Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(8), 1321-1326
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.88155

L^2 Solutions of BSDEs with a New Kind of Non-Lipschitz

Shiyu Li, Liping Dan, Lufan Yang

Faculty of Science, Jiangxi University of Sciences and Technology, Ganzhou Jiangxi
Email: lishiyu83@163.com, 81798152@qq.com, 754376386@qq.com

Received: Jul. 15th, 2019; accepted: Aug. 1st, 2019; published: Aug. 8th, 2019

Abstract

The classical backward stochastic differential equation (BSDE) is driven by the Brownian motion, but Brownian motion is a very special stochastic process, so the application of backward stochastic differential equation is quite limited. In this paper, we are interested in solving one-dimensional backward stochastic differential equations (BSDEs) with a new kind of non-Lipschitz coefficients [1]. We establish an existence and uniqueness result of solutions in L^2.

Keywords

Backward Stochastic Differential Equation, Continuous Local Martingale, Non-Lipschitz, Existence, Uniqueness

一种新非Lipschitz条件下倒向随机微分方程的L^2解

李师煜，但李萍，杨璐帆

江西理工大学理学院，江西 赣州
Email: lishiyu83@163.com, 81798152@qq.com, 754376386@qq.com

收稿日期：2019年7月15日；录用日期：2019年8月1日；发布日期：2019年8月8日

摘　要

经典的倒向随机微分方程是由布朗运动驱动的，但布朗运动是一种非常特殊的随机过程，致使倒向随机微分方程的应用受到相当大的限制。本文研究了以连续局部鞅为干扰源的一维倒向随机微分方程，在生成元满足一种新非Lipschitz条件下[1]，证明了其L^2解存在且唯一。

文章引用: 李师煜, 但李萍, 杨璐帆. 一种新非 Lipschitz 条件下倒向随机微分方程的 L^2 解[J]. 应用数学进展, 2019, 8(8): 1321-1326. DOI: 10.12677/aam.2019.88155

关键词

倒向随机微分方程，连续局部鞅，非Lipschitz条件，存在性，唯一性

1. 引言

倒向随机微分方程在金融数学、最优控制、随机决策和偏微分方程等领域中有着广阔的应用前景。经典的倒向随机微分方程是由布朗运动驱动的，1990 年 Pardoux 和 Peng [2]给出了 Lipschitz 条件下解的存在唯一性结果。然而 Lipschitz 条件太强，布朗运动太过于理想化，致使倒向随机微分方程的应用受到相当大的限制。因此，一方面，许多学者开始研究各种非 Lipschitz 条件下的倒向随机微分方程来改进 Pardoux 和 Peng 的关于解的存在唯一性，例如，Fan [1]，Mao [3]，Lepeltier 和 Martin [4]，Kobylanski [5] 分别给出了非 Lipschitz 条件下解的存在唯一结果。另一方面，有相当多的学者研究了其他干扰源驱动的倒向随机微分方程，其中，李娟[6]研究了连续局部鞅驱动的 Lipschitz 条件下的倒向随机微分方程，王湘君[7]研究过由连续半鞅驱动的 Lipschitz 条件下的倒向随机微分方程。本文中，我们研究了由连续局部鞅驱动的倒向随机微分方程在 Fan [1]中非 Lipschitz 条件下解的存在唯一性。

2. 主要结果

令 $\left(\Omega,\mathscr{F},\{F_t\}_{t\ge 0},P\right)$ 为一个带信息流的完备的概率空间，其中流 $\{F_t\}_{t\ge 0}$ 满足通常条件，记 $\mathcal{P}$ 为可料 σ 域。$M=\{M_t,F_t:0\le t<\infty\}$ 为一个连续局部鞅，并且 $M_0=0$，$\langle M\rangle$ 为 M 的平方变差过程。$T>0$ 为一个任意固定的数，称为时间区间。

首先给出几个相关记号：

1) 用 $L_M\left(0,T;R^n\right)$ 表示所有使得 $\|x\|_M^2=E\int_0^T|y(s)|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s<+\infty$ 的 F_t −适应的 R^n 值的过程 $x=x(s)$ 的集合。当 $n=1$ 时简记为 L_M 。

2) 用 $L'_M\left(0,T;R^{n\times d}\right)$ 表示所有使得 $\|y\|_M^2=E\int_0^T|z(s)|^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s<+\infty$ 的 F_t 可料的 $R^{n\times d}$ 值的过程 $y=y(s)$ 的集合。当 $n=d=1$ 时简记为 L'_M 。

3) 用 $L^2\left(\Omega,F_T,P;R^n\right)$ 表示所有满足 $E|\xi|^2<+\infty$ 的 F_T −可测的 R^n 值的随机变量 ξ 的集合。当 $n=1$ 时简记为 $L^2\left(\Omega,F_T,P\right)$。

以下，我们将讨论如下形式的一维倒向随机微分方程：

$$y_t=\xi+\int_t^T\left[g\left(s,y_s,z_s\right)\right]\mathrm{d}\langle M\rangle_s-\int_t^T z_s\,\mathrm{d}M_s,0\le t\le T \tag{1}$$

其中，$y(s)$ 为 F_t 适应的过程，$z(s)$ 为 F_t 可料的过程，$\xi\in L^2\left(\Omega,F_T,P\right)$，$\{M_t,F_t;0\le t<+\infty\}$ 为具有零初值的连续局部鞅，具有可料表示性，且 $\langle M\rangle_T$ 为有界的，即存在正常数 C_1，使得 $\langle M\rangle_T\le C_1$, a.s.，函数 $g:\Omega\times[0,T]\times R\times R\to R$ 为 $\mathcal{P}\otimes\mathrm{B}(R)\otimes\mathrm{B}(R)$ 可测的。

假设方程(1)满足以下条件：

(H1) $g(\cdot,0,0)\in L_M$；

(H2) 存在一个单调不减凹函数 $\rho(\cdot): R^{+} \to R^{+}$，使得 $\forall y_1, y_2 \in R, z \in R$，$\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t - a.e.$，

$$\left|g(w,t,y_1,z)-g(w,t,y_2,z)\right|^2 \le \rho\left(\left|y_1-y_2\right|^2\right)$$

其中 $\rho(0)=0$，$\forall u>0$，$\int_{0+}\frac{\mathrm{d}u}{\rho(u)}=+\infty$。

(H3)存在一个常数 $C \ge 0$，使得 $\forall y \in R, z_1, z_2 \in R$，$\mathrm{d}P \times \mathrm{d}t - a.e.$，

$$\left|g(w,t,y,z_1)-g(w,t,y,z_2)\right|^2 \le C\left(\left|z_1-z_2\right|^2\right)$$

(H4) $E\left[\left(\int_0^T \left|g(t,0,0)\right| \mathrm{d}\langle M\rangle_t\right)^2\right] < +\infty$；

注1: $\rho(\cdot)$ 是一个单调不减凹函数，且 $\rho(0)=0$，即 $\rho(\cdot)$ 几乎处处是线性增长的，存在一个常数 $A>0$，使得对 $\forall x \ge 0$，有 $\rho(x) \le A(x+1)$。

定理1 设函数g满足(H1)—(H4)，$\xi \in L^2(\Omega, F_T, P)$，则倒向随机微分方程(1)在 L^2 中有唯一的解。

3. 引理

为了证明定理 1，我们还需要用到下面的引理。我们首先来构造倒向随机微分方程(1)的 Picard 逼近序列，由如下的倒向随机微分方程所定义：

$$y_t^0 = 0;\ y_t^n = \xi + \int_t^T \left[g\left(s, y_s^{n-1}, z_s^n\right)\right] \mathrm{d}\langle M\rangle_s - \int_t^T z_s^n \mathrm{d}M_s, 0 \le t \le T, \tag{2}$$

其中，生成元 $g\left(s, y_s^{n-1}, z_s^n\right)$ 满足(H3)和(H4)，由文献[8]定理 4.2 得，对 $n \ge 1$，方程(2)在 L^2 中有唯一的解 $\left(y_t^n, z_t^n\right)_{t\in[0,T]}$。

由注 1 和(H2)，容易得

$$\left|g\left(s, y_s^{n-1}, 0\right)\right| \le \left|g(s,0,0)\right| + \rho^{\frac{1}{2}}\left(\left|y_s^{n-1}\right|^2\right) \le \left|g(s,0,0)\right| + A^{\frac{1}{2}}\left(\left|y_s^{n-1}\right|+1\right)$$

和

$$E\left[\left(\int_0^T \left|g\left(s, y_s^{n-1}, 0\right)\right| \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)^2\right] \le 4E\left[\left(\int_0^T \left|g(s,0,0)\right| \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)^2\right] + A(2T)^2\left(E\left[\sup_{s\in[0,T]}\left|y_s^{n-1}\right|^2\right]+1\right)$$

引理 1 在定理 1 的假设下，存在一个常数 $c_1>0$ 和常数 $K>0$，且 c_1 只依赖于 C，K 只依赖于 C 和 T，使得对任意的 $t \in [0,T]$，$n, m \ge 1$，有

$$E\left[\sup_{s\in[t,T]}\left|y_s^{n+m}-y_s^n\right|^2\right] \le \frac{1}{2}\mathrm{e}^{c_1(T-t)}\int_t^T \rho\left(E\left[\left|y_s^{n+m-1}-y_s^{n-1}\right|^2\right]\right)\mathrm{d}\langle M\rangle_s \tag{3}$$

和

$$E\left[\sup_{s\in[t,T]}\left|z_s^{n+m}-z_s^n\right|\right] \le K\left\{E\left[\sup_{s\in[t,T]}\left|y_s^{n+m}-y_s^n\right|^2\right] + \int_t^T \rho\left(E\left[\left|y_s^{n+m-1}-y_s^{n-1}\right|^2\right]\right)\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right\} \tag{4}$$

证明：由方程(2)，得 $\left(y_t^{n+m}-y_t^n, z_t^{n+m}-z_t^n\right)_{t\in[0,T]}$ 是如下方程(5)在 L^2 中的解

$$y_t = \int_t^T \left[f_{n,m}(s, z_s)\right]\mathrm{d}\langle M\rangle_s - \int_t^T z_s \mathrm{d}M_s, 0 \le t \le T \tag{5}$$

其中 $f_{n,m}(s, z_s) = g\left(s, y_s^{n+m-1}, z + z_s^n\right) - g\left(s, y_s^{n-1}, z_s^n\right)$。

由(H2)和(H3)，得

$$\left|f_{n,m}\left(s,z_s\right)\right|\le\rho^{\frac{1}{2}}\left(\left|y_s^{n+m-1}-y_s^{n-1}\right|^2\right)+C|z| \tag{6}$$

(6)式意味着方程(5)的生成元 $f_{n,m}\left(s,z_s\right)$ 满足文献[1]命题 1 中的假设(A)，即 $\psi(\cdot)\equiv 0$，$\lambda=C$，$f_t\equiv 0$，$\varphi_t=\rho^{\frac{1}{2}}\left(\left|y_s^{n+m-1}-y_s^{n-1}\right|^2\right)$。又因为 $\rho(\cdot)$ 是一个凹函数，所以由文献[1]命题 1 和命题 2，应用 Fubini 定理和 Jensen 不等式，即可得(3)式和(4)式。 证毕。

引理 2 在定理 1 的假设下，存在一个不依赖于 ξ 的 $T_l\in[0,T]$，常数 $M\ge 0$，使得对 $\forall t\in[T_l,T],n\ge 1$，有 $E\left[\sup\limits_{r\in[t,T]}\left|y_r^n\right|^2\right]\le N$。

证明：由定理 1 的假设，得

$$\left|g\left(s,y_s^{n-1},z\right)\right|\le\left|g\left(s,y_s^{n-1},z\right)-g\left(s,0,0\right)\right|+\left|g\left(s,0,0\right)\right|\le\rho^{\frac{1}{2}}\left(\left|y_s^{n-1}\right|^2\right)+C|z|+\left|g\left(s,0,0\right)\right|$$

即方程(2)的生成元 $g\left(s,y_s^{n-1},z_s^n\right)$ 满足文献[1]命题 1 中的假设(A)。

又因为 $\rho(\cdot)$ 是一个凹函数，所以由文献[1]命题 2，应用 Fubini 定理和 Jensen 不等式，存在两个只依赖于 C 的正常数 c_2 和 c_3，使得对 $\forall t\in[0,T],n\ge 1$，有

$$E\left[\sup_{r\in[t,T]}\left|y_r^n\right|^2\right]\le\mu_t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{c_3(T-t)}\int_t^T\rho\left(E\left[\left|y_s^{n-1}\right|^2\right]\right)\mathrm{d}\langle M\rangle_s \tag{7}$$

其中 $\mu_t=c_2\mathrm{e}^{c_3(T-t)}\left\{E|\xi|^2+E\left[\left(\int_t^T\left|g\left(s,0,0\right)\right|\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right)^2\right]\right\}\ge 0$

令 $N=2\mu_0+2AT$，$T_1=\max\left\{T-\frac{\ln 2}{c_1},T-\frac{\ln 2}{c_3},T-\frac{1}{2}A,0\right\}$，其中 c_1 是引理 1 中的，A 是注 1 中的,则对 $\forall t\in[T_l,T]$，有

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{c_1(T-t)}\le 1,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{c_3(T-t)},A(T-t)\le\frac{1}{2} \tag{8}$$

由(7)和(8)，得

$$E\left[\sup_{r\in[t,T]}\left|y_r^n\right|^2\right]\le\mu_0+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{c_3(T-t)}\int_t^T\rho\left(E\left[\left|y_s^{n-1}\right|^2\right]\right)\mathrm{d}\langle M\rangle_s,t\in[T_1,T] \tag{9}$$

又因为 $\rho(\cdot)$ 是一个单调不减函数，由(9)式，注 1 和(8)式，得 $\forall t\in[T_l,T]$，

$E\left[\sup\limits_{r\in[t,T]}\left|y_r^n\right|^2\right]\le N$，证毕。

4. 定理 1 的证明

先证存在性。先定义一个函数列 $\left\{\varphi_n(t)\right\}_{n\ge 1}$ 如下：

$$\varphi_0(t)=\int_t^T\rho(N)\mathrm{d}\langle M\rangle_s;\varphi_{n+1}(t)=\int_t^T\rho\left(\varphi_n(s)\right)\mathrm{d}\langle M\rangle_s \tag{10}$$

对 $\forall t\in[T_l,T]$，由引理 2，得

$$\varphi_0(t)=\int_t^T\rho(N)\mathrm{d}\langle M\rangle_s\le M,$$

$$\varphi_1(t)=\int_t^T \rho(\varphi_0(s))\mathrm{d}\langle M\rangle_s \le \int_t^T \rho(N)\mathrm{d}\langle M\rangle_s=\varphi_0(t)\le M\text{，}$$

$$\varphi_2(t)=\int_t^T \rho(\varphi_1(s))\mathrm{d}\langle M\rangle_s \le \int_t^T \rho(\varphi_0(s))\mathrm{d}\langle M\rangle_s=\varphi_1(t)\le M\text{。}$$

由数学归纳法，可得

$$0\le \varphi_{n+1}(t)\le \varphi_n(t)\le\cdots\le \varphi_1(t)\le \varphi_0(t)\le M\text{。}$$

因此，对 $\forall t\in[T_l,T]$，函数列 $\{\varphi_n(t)\}_{n\ge1}$ 极限存在，记为 $\varphi(t)$。

因为 $\rho(\cdot)$ 是一个连续函数，且 $\rho(\varphi_n(s))\le\rho(N)$，令 $n\to\infty$，对(10)式取极限，由 Lebesgue 收敛定理，对 $\forall t\in[T_l,T]$，有

$$E\left[\sup_{r\in[t,T]}|y_r^n|^2\right]\le N\text{，}$$

$$E\left[\sup_{r\in[t,T]}|y_r^{1+m}-y_r^1|^2\right]\le\int_t^T\rho\left(E\left[|y_s^m|^2\right]\right)\mathrm{d}\langle M\rangle_s\le\int_t^T\rho(N)\mathrm{d}\langle M\rangle_s=\varphi_0(t)\le M\text{，}$$

$$E\left[\sup_{r\in[t,T]}|y_r^{2+m}-y_r^2|^2\right]\le\int_t^T\rho\left(E\left[|y_r^{1+m}-y_r^1|^2\right]\right)\mathrm{d}\langle M\rangle_s\le\int_t^T\rho(\varphi_0(s))\mathrm{d}\langle M\rangle_s=\varphi_1(t)\le M\text{。}$$

由数学归纳法，可得

$$E\left[\sup_{r\in[T_1,T]}|y_r^{n+m}-y_r^n|^2\right]\le\varphi_{n-1}(T_1)\to0,n\to\infty$$

即 $\{y_t^n\}_{n\ge1}$ 是 cauchy 序列,又因为 $\rho(\cdot)$ 是一个连续函数，由引理 1 中的(4)式知，$\{z_t^n\}_{n\ge1}$ 也是 cauchy 序列，它们的极限分别记为 $\{y_t\}_{t\in[T_1,T]}$ 和 $\{y_t\}_{t\in[T_1,T]}$。令 $n\to\infty$，对(2)式取极限，可得 $\{y_t,z_t\}$ 是具有参数 (ξ,T,g) 的 BSDE 在 $[T_1,T]$ 的 L^2 解。

可以通过迭代可得，$\forall l$，方程(1)在 $[T-l(T-T_1),T]$ 有解，因此可得，方程(1)在 $[0,T]$ 上解的存在性。

再证唯一性：设 $\{y_t^1,z_t^1\}_{t\in[0,T]}$ 和 $\{y_t^2,z_t^2\}_{t\in[0,T]}$ 都是方程(1)的 L^2 解，则 $(y_t^1-y_t^2,z_t^1-z_t^2)_{t\in[0,T]}$

是如下方程(11)的 L^2 解。

$$y_t=\int_t^T[\hat g(s,y_s,z_s)]\mathrm{d}\langle M\rangle_s-\int_t^T z_s\mathrm{d}M_s,0\le t\le T \tag{11}$$

其中，$\hat g(s,y_s,z_s)=g(s,y+y_s^2,z+z_s^2)-\hat g(s,y_s^2,z_s^2)$。

由(H2)和(H3)，可得 $|\hat g(s,y_s,z_s)|\le\rho^{\frac12}(|y|^2)+C|z|$，即方程(11)的生成元 $g(s,y_s^{n-1},z_s^n)$ 满足文献[1]命题 1 中的假设(A)。

由文献[1]命题 1 和命题 2，存在一个只依赖于 C 的正常数 c_4 和一个只依赖于 C 和 T 的正常数 c_5，使得对 $\forall t\in[0,T]$，有

$$E\left[|y_t^1-y_t^2|^2\right]\le\frac12\mathrm{e}^{c_4(T-t)}\int_t^T\rho\left(E\left[|y_s^1-y_s^2|^2\right]\right)\mathrm{d}\langle M\rangle_s \tag{12}$$

和

$$E\left[\left(\int_t^T \left|z_s^1 - z_s^2\right|^2 \mathrm{d}\left\langle M\right\rangle_s\right)\right] \le c_5 \left\{E\left[\sup_{s\in[t,T]}\left|y_s^1 - y_s^2\right|^2\right] + \rho\left(E\left[\sup_{s\in[t,T]}\left|y_s^1 - y_s^2\right|^2\right]\right)\right\}。 \tag{13}$$

对(12)式应用 Bihari’s 不等式，得 $E\left[\left|y_t^1 - y_t^2\right|^2\right] = 0, t\in[0,T]$，因此 $y_t^1 = y_t^2, t\in[0,T], a.s.$，再由(13)式，又可得 $z_t^1 = z_t^2, t\in[0,T], a.s.$，唯一性得证。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11561028，11801238)，江西省教育厅青年科学基金资助项目(GJJ170566，GJJ170567，GJJ170525)，江西理工大学大学生创新创业训练项目(DC2018-072)，江西理工大学本科教学工程项目(XZG-16-01-05)。

参考文献

[1] Fan, S.J. and Jiang, L. (2014) L^p Solutions of BSDEs with a New Kind of Non-Lipschitz Coefficients. *Mathematics*, arXiv: 1402.6773.

[2] Pardoux, E. and Peng, S. (1990) Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation. *Systems Control Letters*, **14**, 55-66. https://doi.org/10.1016/0167-6911(90)90082-6

[3] Mao, X. (1995) Adapted Solution of Backward Stochastic Differential Equations with Non-Lipschitz Coefficients. *Stochastic Processes and Their Applications*, **58**, 281-292. https://doi.org/10.1016/0304-4149(95)00024-2

[4] Leltier, J.P. and Martin, J.S. (1997) Backward Stochastic Differential Equation with Continuous Coefficient. *Statistics & Probability Letters*, **32**, 425-430.

[5] Kobylanski, M. (2000) Backward Stochastic Differential Equations and Partial Differential Equations with Quadratic Growth. *The Annals of Probability*, **18**, 259-276.

[6] 李娟. 一般鞅驱动的倒向随机微分方程[J]. 山东大学学报(理学版), 2005, 40(4): 70-76.

[7] 王湘君. 由连续半鞅驱动的倒向随机微分方程[J]. 数学杂志, 1999, 19(1): 45-50.

[8] Briand, P., Delyon, B., Hu, Y., Pardoux, E. and Stoica, L. (2003) L^p Solutions of Backward Stochastic Differential Equations. *Stochastic Processes and Their Applications*, **108**, 109-129. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(03)00089-9