。

定理 1 [7]损益为公式(2)的金融理财产品在 t 时刻的价格为

$$\begin{aligned}C(t,S)=&(1+r_1T)\exp\left\{-\int_t^T r(z)\mathrm{d}z\right\}\Phi(d_1)-(1+r_1T)\exp\left\{-\int_t^T r(z)\mathrm{d}z\right\}\Phi(d_2)\\&+(1+r_2T)\exp\left\{-\int_t^T r(z)\mathrm{d}z\right\}\Phi(-d_1)+(1+r_2T)\exp\left\{-\int_t^T r(z)\mathrm{d}z\right\}\Phi(d_2)\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln S-\ln K_1+\int_t^T r(z)\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\int_t^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_t^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}}$$

$$d_2=\frac{\ln S-\ln K_2+\int_t^T r(z)\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\int_t^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_t^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}}$$

证明：*首先计算 I_1，利用积分换元，我们有

$$\begin{aligned}I_1&=(1+r_1T)\frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\int_{\ln K_1}^{\ln K_2}\exp\left\{-\frac{(z-x)^2}{4s}\right\}\mathrm{d}z\\&=(1+r_1T)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K_1-x}{\sqrt{2\pi}}}^{\frac{\ln K_2-x}{\sqrt{2\pi}}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

从而

$$I_1=(1+r_1T)\Phi\left(\frac{x-\ln K_1}{\sqrt{2s}}\right)-(1+r_1T)\Phi\left(\frac{x-\ln K_2}{\sqrt{2s}}\right) \tag{9}$$

同理

$$I_2=(1+r_2T)\Phi\left(\frac{\ln K_1-x}{\sqrt{2s}}\right)+(1+r_2T)\Phi\left(\frac{x-\ln K_1}{\sqrt{2s}}\right) \tag{10}$$

将公式(9)和公式(10)代入公式(7)，可得结论成立。*

证毕。

4. 实证分析

下面我们用文中所得的结论研究表 1 所述的几种人民币金融理财产品。由于金融理财产品需要投资者

初始时刻就必须决定是否购买，且不允许转让。从而只需考虑这些金融理财产品在 0 时刻的价值，既 $t=0$。另外，在使用公式(10)之前，也必须事先确定近期沪深 300 指数的波动率函数 $\sigma(t)$ 的分别在区间 $[0,90/365]$ 和 $[0,62/365]$ 上的积分值。这样一来，问题就转化成了积分波动率 $\int_0^{90/365}\sigma^2(s)\mathrm{d}s$ 和 $\int_0^{62/365}\sigma^2(s)\mathrm{d}s$ 的估计问题。受开盘制度的限制(周末、节假日不开盘)，使得表(1)中相邻数据之间的时间间隔并不统一，下面构造一种新的积分波动率估计方法。

对公式(1)利用 Ito 公式[8]，易得

$$\mathrm{d}\ln S(t)=\left[r(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\right]\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}\omega_t$$

对任意的固定时间 T，假定在有限的时间区间[0, T]上有 $n+1$ 个观测值，$S(t_0),S(t_1),\cdots,S(t_n)$ 其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$ 是区间[0, T]的任一分割。令 $\Delta_n=\max\limits_n(t_i-t_{i-1})$，则由二次变差过程的定义可知

$$[\ln S,\ln S](T)\overset{P}{=}\lim_{\Delta_n\to 0}\sum_{0<t_i\le T}\left(\ln S(t_i)-\ln S(t_{i-1})\right)^2=\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s \tag{11}$$

这表明 $\sum\limits_{0<t_i\le T}\left(\ln S(t_i)-\ln S(t_{i-1})\right)^2$ 是积分波动率 $\int_0^T\sigma_s^2\mathrm{d}s$ 的渐进无偏估计。此外，Banrndorff 和 Shepherd 还证明了 $\sum\limits_{0<t_i\le T}\left(\ln S(t_i)-\ln S(t_{i-1})\right)^2$ 是积分波动率 $\int_0^T\sigma_s^2\mathrm{d}s$ 的一致估计量[9] [10]，并且

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_n}}\left[\sum_{0<t_i\le T}\left(\ln S(t_i)-\ln S(t_{i-1})\right)^2-\int_0^T\sigma_s^2\mathrm{d}s\right]^2\xrightarrow{P}N\left(0,\int_0^T\sigma^4(s)\mathrm{d}s\right) \tag{12}$$

其中 $\xrightarrow{P}$ 表示依概率收敛。至此，我们可以采用 $\sum\limits_{0<t_i\le T}\left(\ln S(t_i)-\ln S(t_{i-1})\right)^2$ 来估计积分波动率 $\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s$，数据处理过程见表 5，其中 $\ln s_i$ 是表 1 中沪深 300 指数的对数数据，$i=1,2,\cdots,63$。

$$x_j=\ln S_{j+1}-\ln S_j,j=1,2,\cdots,62$$

Table 5. The extraction of the csi 300 index integral volatility
表 5. 沪深 300 指数积分波动率的提取

$\ln s_i$	$100*x_i$	$\ln s_i$	$100*x_i$	$\ln s_i$	$100*x_i$
8.0276	–	8.0501	−1.1976	8.0706	−0.0222
8.0377	1.0062	8.0257	−2.4421	8.0715	0.0897
8.0299	−0.7780	8.0209	−0.4746	8.0937	2.2271
8.0263	−0.3650	8.0410	1.9648	8.0948	0.1056
8.0222	−0.4113	8.0379	−0.2668	8.0952	0.0415
8.0322	1.0036	8.0440	0.6060	8.0824	−0.2788
8.0337	0.1532	8.0472	0.3202	8.0896	−0.2839
8.0326	−0.1133	8.0393	−0.7855	8.0854	0.4147
8.0251	−0.7545	8.0487	0.9396	8.0828	−0.2682
8.0261	0.1023	8.0426	−0.6112	8.0868	0.3976
8.0250	−0.1118	8.0249	−1.7682	8.0772	−0.9602
8.0290	0.4013	8.0415	1.6637	8.0797	0.2500

Continued

8.0624	3.3443	8.0528	1.1226	8.0926	1.2880
8.0577	−0.4716	8.0561	0.3228	8.0723	−2.0268
8.0624	0.4713	8.0574	0.1300	8.0763	0.3962
8.0686	0.623	8.0508	−0.6528	8.0698	−0.6474
8.0654	−0.3244	8.0706	1.9816	8.0627	−0.7118
8.0621	−0.3346	8.0702	0.0478	8.0645	0.1864
–	–	8.0730	0.2786	8.0679	0.3413
–	–	8.0708	0.2123	8.0713	0.3379
8.0708	−0.0556	0.0810	1.0270	8.0880	0.6961
8.0832	−0.4810	8.0808	−0.2395	–	–

注意表 1 所列数据时间起点为 2016 年 5 月 16 日，终点为 2016 年 8 月 12 日，恰好 90 天，从而依据公式(11)和(12)，可得 90 天的积分波动率 $\int_0^{90/365}\sigma_s^2\mathrm{d}s$ 估计

$$\int_0^{90/365}\sigma_s^2\mathrm{d}s=\sum_{j=1}^{90}x_j^2=0.00570789 \tag{13}$$

由于表 1 中前两款区间金融理财产品其理财期限为 62 天，从而我们还需要积分波动率 $\int_0^{62/365}\sigma_s^2\mathrm{d}s$ 。选取 2016 年 8 月 12 日的数据(共计 45 个)，重复上面的分析，我们有 62 天的积分波动率

$$\int_0^{62/365}\sigma_s^2\mathrm{d}s=\sum_{j=1}^{62}x_j^2=0.00411275 \tag{14}$$

注意人民币金融理财产品的投资年限不长，见表 1，同时又因为我国人民币贷款利率短期内不会发生变化，从而我们以六个月以内的商业贷款利率为无风险利率，即

$$r=1.1\% \tag{15}$$

将公式(13)公式(14)以及公式(15)确定的各参数数值代入公式(8)可得各种到期区间金融理财产品的价格，见表 6。

Table 6. Hook in the csi 300 index range due to price of financial products
表 6. 挂钩于沪深 300 指数的到期区间金融理财产品的价格

序号	产品名称	理财期限/天	起购金额/万元	单位本金价格/元	5 万本金价格/元
1	金钥匙·如意组合 2016 年第 283 期沪深 300 指数到期宽幅波动人民币金融理财产品	62	5	1.002	50,100
2	金钥匙·如意组合 2016 年第 283 期沪深 300 指数到期窄幅波动人民币金融理财产品	62	5	1.0061	50,303
3	金钥匙·如意组合 2016 年第 284 期沪深 300 指数到期窄幅波动人民币金融理财产品	90	5	1.0029	50,145
4	金钥匙·如意组合 2016 年第 284 期沪深 300 指数到期宽幅波动人民币金融理财产品	90	5	1.0088	50,439

由表 6 可以看出如果投资期限是 62 天，金钥匙 • 如意组合 2016 年第 283 期沪深 300 指数到期窄幅波动人民币金融理财产品价格高；如果投资期限是 90 天，金钥匙 • 如意组合 2016 年第 284 期沪深 300 指数到期宽幅波动人民币金融理财产品价值更高。

基金项目

贵州省科学技术基金项目(No.黔科合 J 字[2015]2076)，贵州省教育厅青年科技人才成长项目(No.黔教 KY 字[2016]168)。

参考文献

[1] 周海林, 吴鑫育, 高凌云, 等. 随机利率条件下的欧式期权定价[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(4): 729-734.

[2] 张茂军, 秦学志, 南江霞. 基于三角直觉模糊数的欧式期权二叉树定价模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(1): 34-40.

[3] 孙玉东, 师义民, 童红. 基于摄动理论的障碍期权定价[J]. 应用数学学报, 2015, 38(1): 67-79.

[4] 孙玉东, 王秀芬, 童红. 非线性 Black-Scholes 模型下障碍期权定[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(4): 513-527.

[5] 董艳. 非线性 Black-Scholes 模型下 Bala 期权定价[J]. 高校应用数学学报, 2016, 31(1): 9-20.

[6] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[7] Polyanin, A.D. (2002) Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

[8] 孙玉东. 随机过程及其应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2016.

[9] 张世英. 金融时间序列分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[10] 张波, 余超, 毕涛. 高频金融数据建模理论、方法与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.