Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(8), 1392-1397**
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.88163

Hans汉斯

Consensus Problem of Multi-Agent Systems with Time-Delay under Fixed Topology

Moxi Han, Fang Tang

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
Email: 1625833707@qq.com

Received: Jul. 25th, 2019; accepted: Aug. 12th, 2019; published: Aug. 19th, 2019

Abstract

This paper studies the consensus problem of second-order multi-agent systems with time-delay under fixed topology. The pure imaginary roots of the characteristic equation of the system are solved by Hopf bifurcation method. Further, the necessary and sufficient conditions for the conditions for the consistency of the system are obtained through analysis.

Keywords

Multi-Agent, Time-Delay, Hopf Bifurcation, Consensus

固定拓扑下带有时延的二阶多智能体系统的一致性问题

韩摩西，唐　芳

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐
Email: 1625833707@qq.com

收稿日期：2019年7月25日；录用日期：2019年8月12日；发布日期：2019年8月19日

摘　要

本文研究了带有时延的二阶多智能体系统在固定拓扑下的一致性问题，通过Hopf分支方法解出系统的特征方程的纯虚根，进一步，通过分析得到了该系统达到一致性的充要条件。

文章引用: 韩摩西，唐芳. 固定拓扑下带有时延的二阶多智能体系统的一致性问题[J]. 应用数学进展，2019，8(8): 1392-1397. DOI: 10.12677/aam.2019.88163

关键词

多智能体系统，时延，Hopf分支，一致性

1. 引言

多智能体系统是由多个智能体组成的集合，其中每一个智能体是一个物理或抽象实体，能够通过感应器感应环境，并能与其他多智能体进行通讯。在合作控制问题中，智能体之间通过无线网络共享信息或者在初始时刻输入共享信息，这些信息包括相同的控制算法，共同的目标，或者相对的位置信息。一致性问题主要研究如何基于多智能体中个体之间有限的信息交换，来设计算法，使得所有智能体的某一个或所有状态量趋于相等。一致性协议问题作为智能体之间相互作用、传递信息的规则，它描述了每个智能体与其相邻的智能体的信息交换过程，相关文献[1] [2] [3]。

在带有通讯时延的多智能体系统一致性研究中，文献[4] [5] [6] [7] [8]等研究了二阶多智能体系统一致性问题，其中文献[5] [6]考虑领航者和跟随者采用自身状态带有时延的算法，给出了关于时延的一致性条件。受到 Hu 和 Hong [6]的启发，我们进一步利用 Hopf 分支理论对带有时延的领航者－跟随者系统进行研究，本文主要研究了在固定拓扑下带有时延的二阶多智能体系统的一致性问题，通过系统变换将一致性问题转化为稳定性问题，利用 Hopf 分支方法得到系统能够达到一致的条件，并给出时延上界的表达式。

2. 预备知识以及问题描述

在本节中，我们给出一些基本的定义和引理。

在本文中，我们使用以下的图论知识。令 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E},\mathcal{A})$ 表示加权有向图，这里 $\mathcal{V}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 表示图中顶点的集合，$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ 表示图中边的集合，$\mathcal{A}=\left[a_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ 表示与图对应的加权邻接矩阵。在本文中，我们使用 $v_i=v_j$，其中箭头指向信息的发送者。一条从 i 点出发到 j 点的边表示 $e_{ij}=\left(v_i,v_j\right)$。如果边 $e_{ij}\in\varepsilon$，那么 $a_{ji}\neq 0$，否则，$a_{ji}=0$。进一步，我们假定所有的顶点都没有自环，即对 $\mathcal{I}:=\{1,2,3,\cdots,\}$，都有 $a_{ij}=0$。

对于具有 1 个领航者，n 个跟随者的多智能体系统，$\mathcal{G}$ 和 $\bar{\mathcal{G}}$ 分别表示跟随者之间对应的通讯拓扑图和领航者与跟随者之间对应的通讯拓扑图。如果存在一条从顶点 v_i 到 v_j 的路径，我们称 v_j 是 v_i 的可达点，对于图 $\mathcal{G}$ 来说，如果从任意一点都存在一条到顶点 v_j 的路径，那么，v_j 被称为图 $\mathcal{G}$ 中的全局可达点。图对应 $\mathcal{G}$ 的拉普拉斯矩阵表示为

$$L_{ij}=\begin{cases}-a_{ij}, & j\neq i\\ \sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n}a_{ik}, & j=i\end{cases}$$

v_i 的邻居集表示为 $\mathcal{N}_i=\left\{v_j\in\mathcal{V}:\left(v_j,v_i\right)\in\mathcal{E}\right\}$，进一步，$\mathcal{N}_i^-=\left\{v_j\in\mathcal{V}\mid a_{ij}<0\right\}$，$\mathcal{N}_i^+=\left\{v_j\in\mathcal{V}\mid a_{ij}>0\right\}$ 分别表示 v_i 的负邻居集和正邻居集。定义 $B:=diag\left\{b_1,b_2,\cdots,b_n\right\}$ 为领航者与跟随者之间的邻接矩阵。

$b_i>0$ 表示领航者与第 i 个智能体有之间连接。否则 $b_i=0$。

对于系统中含有 1 个领航者，n 个跟随者的多智能体系统，第 i 个跟随者的动态为：

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=v_i(t),\\ \dot{v}_i(t)=u_i(t),\ i\in I\end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_i(t)$， $v_i(t)$ 和 $u_i(t)$ 分别表示第 i 个智能体的位置，速度，和控制输入。

领航者的动态可以被描述如下

$$\dot{x}_0(t)=v_0,$$

这里 $x_0(t)\in R$ 表示领航者的位置， $v_0\in R$ 表示领航者的速度为常数。因此，对于第 i 个跟随者，一个基于邻接顶点连接的控制协议可表示为：

$$u_i(t)=\sum_{j\in N_i}a_{ij}\left[x_j(t-\tau)-x_i(t-\tau)\right]+b_i\left[x_0(t-\tau)-x_i(t-\tau)\right]+k\left(v_0-v_i(t)\right) \tag{2}$$

本文中 a_{ij} 可正，可负，可为 0。其中，k 是一个大于 0 的控制参数。

下面通过变量替换来定义一些向量，令 $x:=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$， $v:=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 。

$u:=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$， $\bar{x}:=x-x_0$， $\bar{v}:=v-v_0$，且令 $\varepsilon(t):=\left(\bar{x}^{\mathrm{T}},\bar{v}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ 。那么系统(1)在控制协议(2)下可以写成：

$$\dot{\varepsilon}(t)=C\varepsilon(t)+E\varepsilon(t-\tau) \tag{3}$$

$C:=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & I_n\\ 0_{n\times n} & -kI_n\end{pmatrix}$， $E:=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 0_{n\times n}\\ -H & 0_{n\times n}\end{pmatrix}$ 其中 $H:=L+B$ 。

(注；经过变量代换，系统(1)在控制协议(2)下的一致性问题，可转化为系统(3)的稳定性问题。)

引理 1 [9] Q 是 Hurwitz 稳定的充要条件是 $k^2>\dfrac{\left(\max\limits_{\mu\in\Lambda(H)}|\mathrm{Im}\,\mu|\right)^2}{\min\limits_{\mu\in\Lambda(H)}|\mathrm{Re}\,\mu|}$，$\left(\min\limits_{\mu\in\Lambda(H)}\mathrm{Re}\,\mu\neq 0\right)$，并且 H 是正稳的，(H 的特征值均具有正实部， $\Lambda(H)$ 表示 H 的所有特征值的集合)其中 $Q:=C+E=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & I_n\\ -H & -kI_n\end{pmatrix}$。

引理 2 [10] 给定分块矩阵 $\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$，其中 $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}\in R^{n\times n}$，若矩阵 $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$ 可两两相互交换，那么 $\det(Q)=\det\left(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}\right)$。

引理 3 [11] 对指数多项式函数 $P\left(\lambda,\mathrm{e}^{-\tau_1\lambda},\cdots,\mathrm{e}^{-\tau_1\lambda}\right)=P_0(\lambda)+P_1(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}+\cdots+P_m(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda\tau_m}$，其中。$P_0(\lambda)$ 是 λ 的 n 次多项式， $P_j(\lambda)$ 是次数不高于 $n-1$ 的多项式， $j=1,2,\cdots,m$，在 $(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m)$ 变化过程中，只有当 $P\left(\lambda,\mathrm{e}^{-\tau_1\lambda},\cdots,\mathrm{e}^{-\tau_1\lambda}\right)$ 在虚轴上出现零点，或者它有零点穿过虚轴时，其位于右半开平面的零点重数之和才有可能发生改变。

3. 主要结果

由引理 2 得，系统(2)的特征多项式 $g(s)$ 满足；

$$\begin{aligned}g(s)&=\det\left(sI_n-C-E\mathrm{e}^{-\tau s}\right)=\det\begin{pmatrix}sI_n & -I_n\\ H\mathrm{e}^{-\tau s} & (s+k)I_n\end{pmatrix}\\ &=\left|\left(s^2+ks\right)I_n+H\mathrm{e}^{-\tau s}\right|=\prod_{i=1}^{n}\left(s^2+ks+\lambda_i\mathrm{e}^{-\tau s}\right),\ \lambda_i\in\Lambda(H)\\ &=:\prod_{i=1}^{n}g_i(s)\end{aligned}$$

下面，我们首先建立在 H 是正稳的前提下，$g(s)$ 有纯虚根的充要条件。

命题 1 $g(s)=0$ 有纯虚根的充要条件为

$$\tau\in\Omega=\left\{\frac{1}{\omega_{i1}}\left(2\bar{k}\pi+\theta_{i1}\right)\mid i\in I;\bar{k}=0,1,\cdots\right\},$$

其中 $\theta_{i1}\in(0,2\pi),\omega_{i1}>0$ 满足 $\omega_{i1}^4+k^2\omega_{i1}^2-|\lambda_i|^2=0$，$\cos(\theta_{i1}\tau)=\left[\omega_{i1}^2\operatorname{Re}(\lambda_i)-k\omega_{i1}\operatorname{Im}(\lambda_i)\right]/|\lambda_i|^2$，$\sin(\theta_{i1}\tau)=\left[\omega_{i1}^2\operatorname{Im}(\lambda_i)+k\omega_{i1}\operatorname{Re}(\lambda_i)\right]/|\lambda_i|^2$，$\lambda_i\in\Lambda(H)$。

证明：(必要性)令 $s=i\omega_i\left(\omega_i\neq0\right)$ 是 $g(s)$ 的一个纯虚根，那么代入 $g_i(s)$ 得

$$\omega_i^2=ik\omega_i+\lambda_i\mathrm{e}^{-i\omega_i\tau}。$$

通过欧拉公式得

$$-\omega_i^2+ik\omega_i+\lambda_i\left[\cos(\omega_i\tau)-i\sin(\omega_i\tau)\right]=0。\tag{4}$$

分离(4)式的实部和虚部，得到

$$k\omega_i-\operatorname{Re}(\lambda_i)\sin(\omega_i\tau)+\operatorname{Im}(\lambda_i)\cos(\omega_i\tau)=0,\tag{5}$$

$$-\omega_i^2+\operatorname{Re}(\lambda_i)\cos(\omega_i\tau)+\operatorname{Im}(\lambda_i)\sin(\omega_i\tau)=0。\tag{6}$$

且 $\sin^2(\omega_i\tau)+\cos^2(\omega_i\tau)=1$。通过(5)，(6)式解得

$$\cos(\omega_i\tau)=\frac{\omega_i^2\operatorname{Re}(\lambda_i)-k\omega_i\operatorname{Im}(\lambda_i)}{|\lambda_i|^2},\tag{7}$$

$$\sin(\omega_i\tau)=\frac{k\omega_i\operatorname{Re}(\lambda_i)+\omega_i^2\operatorname{Im}(\lambda_i)}{|\lambda_i|^2}。\tag{8}$$

另外，通过条件 $\sin^2(\omega_i\tau)+\cos^2(\omega_i\tau)=1$，得到

$$\frac{|\lambda_i|^2\cdot\left(\omega_i^4+k^2\omega_i^2\right)}{|\lambda_i|^4}=1,$$

即

$$\omega_i^4+k^2\omega_i^2-|\lambda_i|^2=0。$$

因为 ω_i 为一实数，解(9)式，可得 ω_i 的两个实根如下；

$$\omega_{i1}=\sqrt{\frac{-k^2+\sqrt{k^4+4|\lambda_i|^2}}{2}},\quad \omega_{i2}=-\sqrt{\frac{-k^2+\sqrt{k^4+4|\lambda_i|^2}}{2}}$$

那么，令 $0<\theta_{ij}<2\pi$ 且 $\cos(\theta_{ij})=\dfrac{\omega_{ij}^2\operatorname{Re}(\lambda_i)-k\omega_{ij}\operatorname{Im}(\lambda_i)}{|\lambda_i|^2}$，$\sin(\theta_{ij})=\dfrac{\omega_{ij}^2\operatorname{Im}(\lambda_i)+k\omega_{ij}\operatorname{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|^2}$，$j=1,2$。

下面分为两种情况讨论，(1)若 $\operatorname{Im}(\lambda_i)\neq0$，则存在一个整数 p，$p\in I$，满足 $\cos(\omega_{i1}\tau)=\cos(\omega_{p2}\tau)$，$\sin(\omega_{i1}\tau)=-\sin(\omega_{p2}\tau)$，则 $\theta_{i1}=2\pi-\theta_{P2}$。(2)若 $\operatorname{Im}(\lambda_i)=0$，则 $\cos(\omega_{i1}\tau)=\cos(\omega_{i2}\tau)$，$\sin(\omega_{i1}\tau)=-\sin(\omega_{i2}\tau)$，那么，$\theta_{i2}=2\pi-\theta_{i1}$。因此，

$$
\begin{aligned}
\tau\in\Omega &= \left\{\frac{1}{\omega_{i1}}\left(2\bar{k}\pi+\theta_{i1}\right)\mid i\in I;\bar{k}=0,1,\cdots\right\}\cup\left\{\frac{1}{\omega_{i2}}\left(2\bar{k}\pi+\theta_{i2}\right)\mid i\in I;\bar{k}=-1,-2,\cdots\right\}\\
&=\left\{\frac{1}{\omega_{i1}}\left(2\bar{k}\pi+\theta_{i1}\right)\mid i\in I;\bar{k}=0,1,\cdots\right\}\cup\left\{\frac{1}{\omega_{i2}}\left(2\bar{k}\pi-\theta_{i2}\right)\mid i\in I;\bar{k}=1,2,\cdots\right\}\\
&=\left\{\frac{1}{\omega_{i1}}\left(2\bar{k}\pi+\theta_{i1}\right)\mid i\in I;\bar{k}=0,1,\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

(充分性)下面验证 $\tau=\frac{1}{\omega_{i1}}\left(2\bar{k}\pi+\theta_{i1}\right)$ 为方程式(4)的根。将它代入(4)式的左边，得

$$
ik\omega_i+\left[\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)+i\,\mathrm{Im}\left(\lambda_i\right)\right]\cdot\left[\frac{\omega_i^2\,\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)-k\omega_i\,\mathrm{Im}\left(\lambda_i\right)}{\left|\lambda_i\right|^2}-i\frac{\omega_i^2\,\mathrm{Im}\left(\lambda_i\right)+k\omega_i\,\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)}{\left|\lambda_i\right|^2}\right]=0。
$$

则(4)式成立。那么，当 $s=i\omega_{ij},j=1,2$ 时，有 $g_i\left(s\right)=0$。则充分性得证。

命题 2 在 H 是正稳的条件下，s 是方程 $g_i\left(s\right)=0$，$i\in I$ 的一个根，那么，在点 $\tau\in\Omega$ 处 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\tau$ 存在且 $\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)\Big|_{\tau\in\Omega}>0$ 恒成立。

证明：令 $\bar{g}_i\left(s,\tau\right):=s^2+ks+\lambda_i\mathrm{e}^{-\tau s}$，则 $\bar{g}_i\left(s,\tau\right)$ 满足(1) $\bar{g}_i\left(i\omega_0,\tau_0\right)=0$，其中 $\tau_0\in\Omega$。$i\omega_0$ 是对应的纯虚根。

(2) $\bar{g}_i\left(s,\tau\right)$ 在点 $\left(i\omega_0,\tau_0\right)$ 处连续。(3) $\frac{\partial\bar{g}_i}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial\bar{g}_i}{\partial\tau}$ 是连续的，且 $\frac{\partial\bar{g}_i}{\partial s}\Big|_{\left(i\omega_0,\tau_0\right)}\neq0$。那么，在 $g_i\left(s\right)=0$ 关于 τ 求导，得

$$
2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}+k\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}+\lambda_i\left(-s-\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{e}^{-\tau s}=0,
$$

则

$$
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\lambda_i s\mathrm{e}^{-\tau s}}{2s+k-\lambda_i\tau\mathrm{e}^{-\tau s}}。
$$

令 $\mathcal{X}=\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)\sin\left(\omega_{ij}\right)-\mathrm{Im}\left(\lambda_i\right)\cos\left(\omega_{ij}\right)$，$\mathcal{Y}=\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)\cos\left(\omega_{ij}\right)+\mathrm{Im}\left(\lambda_i\right)\sin\left(\omega_{ij}\right)$，那么

$$
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\Big|_{s=i\omega_{ij}}=\frac{\omega_{ij}\left(\mathcal{X}+i\mathcal{Y}\right)}{k-\tau\mathcal{Y}+i\left(2\omega_{ij}+\tau\mathcal{X}\right)},
$$

那么

$$
\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)\Big|_{\tau\in\Omega}=\frac{\omega_{ij}\left[\mathcal{X}\left(k-\tau\mathcal{Y}\right)+\mathcal{Y}\left(2\omega_{ij}+\mathcal{X}\tau\right)\right]}{\left(k-\tau\mathcal{Y}\right)^2+\left(2\omega_{ij}+\mathcal{X}\tau\right)^2},
$$

令 $h\left(\omega_{ij},\tau\right)=k-\tau\mathcal{Y}+i\left(2\omega_{ij}+\tau\mathcal{X}\right)$，利用(7)，(8)，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\left|h\left(\omega_{ij},\tau\right)\right|^2\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)\Big|_{\tau\in\Omega}\\
&=\omega_{ij}\left[\mathcal{X}\left(k-\tau\mathcal{Y}\right)+\mathcal{Y}\left(2\omega_{ij}+\mathcal{X}\tau\right)\right]=\omega_{ij}\left[\mathcal{X}k+2\mathcal{Y}\omega_{ij}\right]\\
&=\left[\omega_{ii}k\,\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)+2\omega_{ij}^2\,\mathrm{Im}\left(\lambda_i\right)\right]\sin\left(\omega_{ij}\right)+\left[\omega_{ij}k\left(-\mathrm{Im}\left(\lambda_i\right)\right)+2\omega_{ij}^2\,\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)\right]\cos\left(\omega_{ij}\tau\right)\\
&=\left[2\omega_{ij}^4+k^2\omega_{ij}^2\right]\left[\mathrm{Re}^2\left(\lambda_i\right)+\mathrm{Im}^2\left(\lambda_i\right)\right]\Big/\left|\lambda_i\right|^2=2\omega_{ij}^4+k^2\omega_{ij}^2
\end{aligned}
$$

$2\omega_{ij}^4 + k^2\omega_{ij}^2 > 0$，显然，$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)\Big|_{\tau\in\Omega} > 0$ 成立。

定理 1 在 H 是正稳的前提下，若 $k^2 > \frac{\left(\max\limits_{\mu\in\Lambda(H)}|\mathrm{Im}\,\mu|\right)^2}{\min\limits_{\mu\in\Lambda(H)}|\mathrm{Re}\,\mu|}$，$\left(\min\limits_{\mu\in\Lambda(H)}\mathrm{Re}\,\mu\neq 0\right)$，则系统(1)可以达到一致性当且仅当

$$\tau < \tau^* = \min_{i\in I}\left\{\frac{\theta_{i1}}{\omega_{i1}}\right\}。$$

证明：由引理 1 得，当 $\tau = 0$ 时，可得系统(3)是 Hurwitz 稳定的，即系统(1)在控制协议(2)下可达到一致。通过引理 3 和命题 2 知，在 $0<\tau<\tau^*$ 时，系统(3)的根都具有负实部，$\tau=\tau^*$ 是使得方程具有纯虚根的第一个 τ 值，这时系统(3)在右半开平面具有零点，进一步，当，每经过 $\tau>\tau^*$ 时，系统(3)在右半开平面上的零点个数就会增加。所以当 $\tau\geq\tau^*$ 时，时系统(3)不能达到稳定，即系统(1)不能达到一致，所以能够使得系统(1)达到一致的时延 τ 的取值范围为 $\left[0,\tau^*\right)$。

4. 结论

本文主要研究了固定拓扑下具延迟的多智能体的一致跟踪控制问题。利用 Hopf 分支方法找到保证多智能体系统达到一致的时延上界。此外，H 的正稳定性依赖于通信拓扑以及各个智能体之间的连接权重，在后续工作中，我们将进一步研究当通信拓扑图为符号图时，矩阵 H 正稳定的条件。

参考文献

[1] Reynolds, C. (1987) Flocks, Birds and Schools: A Distributed Behavioral Model. *Computer Graphics*, **21**, 25-34. https://doi.org/10.1145/37402.37406

[2] Breder, C.M. (1954) Equations Descriptive of Fish Schools and Other Animal Aggregations. *Ecology*, **35**, 361-370. https://doi.org/10.2307/1930099

[3] Vicsek, T., Czirok, A., Ben-Jacob, E., *et al*. (1995) Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles. *Physical Review E*, **75**, 1226-1229. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1226

[4] Lin, P. and Jia, Y.M. (2007) Distributed Consensus Control for Second-Order Agents with Fixed Topology and Time-Delay. 26*th Chinese Control Conference*, Zhangjiajie, 26-31 July 2007, 577-581. https://doi.org/10.23919/ECC.2007.7068297

[5] Hu, J. and Hong, Y. (2007) Leader Following Coordination of Multi-Agent Systems with Coupling Time Delays. *Physica A*, **374**, 853-863. https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.08.015

[6] Tian, Y.P. and Liu, C.L. (2009) Robust Consensus of Multi-Agent Systems with Diverse Input Delays and Nonsymmetric Interconnection Perturbations. *Automatica*, **45**, 1347-1353. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.01.009

[7] Yang, W., Bertozzi, A.L. and Wang, X. (2008) Stability of a Second Order Consensus Algorithm with Time Delay. 47*th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, 9-11 December 2008, 2926-2931.

[8] Huang, N., Duan, Z. and Chen, G.R. (2016) Some Necessary and Sufficient Conditions for Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems with Sampled Position Data. *Automatica*, **63**, 148-155. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.10.020

[9] Zhu, W. and Cheng, D. (2010) Leader-Following Consensus of Second-Order Agents with Multiple Time-Varying Delays. *Automatica*, **46**, 1994-1999. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.08.003

[10] Ren, W. and Cao, Y. (2011) Distributed Coordination of Multi-Agent Networks: Emergent Problems, Models and Issues. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-0-85729-169-1

[11] Ruan, S. and Wei, J. (2003) On the Zeros of Transcendental Functional with Applications to Stability of Delay Differential Equations with Two Delays. *Dynamics of Continuous, Discrete Impulsive Systems Series A. Mathematical Analysis*, **10**, 863-874.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页：http://cnki.net/，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：http://scholar.cnki.net/new，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；
   或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询。
2. 通过知网首页 http://cnki.net/顶部“旧版入口”进入知网旧版：http://www.cnki.net/old/，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org