Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(7), 1256-1266
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.87146

The Existence of Zero-Points of Solution for a Class of Second Order Nonlinear Differential Equation

Liqin Lin, Keqing Zhong, Yubin Liu*

School of Mathematics and Big Data, Huizhou University, Huizhou Guangdong
Email: *gdliuyubin@163.com

Received: July 4th, 2019; accepted: July 19th, 2019; published: July 26th, 2019

Abstract

In the present paper, we investigate a class of second order differential equation. By establishing several inequalities, some new conditions on the existence of zero-points of solution for the equation are obtained. Several examples are given to illustrate the effectiveness of the obtained conditions.

Keywords

The Second Order Nonlinear Differential Equation, Zero-Points, Solution

一类二阶非线性微分方程解的零点存在性

林丽琴，钟可晴，刘玉彬*

惠州学院数学与大数据学院，广东 惠州
Email: *gdliuyubin@163.com

收稿日期：2019年7月4日；录用日期：2019年7月19日；发布日期：2019年7月26日

摘 要

本文研究了一类二阶非线性微分方程。通过建立几个微分不等式，建立了方程解的零点存在的若干新条件，并通过实例说明定理的有效性。

*通讯作者。

文章引用：林丽琴，钟可晴，刘玉彬．一类二阶非线性微分方程解的零点存在性[J]．应用数学进展，2019，8(7): 1256-1266. DOI: 10.12677/aam.2019.87146

关键词

二阶非线性微分方程，零点，解

1. 引言

微分方程解的零点分布是研究微分方程解的性态的一个重要课题，也是微分方程振动理论的基础。1836 年，Sturm C. F.针对二阶微分方程建立了解的零点比较定理[1]，并把相关理论推广到其它类型的微分方程和差分方程。1910 年，Mauro Picone 通过证明一个恒等式——Picone 恒等式，进一步推广了 Sturm 零点比较定理[2]。自此，利用类似思想，通过建立新的 Picone 型恒等式或不等式，Sturm 零点比较定理得以更进一步的推广，用以讨论各类更复杂的二阶微分方程的解或解的导函数的零点分布[3]-[8]。如陈丽纯，庄容坤研究了方程

$$\left(p(t)\Psi(y)k(y')\right)' + r(t)k(y') + q(t)f(y) = 0 \tag{1.1}$$

解的零点存在性。郑镇汉，李亚兰研究了方程

$$\left(p(y')\right)' + r(t)y' + q(t)y = f(t,y,y') \tag{1.2}$$

解的零点存在性。

受上述研究工作的启发，本文考虑方程

$$\left(p(t)\phi(y)k(y')\right)' + r(t)k(y') + q(t)y = f(t,y,y'), \tag{1.3}$$

其中 $p \in C^1([0,1];R_+)$，$r \in C([0,1];R)$，$q \in C([0,1];R_+)$，$f \in C([0,1]\times R\times R;R)$，$k,\phi \in C^1(R;R)$。通过建立几个微分不等式，建立非线性方程(1.3)解的零点存在的几个新的充分条件，并通过例子说明所得结果的有效性。

2. 几个不等式

为了证明主要结果，本节先证明几个微分不等式。往下总假设以下条件成立：

(A1) $0 < C_1 \le \phi(y) \le C_2, y \in R$；

(A2) $k^2(y) \le C_3 y k(y), y \in R$。

引理 1 设 $y(t)$ 是方程(1.3)的非平凡解，$x(t) \in C^1([0,1];R)$，若 $y(t) \ne 0, t\in[0,1]$，则成立下面的微分不等式：

$$\begin{aligned}\left(-\frac{x^2 p\phi(y)k(y')}{y}\right)' \ge & \left(\sqrt{\frac{p\phi(y)}{C_3}}\frac{xk(y')}{y} + \sqrt{\frac{C_3}{p\phi(y)}}\frac{r(t)x}{2} - \sqrt{C_3 p\phi(y)}x'\right)^2 \\ & - \frac{C_3}{4C_2 p}\left[2C_2 px' - r(t)x\right]^2 \\ & + \frac{1}{4C_2C_1 p}\left(4C_2C_1 pq + C_3(C_1 - C_2)r^2\right)x^2 - \frac{f(t,y,y')x^2}{y}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

证明 直接求导，并结合$\left(p\phi(y)k(y')\right)'=f(t,y,y')-r(t)k(y')-q(t)y$及条件(A1)和(A2)得：

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{x^2p\phi(y)k(y')}{y}\right)' \\
&=-\frac{2xx'p\phi(y)k(y')+x^2\left(p\phi(y)k(y')\right)'}{y}+\frac{x^2p\phi(y)k(y')y'}{y^2} \\
&=-\frac{x^2\left[f(t,y,y')-rk(y')-qy\right]}{y}-\frac{2xx'p\phi(y)k(y')}{y}+\frac{x^2p\phi(y)k(y')y'}{y^2} \\
&=qx^2+\frac{rk(y')x^2}{y}-\frac{2xx'p\phi(y)k(y')}{y}+\frac{x^2p\phi(y)k(y')y'}{y^2}-\frac{f(t,y,y')x^2}{y} \\
&\ge qx^2+\frac{rk(y')x^2}{y}-\frac{2xx'p\phi(y)k(y')}{y}+\frac{x^2pk^2(y')\phi(y)}{C_3y^2}-\frac{f(t,y,y')x^2}{y} \\
&=\left(\sqrt{\frac{p\phi(y)}{C_3}}\frac{xk(y')}{y}\right)^2-2\sqrt{\frac{p\phi(y)}{C_3}}\frac{xk(y')}{y}\sqrt{C_3p\phi(y)}x'+2\sqrt{\frac{p\phi(y)}{C_3}}\frac{xk(y')}{y}\sqrt{\frac{C_3}{p\phi(y)}}\frac{rx}{2} \\
&\quad+2\sqrt{C_3p\phi(y)}x'\sqrt{\frac{C_3}{p\phi(y)}}\frac{rx}{2}-2\sqrt{C_3p\phi(y)}x'\sqrt{\frac{C_3}{p\phi(y)}}\frac{rx}{2}+\left(\sqrt{C_3p\phi(y)}x'\right)^2 \\
&\quad-\left(\sqrt{C_3p\phi(y)}x'\right)^2+\left(\sqrt{\frac{C_3}{p\phi(y)}}\frac{rx}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{C_3}{p\phi(y)}}\frac{rx}{2}\right)^2+qx^2-\frac{f(t,y,y')x^2}{y} \\
&=\left(\sqrt{\frac{p\phi(y)}{C_3}}\frac{xk(y')}{y}+\sqrt{\frac{C_3}{p\phi(y)}}\frac{rx}{2}-\sqrt{C_3p\phi(y)}x'\right)^2+C_3rx'x-p\phi(y)C_3x'^2-\frac{C_3r^2x^2}{4p\phi(y)}+qx^2-\frac{f(t,y,y')x^2}{y} \\
&\ge\left(\sqrt{\frac{p\phi(y)}{C_3}}\frac{xk(y')}{y}+\sqrt{\frac{C_3}{p\phi(y)}}\frac{rx}{2}-\sqrt{C_3p\phi(y)}x'\right)^2-C_3\left[\left(\sqrt{pC_2}x'\right)^2-2\sqrt{pC_2}x'\frac{rx}{2\sqrt{C_2p}}\right. \\
&\quad\left.+\left(\frac{rx}{2\sqrt{C_2p}}\right)^2-\left(\frac{rx}{2\sqrt{C_2p}}\right)^2\right]+\left(q-\frac{C_3r^2}{4pC_1}\right)x^2-\frac{f(t,y,y')x^2}{y} \\
&=\left(\sqrt{\frac{p\phi(y)}{C_3}}\frac{xk(y')}{y}+\sqrt{\frac{C_3}{p\phi(y)}}\frac{rx}{2}-\sqrt{C_3p\phi(y)}x'\right)^2-\frac{C_3}{4C_2p}\left(2C_2px'-rx\right)^2 \\
&\quad+\frac{1}{4C_2C_1p}\left(4C_2C_1pq+C_3\left(C_1-C_2\right)r^2\right)x^2-\frac{f(t,y,y')x^2}{y}.
\end{aligned}
$$

证毕。

引理 2 设$y(t)$是方程(1.3)的非平凡解，$x(t)\in C^1([0,1];R)$，若$y(t)\neq 0,t\in[0,1]$，则成立下面的微分不等式：

$$
\left(-\frac{x^2p\phi(y)k(y')}{y}\right)'\ge qx^2+\frac{p\phi(y)}{C_3}\left(C_3x'-\frac{xk(y')}{y}\right)^2-C_2C_3px'^2+\frac{rk(y')-f(t,y,y')}{y}x^2. \tag{2.2}
$$

证明 由**引理 1** 的证明及条件(A1)和(A2)得:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{x^2p\phi(y)k(y')}{y}\right)' \\
&\ge qx^2+\frac{rk(y')x^2}{y}-\frac{2xx'p\phi(y)k(y')}{y}+\frac{x^2p\phi(y)k^2(y')}{C_3y^2}-\frac{f(t,y,y')x^2}{y} \\
&=qx^2+\frac{p\phi(y)}{C_3}\left(C_3x'-\frac{xk(y')}{y}\right)^2+\frac{rk(y')x^2}{y}-C_3p\phi(y)x'^2-\frac{f(t,y,y')x^2}{y} \\
&\ge qx^2+\frac{p\phi(y)}{C_3}\left(C_3x'-\frac{xk(y')}{y}\right)^2-C_2C_3px'^2+\frac{rk(y')-f(t,y,y')}{y}x^2.
\end{aligned}$$

证毕。

引理 3 设 $y(t)$ 是方程(1.3)的非平凡解， $x(t)\in C^1([0,1];R)$，若 $y(t)\ne 0, t\in[0,1]$，则成立微分不等式:

$$\begin{aligned}
\left(-x^2W(t)\right)' \ge{}& C_2C_3p(t)\Phi(t)\left(\frac{W(t)}{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x-x'-\frac{1}{2}\bar{R}(t)x\right)^2 \\
&-C_2C_3p(t)\Phi(t)\left(x'+\frac{1}{2}\bar{R}(t)x\right)^2+Q(t)x^2-\frac{f(t,y,y')}{y}\Phi(t)x^2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $\Phi(t),R(t)\in C^1((0,+\infty);R)$， $W(t)=\Phi(t)p(t)\left[\frac{\phi(t)k(y')}{y}+R(t)\right]$， $\bar{R}(t)=\frac{2R(t)}{C_2C_3}+\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}-\frac{r(t)}{C_2p(t)}$，

$Q(t)=\Phi(t)\left[q(t)-\frac{C_3(C_2-C_1)}{4C_1C_2}\frac{r^2(t)}{p(t)}-\frac{r(t)}{C_2}R(t)+\frac{p(t)}{C_2C_3}R^2(t)-\left(p(t)R(t)\right)'\right]$。

证明 由 $\left(p\phi(y)k(y')\right)'=f(t,y,y')-r(t)k(y')-q(t)y$ 及条件(A1)和(A2)得:

$$\begin{aligned}
W'(t)&=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left[\left(\frac{p(t)\phi(y)k(y')}{y}\right)'+\left(p(t)R(t)\right)'\right] \\
&=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left[\frac{f(t,y,y')-r(t)k(y')-q(t)y}{y}-\frac{p(t)\phi(y)k(y')y'}{y^2}+\left(p(t)R(t)\right)'\right] \\
&\le\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left[\frac{f(t,y,y')}{y}-\frac{r(t)k(y')}{y}-q(t)-\frac{p(t)\phi(y)k^2(y')}{C_3y^2}+\left(p(t)R(t)\right)'\right] \\
&=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\Bigg\{-q(t)+\left(p(t)R(t)\right)'+\frac{f(t,y,y')}{y} \\
&\quad-\frac{1}{\phi(y)}\left[\frac{r(t)\phi(y)k(y')}{y}+\frac{p(t)}{C_3}\left(\frac{\phi(y)k(y')}{y}\right)^2\right]\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left\{-\frac{1}{\phi(y)}\left[\left(\sqrt{\frac{p(t)}{C_3}}\frac{\phi(y)k(y')}{y}\right)^2+2\sqrt{\frac{p(t)}{C_3}}\frac{\phi(y)k(y')}{y}\sqrt{\frac{C_3}{p(t)}}\frac{r(t)}{2}\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(\sqrt{\frac{C_3}{p(t)}}\frac{r(t)}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{C_3}{p(t)}}\frac{r(t)}{2}\right)^2\right]-q(t)+\left(p(t)R(t)\right)'+\frac{f(t,y,y')}{y}\right\}\\
&=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left\{-\frac{1}{\phi(y)}\left(\sqrt{\frac{p(t)}{C_3}}\frac{\phi(y)k(y')}{y}+\sqrt{\frac{C_3}{p(t)}}\frac{r(t)}{2}\right)^2\right.\\
&\left.+\frac{C_3r^2(t)}{4p(t)\phi(y)}-q(t)+\left(p(t)R(t)\right)'+\frac{f(t,y,y')}{y}\right\}\\
&\le\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left\{-\frac{1}{C_2}\left(\sqrt{\frac{p(t)}{C_3}}\frac{\phi(y)k(y')}{y}+\sqrt{\frac{C_3}{p(t)}}\frac{r(t)}{2}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{C_3r^2(t)}{4C_1p(t)}-q(t)+\left(p(t)R(t)\right)'+\frac{f(t,y,y')}{y}\right\}\\
&=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left\{-\frac{1}{C_2}\left(\sqrt{\frac{p(t)}{C_3}}\left(\frac{W(t)}{\Phi(t)p(t)}-R(t)\right)+\sqrt{\frac{C_3}{p(t)}}\frac{r(t)}{2}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{C_3r^2(t)}{4p(t)C_1}-q(t)+\left(p(t)R(t)\right)'+\frac{f(t,y,y')}{y}\right\}\\
&=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left\{-\frac{1}{C_2}\left[\frac{p(t)}{C_3}\left(\frac{W^2(t)}{\Phi^2(t)p^2(t)}+R^2(t)-\frac{2W(t)R(t)}{\Phi(t)p(t)}\right)+\frac{C_3r^2(t)}{4p(t)}\right.\right.\\
&\left.\left.+r(t)\left(\frac{W(t)}{\Phi(t)p(t)}-R(t)\right)\right]+\frac{C_3r^2(t)}{4C_1p(t)}-q(t)+\left(p(t)R(t)\right)'+\frac{f(t,y,y')}{y}\right\}\\
&=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left\{-\frac{p(t)}{C_2C_3}\left(\frac{W^2(t)}{\Phi^2(t)p^2(t)}+R^2(t)-\frac{2W(t)R(t)}{\Phi(t)p(t)}\right)-\frac{C_3r^2(t)}{4C_2p(t)}\right.\\
&\left.-\frac{r(t)}{C_2}\left(\frac{W(t)}{\Phi(t)p(t)}-R(t)\right)+\frac{C_3r^2(t)}{4C_1p(t)}-q(t)+\left(p(t)R(t)\right)'+\frac{f(t,y,y')}{y}\right\}\\
&=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left\{-\frac{W^2(t)}{C_2C_3\Phi^2(t)p(t)}-\frac{p(t)}{C_2C_3}R^2(t)+\frac{2R(t)W(t)}{C_2C_3\Phi(t)}-\frac{C_3r^2(t)}{4C_2p(t)}\right.\\
&\left.-\frac{r(t)W(t)}{C_2\Phi(t)p(t)}+\frac{r(t)}{C_2}R(t)+\frac{C_3r^2(t)}{4C_1p(t)}-q(t)+\left(p(t)R(t)\right)'+\frac{f(t,y,y')}{y}\right\}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)+\Phi(t)\left\{-q(t)+\frac{C_3(C_2-C_1)}{4C_1C_2}\frac{r^2(t)}{p(t)}+\frac{r(t)}{C_2}R(t)-\frac{p(t)}{C_2C_3}R^2(t)\right.$$
$$\left.+(p(t)R(t))'+\left(\frac{2R(t)}{C_2C_3\Phi(t)}-\frac{r(t)}{C_2\Phi(t)p(t)}\right)W(t)-\frac{W^2(t)}{C_2C_3\Phi^2(t)p(t)}+\frac{f(t,y,y')}{y}\right\}$$
$$=\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}W(t)-\Phi(t)\left[q(t)-\frac{C_3(C_2-C_1)}{4C_1C_2}\frac{r^2(t)}{p(t)}-\frac{r(t)}{C_2}R(t)+\frac{p(t)}{C_2C_3}R^2(t)-(p(t)R(t))'\right]$$
$$+\left(\frac{2R(t)}{C_2C_3}-\frac{r(t)}{C_2p(t)}\right)W(t)-\frac{W^2(t)}{C_2C_3\Phi(t)p(t)}+\frac{f(t,y,y')}{y}\Phi(t)$$
$$=-\Phi(t)\left[q(t)-\frac{C_3(C_2-C_1)}{4C_1C_2}\frac{r^2(t)}{p(t)}-\frac{r(t)}{C_2}R(t)+\frac{p(t)}{C_2C_3}R^2(t)-(p(t)R(t))'\right]$$
$$+\left(\frac{2R(t)}{C_2C_3}+\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}-\frac{r(t)}{C_2p(t)}\right)W(t)-\frac{W^2(t)}{C_2C_3\Phi(t)p(t)}+\frac{f(t,y,y')}{y}\Phi(t)$$
$$=-Q(t)+\bar{R}(t)W(t)-\frac{W^2(t)}{C_2C_3\Phi(t)p(t)}+\frac{f(t,y,y')}{y}\Phi(t).$$

因此，

$$\left[-x^2W(t)\right]'$$
$$\geq -2xx'W(t)-x^2\left(-Q(t)+\bar{R}(t)W(t)-\frac{W^2(t)}{C_2C_3p(t)\Phi(t)}+\frac{f(t,y,y')}{y}\Phi(t)\right)$$
$$=\left(\frac{W(t)}{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}x\right)^2-2\frac{W(t)x}{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x'$$
$$-2\frac{W(t)x}{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}\frac{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}{2}\bar{R}(t)x+\left(\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x'\right)^2$$
$$-\left(\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x'\right)^2+\left(\frac{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}{2}\bar{R}(t)x\right)^2-\left(\frac{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}{2}\bar{R}(t)x\right)^2$$
$$+2\left(\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x'\right)\left(\frac{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}{2}\bar{R}(t)x\right)$$
$$-2\left(\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x'\right)\left(\frac{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}{2}\bar{R}(t)x\right)+Q(t)x^2-\frac{f(t,y,y')}{y}\Phi(t)x^2$$
$$=\left(\frac{W(t)}{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}x-\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x'-\frac{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}{2}\bar{R}(t)x\right)^2$$
$$-\left(\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x'+\frac{\sqrt{C_2C_3p(t)\Phi(t)}}{2}\bar{R}(t)x\right)^2$$
$$+Q(t)x^2-\frac{f(t,y,y')}{y}\Phi(t)x^2$$

$$
\begin{aligned}
&= C_2C_3p(t)\Phi(t)\left(\frac{W(t)}{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x - x' - \frac{1}{2}\bar{R}(t)x\right)^2 \\
&\quad - C_2C_3p(t)\Phi(t)\left(x' + \frac{1}{2}\bar{R}(t)x\right)^2 + Q(t)x^2 - \frac{f(t,y,y')}{y}\Phi(t)x^2.
\end{aligned}
$$

证毕。

3. 主要结果

本节利用上节得到的不等式建立几个零点存在定理。

定理 1 设 $y(t)$ 是方程(1.3)的非平凡解，若存在 $x(t) \in C^1([0,1];R)$，使得 $x(0) = x(1) = 0$；$\frac{f(t,u,v)}{u} \le 0\ (u \ne 0)$，且

$$
\int_0^1 \left\{\left[4C_2C_1p(t)q(t) + C_3(C_1 - C_2)r^2(t)\right]x^2 - C_3C_1\left[2C_2p(t)x' - r(t)x\right]^2\right\}\mathrm{d}t > 0,
$$

则 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点。

证明 假设 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上没有零点，即 $y(t) \ne 0, t \in [0,1]$，则不等式(2.1)成立。对(2.1)式的两边从 0 到 1 积分得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[-\frac{x^2p(t)\phi(y)k(y')}{y}\right]'\mathrm{d}t \\
&\ge \int_0^1 \left\{\left[\sqrt{\frac{p(t)\phi(y)}{C_3}}\frac{k(y')x}{y} + \sqrt{\frac{C_3}{p(t)\phi(y)}}\frac{r(t)x}{2} - \sqrt{C_3p(t)\phi(y)}x'\right]^2\right. \\
&\quad - \frac{C_3}{4C_2p(t)}\left[2C_2p(t)x' - r(t)x\right] + \frac{1}{4C_2C_1p(t)}\left[4C_2C_1p(t)q(t)\right. \\
&\quad \left.\left. + C_3(C_1 - C_2)r^2(t)\right]x^2 - \frac{f(t,y,y')x^2}{y}\right\}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

由 $x(0) = x(1) = 0$，有

$$
\int_0^1 \left[-\frac{x^2p(t)\phi(y)k(y')}{y}\right]'\mathrm{d}t = \left[-\frac{x^2p(t)\phi(y)k(y')}{y}\right]_0^1 = 0.
$$

于是

$$
\int_0^1 \left\{\left[4C_2C_1p(t)q(t) + C_3(C_1 - C_2)r^2(t)\right]x^2 - C_3C_1\left[2C_2p(t)x' - r(t)x\right]^2\right\}\mathrm{d}t \le 0,
$$

与条件矛盾，故 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点。

推论 1 设 $y(t)$ 是方程(1.3)的非平凡解，若存在 $x(t) \in C^1([0,1];R)$，使得 $x(0) = x(1) = 0$；$\frac{f(t,u,v)}{u} \le 0\ (u \ne 0)$；又

$$
\left[4C_2C_1p(t)q(t) + C_3(C_1 - C_2)r^2(t)\right]x^2 \ge C_3C_1\left[2C_2p(t)x' - r(t)x\right]^2,\quad t \in [0,1],
$$

且等号在[0,1]的任意闭子区间上不恒成立，则 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点。

定理 2 设 $y(t)$ 是方程(1.3)的非平凡解，若存在 $x(t)\in C^1([0,1];R)$，使得 $x(0)=x(1)=0$；$\frac{r(t)k(v)-f(t,u,v)}{u}\ge 0\ (u\ne 0)$；且

$$\int_0^1\left[q(t)x^2-C_2C_3p(t)x'^2\right]\mathrm{d}t>0.$$

则 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点。

证明 假设 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上没有零点，即 $y(t)\ne 0,t\in[0,1]$，则不等式(2.2)成立。对(2.2)式的两边从 0 到 1 积分得

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(-\frac{x^2p(t)\phi(y)k(y')}{y}\right)'\mathrm{d}t\ge&\int_0^1\frac{p(t)\phi(y)}{C_3}\left(C_3x'-\frac{k(y')}{y}x\right)^2\mathrm{d}t\\&+\int_0^1\left[q(t)x^2-C_2C_3p(t)x'^2\right]\mathrm{d}t\\&+\int_0^1\frac{r(t)k(y')-f(t,y,y')}{y}x^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由 $x(0)=x(1)=0$，有

$$\int_0^1\left(-\frac{x^2p(t)\phi(y)k(y')}{y}\right)'\mathrm{d}t=\left(-\frac{x^2p(t)\phi(y)k(y')}{y}\right)_0^1=0.$$

于是

$$\int_0^1\left[q(t)x^2-C_2C_3p(t)x'^2\right]\mathrm{d}t\le 0,$$

与条件矛盾，故 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点。

推论 2 设 $y(t)$ 是方程(1.3)的非平凡解，若存在 $x(t)\in C^1([0,1];R)$，使得 $x(0)=x(1)=0$，$\frac{r(t)k(v)-f(t,u,v)}{u}\ge 0\ (\forall u\ne 0)$，又 $q(t)x^2\ge p(t)C_2C_3x'^2$，$t\in[0,1]$，且等号在[0,1]的任意闭子区间上不恒成立，则 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点。

定理 3 设 $y(t)$ 是方程(1.3)的非平凡解，若存在 $x(t)\in C^1([0,1];R)$，使得 $x(0)=x(1)=0$；$\frac{f(t,u,v)}{u}\le 0\ (u\ne 0)$，且

$$\int_0^1\left[Q(t)x^2-C_2C_3p(t)\Phi(t)\left(x'+\frac{1}{2}x\bar{R}(t)\right)^2\right]\mathrm{d}t>0,$$

则 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点。

证明 假设 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上没有零点，即 $y(t)\ne 0,t\in[0,1]$，则不等式(2.3)成立。对(2.3)式的两边从 0 到 1 积分得

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[-x^2W(t)\right]'\mathrm{d}t\ge&\int_0^1C_2C_3p(t)\Phi(t)\left(\frac{W(t)}{C_2C_3p(t)\Phi(t)}x-x'-\frac{1}{2}\bar{R}(t)x\right)^2\mathrm{d}t\\&+\int_0^1\left[Q(t)x^2-C_2C_3p(t)\Phi(t)\left(x'+\frac{1}{2}\bar{R}(t)x\right)^2\right]\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{f(t,y,y')}{y}\Phi(t)x^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由 $x(0)=x(1)=0$，有

$$\int_0^1 \left[-x^2 W(t)\right]' = \left[-x^2 W(t)\right]_0^1 = 0.$$

于是

$$\int_0^1 \left[Q(t)x^2 - C_2C_3 p(t)\Phi(t)\left(x' + \frac{1}{2}\bar{R}(t)x\right)^2 \right] \mathrm{d}t \le 0,$$

与条件矛盾，故 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点。

推论 3 设 $y(t)$ 是方程(1.3)的非平凡解，若存在 $x(t) \in C^1([0,1];R)$，使得 $x(0) = x(1) = 0$；$\dfrac{f(t,u,v)}{u} \le 0\ (u \ne 0)$；又在 $[0,1]$ 上，

$$Q_2(t)x^2 \ge C_2C_3 p(t)\Phi(t)\left(x' + \frac{1}{2}xr_2(t)\right)^2,$$

但不恒相等，则 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上至少有一个零点。

4. 实例

例 1 考虑方程：

$$\left[\left(1+\sin^2 \pi t\right)\frac{y'}{1+\alpha y'^2}\right]' + 4\pi \sin \pi t \cos \pi t \frac{y'}{1+\alpha y'^2} + q(t)y + t^2 yy'^2 = 0 \quad (4.1)$$

其中 $y \in R$，$t \in [0,1]$，$\alpha \ge 0$ 为常数，$q \in C([0,1];[0,+\infty))$，满足 $q(t) > \dfrac{4\pi^2}{\sin^2 \pi t}, t \in (0,1)$。

记 $p(t) = 1+\sin^2 \pi t$，$\phi(y) = 1$，$k(v) = \dfrac{v}{1+\alpha v^2}$，$r(t) = 4\pi \sin \pi t \cos \pi t$，$f(t,u,v) = -t^2uv^2$，则 $f \in C([0,1]\times R\times R;R)$，$p \in C^1([0,1];R_+)$，$r \in C([0,1];R)$，$k,\phi \in C^1(R;R)$，且

$$\frac{f(t,u,v)}{u} = -t^2v^2 \le 0\ (u \ne 0).$$

取 $C_1 = C_2 = C_3 = 1$，则条件(A1)、(A2)满足。取 $x(t) = \sin^2 \pi t$，则 $x(0) = x(1) = 0$。

对 $t \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned}
&\left[4C_2C_1 p(t)q(t) + C_3(C_1 - C_2)r^2(t)\right]x^2 - C_3C_1\left[2C_2 p(t)x' - r(t)x\right]^2 \\
&= 4q(t)\left(1+\sin^2 \pi t\right)\sin^4 \pi t - \left[4\pi\left(1+\sin^2 \pi t\right)\sin \pi t \cos \pi t - 4\pi \sin \pi t \cos \pi t \sin^2 \pi t\right]^2 \\
&= 4\sin^2 \pi t\left[q(t)\left(1+\sin^2 \pi t\right)\sin^2 \pi t - 4\pi^2 \cos^2 \pi t\right] \\
&\ge 4\sin^2 \pi t\left[q(t)\sin^2 \pi t - 4\pi^2\right] \ge 0,
\end{aligned}$$

且等号当且仅当 $t = 0,1$ 时成立。由**推论 1** 知，方程(4.1)的非平凡解 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 至少有一个零点。

例 2 考虑以下方程：

$$\left(\frac{2+\cos^2 \pi t}{1+\cos^2 \pi t}\cdot\frac{1+y^2}{2+y^2}\cdot\frac{y'^2}{1+\alpha y'^2}\right)' + \frac{t^2y'^2}{1+\alpha y'^2} + q(t)y + \frac{y^3 - t^2y'^2}{1+\alpha y'^2} = 0 \quad (4.2)$$

其中 $y \in R$，$t \in [0,1]$，$\alpha \ge 0$ 为常数。$q \in C([0,1];[0,+\infty))$，满足 $q(t) > \dfrac{3\pi^2}{\sin^2 \pi t}, t \in (0,1)$。

记 $p(t)=\dfrac{2+\cos^2\pi t}{1+\cos^2\pi t}$，$\phi(y)=\dfrac{1+y^2}{2+y^2}$，$k(v)=\dfrac{v^2}{1+\alpha v^2}$，$r(t)=t^2$，$f(t,u,v)=-\dfrac{u^3-t^2v^2}{1+av^2}$，则 $f\in C([0,1]\times R\times R;R)$，$p\in C^1([0,1];R_+)$，$r\in C([0,1];R)$，$k,\phi\in C^1(R;R)$，且

$$\frac{1}{2}\le\phi(y)=\frac{1+y^2}{2+y^2}\le 1，\ \frac{r(t)k(v)-f(t,u,v)}{u}=\frac{u^2}{1+\alpha v^2}\ge 0\ (u\ne 0)。$$

取 $C_1=\dfrac{1}{2},C_2=C_3=1$，则条件(A1)、(A2)满足。取 $x(t)=\sin\pi t$，则 $x(0)=x(1)=0$，且

$$\begin{aligned}&q(t)x^2-p(t)C_2C_3x'^2\\&=q(t)\sin^2\pi t-\left(\frac{2+\cos^2\pi t}{1+\cos^2\pi t}\right)\pi^2\cos^2\pi t\\&\ge q(t)\sin^2\pi t-3\pi^2\ge 0\end{aligned}$$

且等号当且仅当 $t=0,1$ 时成立，由**推论 2** 知，方程(4.2)的非平凡解 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 至少有一个零点。

例 3 考虑方程：

$$\left[\left(1+\sin^2\pi t\right)\frac{y'}{1+\alpha y'^2}\right]'-2\pi\sin\pi t\cos\pi t\frac{y'}{1+\alpha y'^2}+q(t)y+t^2yy'^2=0, \tag{4.3}$$

其中 $y\in R$，$t\in[0,1]$，$\alpha\ge 0$ 为常数，$q\in C([0,1];[0,+\infty))$，满足

$$q(t)\ge\pi^2\left(4+\cot^2\pi t\right),t\in(0,1).$$

记 $p(t)=1+\sin^2\pi t$，$\phi(y)=1$，$k(v)=\dfrac{v}{1+\alpha v^2}$，$r(t)=-2\pi\sin\pi t\cos\pi t$，$f(t,u,v)=-t^2uv$，则 $f\in C([0,1]\times R\times R;R)$，$p\in C^1([0,1];R_+)$，$r\in C([0,1];R)$，$k,\phi\in C^1(R;R)$，且

$$\frac{f(t,u,v)}{u}=-t^2v^2\le 0,\ u\ne 0.$$

取 $C_1=C_2=C_3=1$，则条件(A1)、(A2)成立。取 $x(t)=\sin\pi t$，则 $x(0)=x(1)=0$。

取 $R(t)=-\dfrac{1}{t},\Phi(t)=t^2$，则

$$\begin{aligned}Q(t)&=\Phi(t)\left[q(t)-\frac{C_3(C_2-C_1)}{4C_1C_2}\frac{r^2(t)}{p(t)}-\frac{r(t)}{C_2}R(t)+\frac{p(t)}{C_2C_3}R^2(t)-\left(p(t)R(t)\right)'\right]\\&\ge t^2\left[\pi^2\left(4+\cot^2\pi t\right)-\frac{2\pi\sin\pi t\cos\pi t}{t}+\frac{1+\sin^2\pi t}{t^2}-\left(\frac{1+\sin^2\pi t}{-t}\right)'\right]\\&=t^2\pi^2\left(4+\cot^2\pi t\right)\end{aligned}$$

$$\bar{R}(t)=\frac{2R(t)}{C_2C_3}+\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}-\frac{r(t)}{C_2p(t)}=-\frac{2}{t}+\frac{2t}{t^2}-\frac{-2\pi\sin\pi t\cos\pi t}{1+\sin^2\pi t}=\frac{2\pi\sin\pi t\cos\pi t}{1+\sin^2\pi t}$$

从而对 $t\in(0,1)$，

$$
\begin{aligned}
& Q(t)x^2 - C_2C_3p(t)\Phi(t)\left[x' + \frac{1}{2}x\bar{R}(t)\right]^2 \\
& \ge t^2\pi^2\left(4+\cot^2\pi t\right)\sin^2\pi t - \left(1+\sin^2\pi t\right)t^2\left(\pi\cos\pi t + \frac{\sin\pi t}{2}\cdot\frac{2\pi\sin\pi t\cos\pi t}{1+\sin^2\pi t}\right)^2 \\
& = t^2\pi^2\left(4+\cot^2\pi t\right)\sin^2\pi t - \left(1+\sin^2\pi t\right)t^2\left[\pi^2\cos^2\pi t + \frac{2\pi^2\sin^2\pi t\cos^2\pi t}{1+\sin^2\pi t} + \frac{\pi^2\sin^4\pi t\cos^2\pi t}{\left(1+\sin^2\pi t\right)^2}\right] \\
& = t^2\pi^2\sin^2\pi t\left\{\left(4+\cot^2\pi t\right) - \left(1+\sin^2\pi t\right)\left[\cot^2\pi t + \frac{2\cos^2\pi t}{1+\sin^2\pi t} + \frac{\sin^2\pi t\cos^2\pi t}{\left(1+\sin^2\pi t\right)^2}\right]\right\} \\
& \ge 2t^2\pi^2\sin^2\pi t\left\{3+\cot^2\pi t - \left[\cot^2\pi t + 3\right]\right\} = 0
\end{aligned}
$$

而当 $t=0,1$ 时不等式仍成立，且等号在 $[0,1]$ 的任意子区间上不恒成立。由**推论 3** 知，方程(4.3)的非平凡解 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 至少有一个零点。

致　谢

感谢庄容坤教授对本文研究工作的建议和帮助！

基金项目

本文受如下基金项目资助：国家自然科学基金(No. 11601180)，广东省自然科学基金 (No. 2016A030310100)，国家级大学生创新训练项目(No. 20181057005)。

参考文献

[1] Sturm, C. (1836) Memoirc Sur les Equations Diffcrentielles du Second Ordre. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **1**, 106-186.

[2] Picone, M. (1910) Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **11**, 1-141.

[3] Jaroš, J. and Kusano, T. (1999) A Picone-Type Identity for Second Order Half-Linear Differential Equation. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **1**, 137-151.

[4] 陈丽纯, 庄容坤. 一类二阶非线性微分方程解的零点比较定理[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2017, 32(2): 149-155.

[5] 程崇高. 二阶线性齐次方程解的零点比较定理[J]. 数学杂志, 1996, 16(4): 54-57.

[6] 郑镇汉, 李亚兰. 一类二阶非线性微分方程解的零点存在定理[J]. 仲恺农业技术学院学报, 2008, 21(3): 59-61.

[7] 庄容坤. 二阶非线性微分方程解的导函数的零点比较定理[J]. 惠阳师专学报(自然科学版), 1992(3): 10-19.

[8] Zhuang, R.K. (2003) Sturm Comparison Theorem of Solution for Second Order Nonlinear Differential Equations. *Annals of Differential Equations*, **3**, 480-486.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页：http://cnki.net/，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：http://scholar.cnki.net/new，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；
   或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询。
2. 通过知网首页 http://cnki.net/顶部“旧版入口”进入知网旧版：http://www.cnki.net/old/，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org