

# Blending Technology of Tubes with Non-Coplanar Axes Based on Smooth Blending Axis

Genzhu Bai<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Basis Department, Zhejiang Changzheng Vocational & Technical College, Hangzhou Zhejiang

<sup>2</sup>School of Mathematics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia

Email: bgz049@163.com

Received: July 4<sup>th</sup>, 2019; accepted: July 19<sup>th</sup>, 2019; published: July 26<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

The problem of smooth blending axes of non-coplanar tubes with cubic uniform B-spline curve is discussed. By the constraint of the control polygon, let B-spline curve pass through the vertices of the control polygon, and the curve is tangent to the edge of the control polygon. In this way, a piecewise cubic uniform B-spline curve can be constructed. Thus, this curve will be smoothly blended between axes of two non-coplanar tubes. And then, a smooth blending circular tube that takes B-spline curve as its axis is obtained.

## Keywords

Axes, Non-Coplane, B-Spline Curve, Tubes, Smooth Blending

---

# 基于轴线光滑拼接的轴线异面管道拼接技术

白根柱<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>浙江长征职业技术学院基础部, 浙江 杭州

<sup>2</sup>内蒙古民族大学数学学院, 内蒙古 通辽

Email: bgz049@163.com

收稿日期: 2019年7月4日; 录用日期: 2019年7月19日; 发布日期: 2019年7月26日

---

## 摘要

讨论了用三次均匀B样条曲线光滑拼接轴线异面管道的轴线问题, 首先通过特征多边形的顶点的约束使B样条曲线通过控制多边形的顶点, 且与控制多边形的边相切。这样可以构造光滑拼接两个轴异面圆管道的轴线的分段三次均匀B样条曲线, 进而构造了以B-样条曲线为轴线的圆管道, 实现了以B-样条曲线为

文章引用: 白根柱. 基于轴线光滑拼接的轴线异面管道拼接技术[J]. 应用数学进展, 2019, 8(7): 1267-1271.

DOI: 10.12677/aam.2019.87147

轴线的圆管道光滑拼接轴线异面圆管道的光滑拼接。

## 关键词

轴线, 异面, B-样条曲线, 管道, 光滑拼接

Copyright © 2019 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

曲面拼接问题是计算机辅助几何设计中的一个基本问题, 而轴线异面的管道拼接是几何造型中的难点基础问题。在几何造型中通常以低次代数曲面为基本单元, 通过他们之间的光滑拼接, 实现所需要的几何造型。曲面造型技术经过数十年的发展, 已经比较成熟。一般采用以下几种基本方法, 即位势方法[1]、Groebner 基方法[2]、合冲模方法[3]、分片代数曲面拼接方法[4]及曲面拼接中的吴方法[5]等。Hartmann 法[6] [7]研究了一种简单的函数曲面来处理一般曲面之间的  $G^1$  连续问题, 并用法向环面和隐式曲面来拼接给定的两个或多个管道曲面。但是, 所拼接的管道曲面的轴线都是共面的情形。这些方法可以用来解决一大类拼接问题。但对于轴线异面管道光滑拼接问题, 相应的齐次线性方程组往往没有非零解或代数理想的交是空集。因此当出现待拼接的曲面轴线异面的情形时, 我们需要寻找新的方法进行曲面拼接。

雷娜[8] [9]证明了两个轴线异面圆管在其任意平面截面处通常不能用三次代数曲面光滑拼接, 提出构造轴线与给定两个圆管的轴线分别共面的辅助圆柱, 并利用二轴共面的吴文俊公式实现了给定圆管的分两段三次光滑拼接。白根柱[10] [11]给出了两个轴线异面的圆管道存在三次拼接曲面的充分必要条件, 并给出了存在光滑拼接的三次曲面时, 两个管道的系数之间的关系。但是, 并没有给出拼接实例。白根柱[12]-[18]用轴线光滑拼接的方法拼接两个轴线异面的管道曲面, 得到了一些结果。

本文将在三次均匀 B 样条曲线光滑拼接轴线异面圆管道轴线的基础上, 进一步构造光滑拼接两个轴线异面圆管道的过渡管道。B 样条方法具有表示与设计自由型曲线曲面的强大功能, 它不仅是最为流行的形状数学描述的主流方法之一, 而且已成为关于工业产品几何定义国际标准的有理 B 样条方法的基础。我们知道, 均匀 B 样条曲线的两端既不在控制多边形的边上, 更不通过首、末顶点。实际上, 人们总是希望所设计的曲线在给定的点起始或终止, 且具有确定的切线方向。为了使 B 样条曲线也和 Bézier 曲线一样通过首、末端点, 且与特征多边形的第一条边和最后一条边相切, 需要调控特征多边形的顶点来实现。

定义 1 给定四个控制顶点  $V_i (i = 0, 1, 2, 3)$ , 对任意  $s \in [0, 1]$  定义曲线

$$r(s) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(s) V_i$$

为均匀三次 B 样条曲线, 其中

$$\begin{cases} N_{0,3} = \frac{1}{6}(-s^3 + 3s^2 - 3s + 1), \\ N_{1,3} = \frac{1}{6}(3s^3 - 6s^2 + 4), \\ N_{2,3} = \frac{1}{6}(-3s^3 + 3s^2 + 3s + 1), \\ N_{3,3} = \frac{1}{6}s^3. \end{cases}$$

为三次均匀多项式基函数。

三次均匀 **B** 样条曲线的几何形状是由特征多边形的顶点来控制的, 调整特征多边形的顶点可得到不同形态的曲线。我们采用三顶点共线的技巧构造三段光滑拼接 **B** 样条曲线, 使其通过特征多边形的顶点并于特征多边形的边相切, 进而构造以这种曲线为轴线的圆管道光滑拼接两个轴线异面的粗细不同的圆管道。

## 2. 构造基于轴线光滑拼接的轴线异面管道的光滑拼接管道

设

$$\Phi_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 N_{11} \cos \varphi + a_1 B_{11} \sin \varphi, \\ y = y_1 + b_1 s + a_1 N_{12} \cos \varphi + a_1 B_{12} \sin \varphi, \\ z = a_1 N_{13} \cos \varphi + a_1 B_{13} \sin \varphi. \end{cases} \text{ 和 } \Phi_2 : \begin{cases} x = a_2 N_{21} \cos \varphi + a_2 B_{21} \sin \varphi, \\ y = y_2 + a_2 N_{22} \cos \varphi + a_2 B_{22} \sin \varphi, \\ z = z_2 + c_2 s + a_2 N_{23} \cos \varphi + a_2 B_{23} \sin \varphi. \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

是两个轴线异面的圆管道的参数表示, 其中  $a_i (i=1,2)$  是两个轴线异面的粗细不同的圆管道的半径,  $N_i = (N_{i1}, N_{i2}, N_{i3}), B_i = (B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}), i=1,2$  分别是  $s=1$  和  $s=0$  时的法矢和副法矢。

$$L_1 : \begin{cases} x = x_1 + 0 \cdot s, \\ y = y_1 + b_1 s, \\ z = 0 + 0 \cdot s, \end{cases} \text{ 和 } L_2 : \begin{cases} x = 0 + 0 \cdot s, \\ y = y_2 + b_2 \cdot s, \\ z = z_2 + c_2 s. \end{cases}$$

是两个圆管道的轴线, 分别位于 **OXY** 平面上与 **X** 轴相交和位于 **OYZ** 平面上与 **Y** 轴相交。

设  $V_0(x_0, y_0, 0), V_1(x_1, y_1, 0)$  是  $L_1$  上的两个点,  $V_2(0, y_2, z_2), V_3(0, y_3, z_3)$  是  $L_2$  上的两个点, 在  $V_0V_1$  的反向延长线上取  $V_{-1}(x_{-1}, y_{-1}, 0)$ , 使得  $|V_1 - V_0| = |V_0 - V_{-1}|$ , 在  $V_2V_3$  的延长线上取  $V_4$ , 使  $|V_2 - V_3| = |V_3 - V_4|$ 。则以  $V_{-1}, V_0, V_1, V_2, V_3, V_4$  为特征多边形的顶点的均匀三次 **B** 样条曲线通过顶点  $V_0, V_3$ , 且与特征多边形的第一条边  $V_0V_1$  与第三条边  $V_2V_3$  相切。

## 3. 构造与轴线异面的圆管道 $\Phi_1$ 与 $\Phi_2$ 光滑拼接的三段光滑圆管道

当两个圆管道的粗细相同, 即  $a_1 = a_2 = a$  时, 光滑拼接两个轴线异面的管道的拼接管道的表示式为

$$p(s, \varphi) = \begin{cases} x(s) + aN_1(s) \cos \varphi + aB_1(s) \sin \varphi, \\ y(s) + aN_2(s) \cos \varphi + aB_2(s) \sin \varphi, \\ z(s) + aN_3(s) \cos \varphi + aB_3(s) \sin \varphi. \end{cases} \quad s \in [0, 1], \varphi \in (0, \pi)$$

其中  $[x(s), y(s), z(s)]$  是 **B** 样条曲线的参数表示

$$N = (N_1(s), N_2(s), N_3(s)), B = (B_1(s), B_2(s), B_3(s))$$

分别是 **B** 样条曲线在点  $s$  处的法矢和副法矢。

当  $a_1 \neq a_2$  时, 再构造一个光滑拼接两个轴线异面的管道的某两个母线  $r_1(s)$  和  $r_2(s)$  的 **B** 样条曲线  $r'(s)$ , 则光滑拼接粗细不同的轴线异面的管道的拼接管道的表示式为

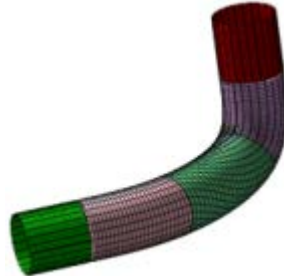
$$p(s, \varphi) = \begin{cases} x(s) + d(s)N_1(s) \cos \varphi + d(s)B_1(s) \sin \varphi, \\ y(s) + d(s)N_2(s) \cos \varphi + d(s)B_2(s) \sin \varphi, \\ z(s) + d(s)N_3(s) \cos \varphi + d(s)B_3(s) \sin \varphi. \end{cases} \quad s \in [0, 1], \varphi \in (0, \pi)$$

其中  $d(s) = \|r'(s) - r(s)\|$ ,  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  表示欧几里得范数。

### 4. 拼接实例

例 1 设轴线异面管道的轴线分别为  $L_1 : \begin{cases} x = 3, \\ y = -3 + s, \\ z = 0. \end{cases}$  和  $L_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 4, \\ z = 3 + s. \end{cases}$  两个轴线异面圆管道的粗细相同,

取  $a = 1$  时, 通过  $V_0(3, -3, 0)$  和  $V_3(0, 4, 3)$  并且与  $L_1$  和  $L_2$  垂直的平面处  $G^1$ -拼接的管道, 如图 1 所示。

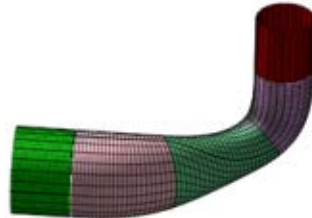


**Figure 1.** Three-segment  $G^1$ -blending diagram is same radiuses tubes whose axes are in non-coplaner take the B-spline curve as its axis

**图 1.** 以 B 样条曲线为轴线的粗细相同轴线异面管道的三段  $G^1$ -拼接图

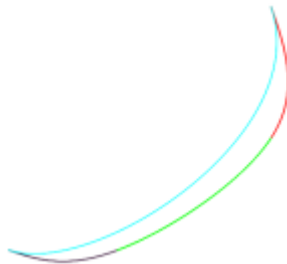
例 2 仍设轴线异面管道的轴线分别为  $L_1 : \begin{cases} x = 3, \\ y = -3 + s, \\ z = 0. \end{cases}$  和  $L_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 4, \\ z = 3 + s. \end{cases}$  两个轴线异面圆管道的粗细不同,

取  $a_1 = 1.5, a_2 = 1$  时, 则通过  $V_0(3, -3, 0)$  和  $V_3(0, 4, 3)$  并且与  $L_1$  和  $L_2$  垂直的平面处  $G^1$ -拼接的管道, 如图 2 所示。



**Figure 2.** Three-segment  $G^1$ -blending diagram is different radiuses tubes whose axes are in non-coplaner take the B-spline curve as its axis

**图 2.** 以 B 样条曲线为轴线的粗细不同轴线异面管道的三段  $G^1$ -拼接图



**Figure 3.** Comparison of the smoothness of the same control vertex B-spline curve and Bézier curve

**图 3.** 同一控制顶点 B 样条曲线与 Bézier 曲线光顺性比较

## 5. 结束语

本文用三次均匀 B 样条曲线光滑拼接两个轴线异面圆管道轴线的基础上, 进一步构造了光滑拼接两个轴线异面圆管道的过渡管道, 得到了光滑拼接轴线异面管道的三段光滑拼接圆管道。以 B 样条曲线为轴线的拼接管道与 Bézier 曲线为轴线的管道相比较光顺性更好, 轴线更接近于控制多边形(图 3)。在构造光滑的拼接管道时, 以 B 样条曲线为轴线的管道光滑拼接两个轴线异面的管道只是一种媒介。不同的媒介可以构造出不同的拼接管道。因此, 我们可以利用更多的空间曲线来构造光滑拼接两个轴线异面的管道, 以满足不同的用途。

## 参考文献

- [1] Hoffmann, E. and Hopcroft, J. (1986) Quadratic Blending Surfaces. *Computer Aided Design*, **18**, 301-307. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(86\)90091-6](https://doi.org/10.1016/0010-4485(86)90091-6)
- [2] Warren, J. (1989) Blending Algebraic Surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, **8**, 263-278. <https://doi.org/10.1145/77269.77270>
- [3] Cox, D., Sederberg, T.W. and Chen, F. (1998) The Moving Line Ideal Basis of Planar Rational Curves. *Computer Aided Geometric Design*, **15**, 803-827. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(98\)00014-4](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(98)00014-4)
- [4] Chen, C.S., Chen, F. and Feng, Y.Y. (2001) Blending Quadric Surface with Piecewise Algebraic Surfaces. *Graphics Models*, **63**, 212-223. <https://doi.org/10.1006/gmod.2001.0552>
- [5] 雷娜, 崔丽, 伍铁如. 两个轴异面的管道拼接[J]. 吉林大学学报(理学版), 2002, 40(2): 138-140.
- [6] Hartmann, E. (1995) Blending an Implicit with a Parametric Surface. *CAGD*, **12**, 825-835. [https://doi.org/10.1016/0167-8396\(95\)00002-1](https://doi.org/10.1016/0167-8396(95)00002-1)
- [7] Hartmann, E. (1998) Numerical Implicitization for Intersection and  $G^1$ -Continuous Blending of Surface. *CAGD*, **15**, 377-397. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00040-X](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00040-X)
- [8] Lei, N., Zhang, S., Dong, T. and Feng, G. (2005) The Existence and Expression of Osculatory Rational Interpolation. *Journal of Information and Computational Science*, **2**, 493-500.
- [9] 白根柱. 两个轴异面圆管的光滑拼接问题[D]: [硕士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2004.
- [10] 白根柱. 隐式代数曲面拼接[J]. 数学的实践与认识, 2006, 36(4): 274-277.
- [11] Bai, G.Z., Wang, H. and Yin, Z.J. (2014) Employing Generalized Bezier Tube to Smoothly Blending Tubes Whose Axes Are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **513-517**, 2301-2306. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.513-517.2301>
- [12] Wang, H. and Bai, G.Z. (2013) Employing Generalized Cylindrical Helicoid Tube to Smoothly Blending Tubes Whose Axes Are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **380-384**, 1750-1754. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.380-384.1750>
- [13] Bai, G.Z. and Wu, Z. (2013) Multi-Degree Reduction Approximation of Bézier Curves by Subdivision Method. *Intelligent Information Management Systems and Technologies*, **9**, 37-42.
- [14] Bai, G.-Z., Liu, S.-Y., Wang, H., Wu, Z. and Yin, Z.-J. (2014) A Novel Method for Smooth Blending Cylindrical Surfaces Whose Axes Are Non-Coplanar Based on Smooth Blending Axes. *Applied Science, Materials Science and Information Technologies in Industry*, **2014**, 687-691. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.687-691.1470>
- [15] Bai, G.-Z., et al. (2014) A Novel Method for Smooth Blending Cylindrical Surfaces Whose Axes Are Non-Coplanar Based on Smooth Blending Axes. *Applied Mechanics and Materials*, **687-691**, 1470-1473. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.687-691.1470>
- [16] Bai, G.-Z., Wang, H., et al. (2014) Smoothly Blending of Two Elliptic Cylinders Whose Axes Are Non-Coplanar. *Applied Mechanics and Materials*, **309-312**, 644-650. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.644-650.309>
- [17] 刘斯语, 白根柱. 利用推广的 Hartmann 方法光滑拼接两个异面直线[J]. 内蒙古民族大学学报(自然科学版), 2015(2): 102-104.
- [18] 邱梦鸾, 肖琳, 白根柱. 用单页双曲螺旋管实现两个轴异面管道的光滑拼接[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2016(2): 108-112.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网首页：<http://cnki.net/>，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：<http://scholar.cnki.net/new>，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；  
或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询。
2. 通过知网首页 <http://cnki.net/>顶部“旧版入口”进入知网旧版：<http://www.cnki.net/old/>，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)