Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(8), 1418-1431
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.88166

Radial Positive Solutions of p-Laplacian Problem with Nonnegative Local Terms

Yong Zeng

Guangxi University, Nanning Guangxi
Email: 452970899@qq.com

Received: Aug. 1^{st}, 2019; accepted: Aug. 15^{th}, 2019; published: Aug. 22^{nd}, 2019

Abstract

In this paper, we mainly study the existence of radial solutions for the following p-Laplacian problem:

$$\begin{cases} -m(\|u\|^p)div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(|x|, u), & x \in B; \\ u(x) > 0, & x \in B; \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

where f and m satisfy certain conditions. We prove that the above p-Laplacian problem has a radial solution through the origin mainly by means of upper and lower solutions. Firstly, we make the auxiliary problem sequence of the original problem. Then we get a monotone bounded solution sequence by solving the problem sequence. Then we can get that when n tends to infinity, there exists a u, which makes this solution sequencetend to u. Finally, we prove that u is the radial solution of the original problem. The concrete proof is given in the third part.

Keywords

Radial Solution, Upper and Lower Solutions, p-Laplacian Problem

带有非负局部项的p-Laplacian问题的径向正解

曾　勇

文章引用: 曾勇. 带有非负局部项的p-Laplacian问题的径向正解[J]. 应用数学进展, 2019, 8(8): 1418-1431.
DOI: 10.12677/aam.2019.88166

广西大学，广西 南宁
Email: 452970899@qq.com

收稿日期：2019年8月1日；录用日期：2019年8月15日；发布日期：2019年8月22日

摘 要

本文主要研究下面p-Laplacian问题径向解的存在性：

$$\begin{cases} -m(\|u\|^p)div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(|x|, u), & x \in B; \\ u(x) > 0, & x \in B; \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

其中f和m满足一定条件，我们主要通过上下解的方法来证明上述p-Laplacian问题有过原点的径向解，首先我们做出原问题的辅助问题序列，然后通过求解此问题序列得出一个单调有界解序列，从而可以得出当$n \to \infty$ 时，存在一个$u \in C^1[0,1) \cap C[0,1]$ 使得$u_n \to u$，最后证明u 即为所求的径向解，具体证明在第三部分给出。

关键词

径向解，上下解，p-Laplacian问题

1. 引言

本文主要讨论如下非负局部项的p-Laplacian方程：

$$\begin{cases} -m(\|u\|^p)div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(|x|, u), & x \in B; \\ u(x) > 0, & x \in B; \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中，$B = B_1(0)$为R^N上球心位于原点的单位开球，$N \geq 2$，$p > 1$。$\|u\|^p = \int_B |u|^p dx$，m:$R^+ \to R$为连续函数，$f : [0,1) \times (0, +\infty) \to R$ 是可变号的连续函数，且f 在$|x| = 1$ 或$u = 0$ 处可能奇

异。随着数学的不断发展，对p-Laplacian问题的研究也不断深化，但大多数学者感兴趣的是p-Laplacian问题正解的存在性(有关它的研究可以参见文献 [1] [2])，而对其径向解的研究则很少(有关其他的径向解可以参照文献 [3] [4] [5])。在本文我们先找出解原问题的辅助问题序列，再通过上下解方法结合泛函分析的相关知识(见文献 [6]和 [7])，而得到原问题的解存在。

问题(1)可以写成下面常微分方程形式：

$$\begin{cases} -m(N\alpha(N)\int_0^1 s^{N-1}|u(s)|^p ds)r^{1-N}(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = f(r,u), & r\in(0,1); \\ u(r)>0, & r\in(0,1); \\ u'(1)=0, u(0)=0 \end{cases}$$

其中，$\alpha(N)=\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)}$，因为$N\alpha(N)\int_0^1 s^{N-1}|u(s)|^p ds$ 只与N、p有关，所以我们可以令$\phi(N,p)=N\alpha(N)\int_0^1 s^{N-1}|u(s)|^p ds$，从而得到下式：

$$\begin{cases} -m(\phi(N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = f(r,u), & r\in(0,1); \\ u(r)>0, & r\in(0,1); \\ u'(1)=0, u(0)=0 \end{cases} \tag{2}$$

在这篇文章中我们做下面三个假设：

(H_1) 对任意的紧子集$E\subset[0,1)$，对于给定的$L>0$，总存在$\varepsilon>0$ 对所有的$(r,u)\in E\times(0,\varepsilon]$ 有：

$$f(r,u)>L$$

(H_2) 对任意的$\delta>0$存在函数$h_\delta(r)\in C([0,1);(0,+\infty))\cap L^1(0,1)$，当$r\in[0,1)$且$u\geq\delta$ 时，

$$|f(r,u)|\leq h_\delta(r)$$

(H_3) 对给定的$0<\kappa_2<\kappa_1$,$\kappa_2\leq m(\|u\|^p)\leq\kappa_1$.

定义1.1：函数$u\in C^1[0,1)\cap C[0,1]$称为问题(2)的解，如果u在古典意义下满足(2)式。

有了上述三个条件，我们就可以得出下面的主要结论：

定理1.1: 在(H_1)、(H_2)和(H_3)的假设下，问题(2)至少存在一个正解$u\in C^1[0,1)\cap C[0,1]$。

文章基本组织结构如下：接下来的部分主要讲一些预备知识及两个基础命题，第三部分证明主要结论，即定理1.1 的证明。

2. 预备部分

为了证明定理1.1我们可先考虑下面边值问题：

$$\begin{cases} -m(\phi(N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = f(r,u), & r\in(0,1); \\ u'(1)=0, u(0)=a\geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中a为参数。

定义2.1：如果函数$u\in C^1[0,1)\cap C[0,1]$满足下面方程：

$$\begin{cases} -m(\phi(N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')'\geq f(r,u), \quad r\in(0,1); \\ u'(1)\geq 0, u(0)\geq a \end{cases} \tag{4}$$

则称u为问题(3)的上解，用$\bar{u}$ 表示。如果用小于等于号代替上面的大于等于号，则得到了下解的定义，用$\underline{u}$ 表示。然后，我们定义$C[0,1]$的一个子区间$\langle\bar{u},\underline{u}\rangle$：

$$\langle\underline{u},\bar{u}\rangle=\{u\in C[0,1]:\underline{u}\leq u\leq\bar{u}, r\in[0,1)\}.$$

对于任意的$n\in N$，我们给出如下定义：

$$E_n=[\frac{1}{2^n},1], \tilde{E}_n=[(\frac{1}{2^n})^{\frac{p}{p-1}},1]$$

显然，$E_n\subset E_{n+1}$,$\tilde{E}_n\subset\tilde{E}_{n+1}$，由假设$(H_1)$知存在$\varepsilon_n>0$ 对任意的$(r,u)\in E_n\times(0,\varepsilon_n]$，使得$f(r,u)>L$。不失一般性，我们可以假设$\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减序列且

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$$

对于上面的区间，我们可以找到一个函数$\gamma(r)\in C^1[0,1]$且

$$r^{N-1}|\gamma'(r)|^{p-2}\gamma'(r)\in C^1[0,1]$$

使得

$$\begin{cases} \gamma'(0)\leq 0,\gamma(0)=0 \\ \gamma(r)>0, & r\in(0,1); \\ \gamma(r)\leq\varepsilon_1, & r\in E_1. \\ \gamma(r)\leq\varepsilon_n, & r\in E_n\backslash E_{n-1}, n\geq 2 \end{cases} \tag{5}$$

接下来我们在定义一个函数：

$$q(r)=\begin{cases} \varepsilon_1^{p-1}, & r\in\tilde{E}_1 \\ \varepsilon_n^{p-1}, & r\in\tilde{E}_n\backslash\tilde{E}_{n-1}, n\geq 2 \\ 0, & r=0 \end{cases}$$

则$q(r)$在[0,1]上递增，然后我们取：

$$q_1(r)=\int_0^r q(s)ds$$

$$q_2(r)=\int_0^{r^{\frac{p}{p-1}}}(\int_0^s q(\tau)d\tau)^{\frac{1}{p-1}}ds$$

所以$q_1(r)\leq q(r)$，而且$q_1(r)$是[0,1]上的连续函数，$q_2(r)$是严格递增的，而且

$$\begin{aligned} q_2(r) &\le \int_0^{r^{\frac{p}{p-1}}} q^{\frac{1}{p-1}}(s)ds \\ &\le (q(r^{p/(p-1)}))^{1/(p-1)} \\ &= \begin{cases} \varepsilon_1, & r\in E_1 \\ \varepsilon_n, & r\in E_n\backslash E_{n-1}, n\ge 2 \\ 0, & r=0 \end{cases} \end{aligned}$$

在$r\in[0,1]$上，令$\gamma(r)=q_2(r)$，则$\gamma(r)$满足(5)。所以，我们有：

$$f(r,u)\ge L,(r,u)\in[0,1)\times\{u:0<u\le\gamma(r)\}$$

$$\gamma'(r)=(\frac{p}{p-1})r^{\frac{1}{p-1}}(\int_0^{r^{\frac{p}{p-1}}} q(t)dt)^{\frac{1}{p-1}}$$

由此可知，

$$r^{N-1}|\gamma'(r)|^{p-2}\gamma'(r)=(\frac{p}{p-1})^{p-1}r^N\int_0^{r^{\frac{p}{p-1}}} q(t)dt$$

不难看出$r^{N-1}|\gamma'(r)|^{p-2}\gamma'(r)\in C^1[0,1]$。令$g(r)=-\frac{m(\phi(N,p))}{r^{N-1}}(r^{N-1}|\gamma'(r)|^{p-2}\gamma'(r))'$，因为$q(r)>0$且递增，从而

$$\lim_{r\to0}g(r)=-\lim_{r\to0}m(\phi(N,p))\frac{N(\frac{p}{p-1})^{p-1}\int_0^{r^{\frac{p}{p-1}}} q(t)dt}{r}=0$$

因为$g(r)$在(0,1]上只有在$r=0$处奇异且$g(r)$在$(0,1]$上连续，所以$g(r)$在[0,1]上有界。接下来我们给出一些有用的定理。为了方便，我们给出下面约定：

$$K_0=min\{1,L/(|g|_\infty+1)\}$$

命题2.2：假设函数$h:[0,1)\times(0,\infty)\to R$是连续函数，对所有的$(r,u)\in[0,1)\times(0,\infty)$,$h(r,u)\ge f(r,u)$。设$v\in C[0,1]\cap C^1[0,1]$是下面方程的解，且对所有的$r\in(0,1)$,$v(r)>0$：

$$\begin{cases} -m(\phi(N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|v'|v')'=h(r,v) \\ v'(1)\ge0,v(0)>0 \end{cases} \tag{6}$$

则

$$v(r)\ge K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(r),r\in[0,1] \tag{7}$$

证明：定义$\omega(r)=v(r)-K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(r)$，因为$v(0)>0=K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(0)$，所以$\omega(0)>0$。先证$\omega(1)\ge0$，由反证法，设$\omega(1)<0$，则存在$r_1\in(0,1)$使得：

$$\begin{cases} \omega(r) > 0, \quad r \in [0, r_1); \\ \omega(r_1) = 0 \\ \omega'(r_1) \leq 0 \end{cases} \tag{8}$$

对$r \in (0, r_1)$，由(H_1)和K_0的定义知：

$$-m(\phi(N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|v'|^{p-2}v')' \geq f(r,v) \geq L \geq K_0(|g|_\infty + 1)$$

再由$g(r)$的定义得：

$$-m(\phi(N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|v'|^{p-2}v')' > -K_0 m(\phi(\phi(N,p)))r^{1-N}(r^{N-1}|\gamma'|^{p-2}\gamma')'$$

$$(r^{N-1}|v'|^{p-2}v')' > (r^{N-1}|K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma'|^{p-2}K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma')' \tag{9}$$

将(9)式在$(0, r_1)$上积分再由$|x|^{p-2}x$的单调性得

$$v'(r_1) > K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma'(r_1)$$

即$\omega'(r_1) > 0$，矛盾。所以$\omega(1) \geq 0$。接下来,我们假设(7)式不成立，则存在$\lambda_3 \in (0,1)$，使得

$$\omega(\lambda_3) < 0$$

再由$\omega(0) > 0$和$\omega(1) \geq 0$得：

$$\begin{cases} \omega(b_1) = \omega(b_2) = 0, & b_1, b_2 \in (0,1) \\ \omega(r) < 0, & r \in (b_1, b_2) \\ \omega'(\xi) = 0, & \xi \in (b_1, b_2) \end{cases} \tag{10}$$

用上面同样的方法得(9)式仍然成立。对任意的$r \in (\xi, b_2)$将(9)式在(ξ, r)上积分再由(10)式得：

$$\omega\prime(r) > 0$$

将上面不等式在b_1到r上积分得：

$$\omega(r) > 0$$

这与(10)式矛盾，所以(7)式成立。

命题2.3: 设$\underline{u}, \bar{u}$分别为问题(3)的下解和上解，如果它们满足下面条件：

(i) $0 < \underline{u} \leq \bar{u} < +\infty, r \in [0,1]$

(ii) 存在函数$h(r) \in C([0,1);(0,+\infty)) \cap L'(0,1)$，当$(r,u) \in [0,1) \times < \bar{u}, \underline{u} >$ 时

$$|f(r,u)| \leq h(r)$$

则问题(3)至少存在一个解$u \in C[0,1] \cap C^1[0,1)$且对于$r \in [0,1]$，$\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$.

证明：首先定义一个辅助函数：

$$f^*(r,u)=f(r,\beta(r,u))+\beta(r,u)$$

其中

$$\beta(r,u)=\begin{cases}\underline{u}(r), & u\le \underline{u}(r);\\ u, & \underline{u}(r)\le u\le \bar{u}(r)\\ \bar{u}(r), & u\ge \bar{u}(r)\end{cases} \tag{11}$$

显然，$f^*:[0,1)\times R\to R$为连续函数且$\beta(r,u)$有界，所以，我们可以得到：

$$|f^*(r,u)|\le h(r)+M,(r,u)\in[0,1]\times R \tag{12}$$

其中$M=\sup\limits_{r\in[0,1)}\bar{u}(r)$，接下来让我们考虑下面问题：

$$\begin{cases}-m(\phi((N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')'=f^*(r,u), \quad r\in(0,1);\\ u'(1)=0,u(0)=a\end{cases} \tag{13}$$

由分析法，要证上述问题有解，只需证存在u满足上面方程，所以用常微分的方法及条件(H_3)对上式积分得：

$$-|u'|^{p-2}u'=r^{1-N}\int_0^r\frac{s^{N-1}f^*(s,u(s))}{m(\phi(N,p))}ds \tag{14}$$

令$\varphi_p(x)=|x|^{p-2}x$，用待定系数法可求得它的反函数为$\varphi_p^{-1}(x)=|x|^{\frac{1}{p-1}-1}x$。所以，

$$u'=-\varphi_p^{-1}(\varphi_p(u'))=-\varphi_p^{-1}(r^{1-N}\int_r^1\frac{s^{N-1}f^*(s,u(s))}{m(\phi(N,p))}ds)$$

$$u=a-\int_0^r\varphi_p^{-1}(t^{1-N}\int_t^1\frac{s^{N-1}f^*(s,u(s))}{m(\phi(N,p))}ds)dt$$

用X表示$C[0,1]$，定义一个算子$A:X\to X$如下：

$$(Au)(r)=a-\int_0^r\varphi_p^{-1}(t^{1-N}\int_t^1\frac{s^{N-1}f^*(s,u(s))}{m(\phi(N,p))}ds)dt \tag{15}$$

所以$Au\in C[0,1]$，由(15)式、$h(r)\in L^1(0,1)$和(H_3) 知，Au是有界的，通过(15)式我们把证明u是(13)的解转换成证明u 是Au的不动点。

$$\begin{aligned}|\frac{d(Au)(r)}{dr}| &= |\varphi_p^{-1}(r^{1-N}\int_r^1\frac{s^{N-1}f^*(s,u(s))}{m(\phi(N,p))}ds)|\\ &\le |\varphi_p^{-1}(r^{1-N}\int_r^1(h(s)+M)s^{N-1}ds|\\ &\le |\varphi_p^{-1}(\int_r^1\frac{h(s)}{\kappa_2}ds+\frac{M}{\kappa_2})|\end{aligned}$$

所以，Au是等度连续的，由$Arzela-Ascoli$定理知，$A(X)$是一个相对紧集，再由$Schauder$不动点定理得：算子A存在不动点，所以$u \in C[0,1] \cap C^1[0,1)$是问题(13)的解。

接下来我们证明$\underline{u} \le u \le \bar{u}$，首先，证明$\underline{u} \le u$，我们令$d(r) = \underline{u}(r) - u(r)$，由反证法，假设存在$r^* \in [0,1)$满足$\underline{u}(r^*) > u(r^*)$，然后由下解的定义，我们有:$d(0) \le 0$及$d'(1) \le 0$，现在我们根据$d(1)$的符号我们分下列两种情况：

情况一：$d(1) > 0$

假如对任意的$r \in [0,1]$，$d(r) \ge 0$恒成立。根据$\underline{u}(r)$是下解和(11)式得：

$$\begin{aligned} -m(\phi(N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|\underline{u}'|^{p-2}\underline{u}')' &\le f(r,u) \\ &= f^*(r,u) - \beta(r,u) \end{aligned}$$

因为$m(\phi(N,p)) > 0$，所以可得：

$$(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' < (r^{N-1}|\underline{u}'|^{p-2}\underline{u}')' \tag{16}$$

将上式放缩后从r到1积分再由$d'(1) \le 0$得：

$$r^{N-1}|\underline{u}'|^{p-2}\underline{u}' < r^{N-1}|u'|^{p-2}u'$$

即

$$\underline{u}'(r) < u'(r)$$

再将上式从0到r上积分得：

$$\underline{u}(r) < u(r)$$

即$d(r) < 0$矛盾，另一方面，如果$d(r) \ge 0$不恒成立，即存在$r_2 \in (0,1)$,使得$d(r) < 0$。又因为$d(1) > 0$，所以由零点存在定理得：存在$r_3 \in (r_2,1)$，使得

$$\begin{cases} d(r) \ge 0, \quad r \in [r_3,1); \\ d(r_3) = 0 \\ d'(r_3) \ge 0 \end{cases} \tag{17}$$

在区间$(r_3,1)$上做与上类似的讨论可得(16)式仍然成立。然后再在r_3到1上积分和放缩得：

$$\underline{u}'(r_3) < u'(r_3)$$

即

$$d'(r_3) < 0$$

与(17)式矛盾，所以情形一是不可能的。

情形二：$d(1) \le 0$

因为$d(1) \leq 0$且$d(r^*) > 0$，所以存在λ_1、$\lambda_2 \in [0,1]$，使得$d(\lambda_1) = d(\lambda_2) = 0$，且对任意的$r \in (\lambda_1, \lambda_2)$，$d(r) > 0$. 所以由中值定理知：存在$\xi \in (\lambda_1, \lambda_2)$使得$d'(\xi) = 0$很容易验证在$r \in [\lambda_1, \lambda_2]$上(16) 式仍然成立。对任意的$r \in [\xi, \lambda_2)$, 将(16)式在$\xi$到$r$上积分得：

$$r^{N-1}|\underline{u}'|^{p-2}\underline{u}' > r^{N-1}|u'|^{p-2}u'$$

即对任意的$r \in [\xi, \lambda_2)$有

$$d'(r) > 0$$

再将上式在r到λ_2上积分得：

$$d(r) < 0, r \in (\lambda_1, \lambda_2)$$

这与对任意的$r \in [\lambda_1 \lambda_2]$,$d(r) > 0$矛盾。所以，由上述讨论可知在[0,1]上$\underline{u}(r) \leq u(r)$，经过上面类似的讨论可得，$u(r) \leq \bar{u}(r)$，所以$\underline{u}(r) \leq u(r) \leq \bar{u}(r)$，证毕。

3. 主要结论及其证明

为了证明定理1.1我们需要一些引理。现做如下约定，对任意的$n \in N$，设

$$e_n(r) = max\{r, \frac{1}{2^n}\}, r \in [0,1]$$

$$\tilde{f}_n(r,u) = max\{f(r,u), f(e_n(r),u)\}$$

很明显，$\tilde{f}_n : [0,1) \times (0,\infty) \to R$是连续的且

$$\tilde{f}_n(r,u) \geq f(r,u), (r,u) \in [0,1) \times (0,\infty)$$

$$\tilde{f}_n(r,u) = f(r,u), (r,u) \in E_n \times (0,\infty)$$

且对于任意的紧子集$K \subset [0,1)$，很容易得到在$K \times (0,\infty)$上$\tilde{f}_n \to f$。然后我们定义序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$如下：

$$f_1(r,u) = \tilde{f}_1(r,u)$$

$$f_2(r,u) = min\{f_1(r,u), \tilde{f}_2(r,u)\}$$

$$\vdots$$

$$f_n(r,u) = min\{f_{n-1}(r,u), \tilde{f}_n(r,u)\}$$

由此可知，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$为定义在$[0,1) \times (0,\infty)$上的连续递减数列，即

$$f_1(r,u) \geq f_2(r,u) \geq \cdots \geq f_n(r,u) \geq f_{n+1}(r,u) \geq \cdots \geq f(r,u)$$

另外，我们注意到当$(r,u) \in E_n \times (0,\infty)$

DOI: 10.12677/aam.2019.88166

$$f(r,u) \le f_n(r,u) \le \tilde{f}_n(r,u) = f(r,u)$$

即

$$f_n(r,u) = f(r,u), (r,u) \in E_n \times (0,\infty)$$

所以，对任意的紧子集$K \subset [0,1)$，在$K \times (0,\infty)$上$f_n \to f$。现在我们讨论下面问题(2)的辅助边值问题序列：

$$\begin{cases} -m(\phi(N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|u'|u')' = f_n(r,u), \quad r \in (0,1); \\ u'(1) = 0, u(0) = \varepsilon_n \end{cases} \tag{$(17)_n$}$$

很明显，$(17)_n$的解是$(17)_{n+1}$的上解，下面我们再给出两条引理：

引理3.1：对任意的$c \in (0,\varepsilon_n]$，$\underline{u}_n = c$是问题$(17)_n$的下解。

证明：因为$\underline{u}(r)$为常数，所以$(17)_n$左边为0，即要证引理3.1只需证对任意的$c \in (0,\varepsilon_n]$，$f_n(r,c) > 0$。在这里我们用数学归纳法：

$n = 1$时，$f_1(r,c) = \widetilde{f}_1(r,u) = max\{f(r,u), f(e_1,u)\} \ge f(e_1(r),c) \ge L > 0.$

假设$n = k > 1$时结论成立。则当$n = k+1$时，

$$f_{k+1}(r,c) = min\{f_k(r,c), \widetilde{f}_{k+1}(r,u)\}$$

又因为

$$\widetilde{f}_{k+1}(r,u) = max\{f(r,u), f(e_{k+1},u)\} \ge f(e_{k+1}(r),c) \ge L$$

由上面两个式子可得：

$$f_{k+1}(r,c) > 0$$

于是得到对任意$c \in (0,\varepsilon_n], f_n(r,u) > 0$，所以结论成立。

引理3.2：问题$(17)_n(n = 1,2,3\cdots)$至少存在一个解$u_n \in C^1[0,1) \cap C[0,1]$且满足当$n \ge 2$时，存在$\eta_n \le u_n(r) \le u_{n-1}(r)$。

证明：用数学归纳法，当$n = 1$时，设$M > 0$为常数，由假设(H_2)，存在函数$h_M \in L(0,1) \cap C([0,1);(0,+\infty))$使得：

$$|f(r,u)| \le h_M(r), (r,u) \in [0,1) \times [M,\infty)$$

且对于某个正常数M_0有：

$$|f(e_1(r),u)| \le h_M(e_1(r)) \le M_0, (r,u) \in [0,1) \times [M,\infty)$$

我们令$G(r) = h_M(r) + M_0$则有：$G(r) \in L(0,1) \cap C([0,1);(0,+\infty))$，且满足：

$$|f_1(r,u)| \le G(r), (r,u) \in [0,1) \times [M,\infty)$$

接下来，让我们考虑下面问题：

$$\begin{cases} -m(\phi(N,p))r^{1-N}(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = G(r), \quad r \in (0,1); \\ u'(1) = 0, u(0) = M \end{cases} \tag{18}$$

不难看出上式具有以下形式的唯一解：

$$u_G(r) = M - \int_0^r \varphi_p^{-1}(t^{1-N}\int_t^1 \frac{s^{N-1}G(s)}{m(\phi(N,p))}ds)dt < +\infty$$

因为$G(r) \geq f_1(r, u_G(r))$且$u'_G(r) < 0 \min\limits_{r\in[0,1]} u_G(r) = u_G(1)$，因为$u_G(r) > 0$，所以存在$\eta_1 \in (0, \varepsilon_1]$，使得：$\eta_1 \leq u_G(1)$，再由引理3.1 知，$\eta_1$ 为问题$(17)_1$ 的下解，所以容易得到：

$$0 < \eta_1 \leq u_G(1) \leq u_G(r) < +\infty$$

然后由假设(H_2)知，存在函数$h_{\eta_1} \in L(0,1) \cap C([0,1);(0,+\infty))$使得下式成立。

$$|f(r,u)| \leq h_{\eta_1}(r), (r,u) \in [0,1) \times \langle \eta_1, u_G(r) \rangle$$

再由命题2.3得，问题$(17)_1$存在解$u_1 \in C^1[0,1) \cap C[0,1]$且满足$\eta_1 \leq u_1(r) \leq u_G(r)$。所以结论成立。
假设$n = k$时，问题$(17)_k$存在解u_k和η_k，使得$\eta_k \leq u_k \leq u_{k-1}$则经过上面同样的讨论得：存在$G_k(r)$使得：

$$|f_k(r,u)| \leq G_k(r), (r,u) \in [0,1) \times [M, \infty)$$

当$n = k+1$时，由上可知，令$G_{k+1}(r) = G_k(r) + M_k$其中$M$满足：

$$|f(e_{k+1}(r), u)| \leq h_M(e_{k+1}(r)) \leq M_k, (r,u) \in [0,1) \times [M, \infty)$$

则$G_{k+1}(r)$满足：

$$|f_{k+1}(r,u)| \leq G_{k+1}(r)$$

然后，经过与$n = 1$时相似的讨论可得：问题$(17)_{k+1}$存在解$u_k \in C^1[0,1) \cap C[0,1]$且满足$\eta_{k+1} \leq u_{k+1}(r) \leq u_k(r)$。所以结论成立。
至此可得定理1.1的证明如下：
证明：由引理3.2知，问题$(17)_1$存在解$u_1(r) \in \langle \eta_1, u_G(r) \rangle$，因为$f_1(r,u) \geq f(r,u)$，所以由命题2.2我们得到：

$$u_1(r) \geq K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(r), r \in [0,1]$$

假设u_n是$(17)_n$的的解，通过归纳法可知对于任意的$r \in [0,1]$满足：

$$u_n \geq \eta_n, u_n(r) \geq K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(r)$$

由引理3.1我们知道$\eta_{n+1} u_n$分别是问题$(17)_{n+1}$的下解和上解，且$\eta_{n+1} \leq \eta_n \leq u_n$，则由$(H_2)$，存在函数$h_{\eta_{n+1}} \in L(0,1) \cap C([0,1);(0,+\infty))$使得：

$$|f(r,u)| \leq h_{\eta_{n+1}}(r), (r,u) \in [0,1) \times \langle \eta_{n+1}, u_n \rangle$$

再由命题2.3知，问题$(17)_{n+1}$存在解u_{n+1}且对于$r\in[0,1]$有$\eta_{n+1}\le u_{n+1}(r)\le u_n(r)$。另外，由$f_{n+1}(r,u)\ge f(r,u)$和命题2.2知：

$$u_{n+1}(r)\ge K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(r),r\in[0,1]$$

所以，通过归纳，我们可以得到问题$(17)_n$的解序列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$满足：

$$\begin{cases} u_n(r)\ge K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(r), & r\in[0,1];\\ \varepsilon_n\le u_n\le u_{n-1}, & r\in[0,1]\\ u_n'(1)=0,u_n(0)=\eta_n \end{cases} \tag{19}$$

显然，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$是单调递减的有界序列，所以存在函数u使得对任意的$r\in[0,1]$，当$n\to\infty$时，$u_n\to u$。而且，

$$K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(r)\le u(r)\le u_n(r),r\in[0,1] \tag{20}$$

接下来，我们证明u是(2)的解。因为u_n是问题$(17)_n$的解，所以它可以写成下面形式：

$$u_n(r)=\varepsilon_n-\int_0^r\varphi_p^{-1}(t^{1-N}\int_t^1\frac{s^{N-1}f_n(s,u_n(s))}{m(\phi_n(N,p))}ds)dt$$

其中，$m(\phi_n(N,p))=m(N\alpha(N)\int_0^1 s^{N-1}|u_n(s)|^p ds)$而且

$$u_n'(r)=-\varphi_p^{-1}(r^{1-N}\int_r^1\frac{s^{N-1}f_n(s,u_n(s))}{m(\phi_n(N,p))}ds)$$

对任意的紧子集$K=[\sigma_k,1]\subset[0,1)$，存在一个整数$N^*>0$，使得$K\subset E_{N^*}$，则对任意的$n\ge N^*$，

$$f_n(r,u_n)=f(r,u_n),r\in K$$

所以，我们有：

$$u_n'(r)=-\varphi_p^{-1}(r^{1-N}\int_r^1\frac{s^{N-1}f(s,u_n(s))}{m(\phi_n(N,p))}ds),r\in K$$

由于$\gamma(r)$在[0,1]上严格递减且$\gamma(r)>0$，所以存在$\delta_0>0$，使得在K上有$K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(r)>\delta_0$。又因为对任意的$r\in[0,1]u_n(r)\ge K_0^{\frac{1}{p-1}}\gamma(r)$，然后我们可以得到：

$$u_n(r)\ge\delta_0,r\in K$$

由假设(H_2)，存在函数$h_{\delta_0}(r)\in C([0,1);(0,+\infty))\cap L^1(0,1)$使得

$$|f(r,u_n)|\le h_{\delta_0}(r),r\in K$$

注意到$h_{\delta_0}(r)$在K上有界，所以对于某个只依赖K的正常数M_K，我们有：

$$|u_n'(r)|\le|\varphi_p^{-1}(r^{1-N}\int_r^1\frac{s^{N-1}h_{\delta_0}(s)}{m(\phi_n(N,p))}ds)|\le M_K,r\in K$$

由Arzela-Ascoli定理，我们可以得到：在K中$u_n \to u$且$u \in C(K)$。因为u_n 是问题$(17)_n$ 的解，所以它具有以下形式：

$$u_n(r) = u_n(0) - \int_0^r \varphi_p^{-1}(t^{1-N} \int_t^1 \frac{s^{N-1} f(s, u_n(s))}{m(\phi_n(N,p))} ds) dt, r \in K$$

然后我们对上式取极限，再由控制收敛定理得：

$$u(r) = u(0) - \int_0^r \varphi_p^{-1}(t^{1-N} \int_t^1 \frac{s^{N-1} f(s, u(s))}{m(\phi_n(N,p))} ds) dt, r \in K \tag{21}$$

从上式很容易可以看出，$u(r) \in C^1(K)$且满足(2)的第一个方程，再由K的任意性，可得$u \in C^1[0,1)$，通过(21)式可知$u'(0) = 0$，另外，

$$u(0) = \lim_{n\to\infty} u_n(0) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

现在我们证明$u(r)$在$r = 0$处是连续的，因为$\{\varepsilon_n\}$递减且趋于0，所以对任给的$\theta > 0$，存在$\bar{N} > 0$，对所有的$n \geq \bar{N}$有

$$\varepsilon_n < \theta$$

我们取$n = \bar{N}$，得$u_{\bar{N}}(0) = \varepsilon_{\bar{N}} < \theta$。再由$u_{\bar{N}}(r) \in C^1[0,1) \cap C[0,1]$得，存在足够小的$\delta > 0$使得：

$$0 \leq u_{\bar{N}}(r) < \theta, r \in [0, \delta)$$

再由数列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$的单调性及(20)式可得：

$$K_0^{\frac{1}{p-1}} \gamma(r) \leq u(r) \leq u_{\bar{N}}(r) < \theta, r \in [0, \delta)$$

由θ的任意性和$\lim_{r\to 0} K_0^{\frac{1}{p-1}} \gamma(r) = 0$可得，$\lim_{r\to 0} u(r) = 0 = u(0)$，即$u(r)$在$r = 0$处连续，所以$u \in C^1[0,1) \cap C[0,1]$。从而知$u$是问题(2) 的一个正解。

致 谢

我历时将近两个月时间终于把这篇论文写完了在这段充满奋斗的历程中，带给我的学生生涯无限的激情和收获。在论文的写作过程中遇到了无数的困难和障碍，都在同学和老师的帮助下度过了。在校图书馆查找资料的时候，图书馆的老师给我提供了很多方面的支持与帮助，没有她们对我进行了不厌其烦的指导和帮助，无私的为我进行论文的修改和改进，就没有我这篇论文的最终完成。在此，我向指导和帮助过我的老师们表示最衷心的感谢!

基金项目

广西大学科研基金项目(XGZ160535)。

参考文献

[1] Santos Jr., J.R. and Siciliano, G. (2018) Positive Solutions for a Kirchhoff Problem with Vanishing Nonlocal Term. *Journal of Differential Equations*, **265**, 2034-2043. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.04.027

[2] Le, P., Huynh, N. and Ho, V. (2019) Positive Solutions of the p-Kirchhoff Problem with Degenerate and Sign-Changing Nonlocal Term. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **70**, 68. https://doi.org/10.1007/s00033-019-1114-2

[3] Chu, K., Hai, D. and Shivaji, R. (2019) Uniqueness of Positive Radial Solutions for Infinite Semipositone p-Laplacian Problems in Exterior Domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **472**, 510-525. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.11.037

[4] Lü, H. and Bai, Z. (2006) Positive Radial Solutions of a Singular Elliptic Equation with Sign Changing Nonlinearities. *Applied Mathematics Letters*, **19**, 555-567. https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.08.002

[5] Jin, C.H., Yin, J. and Wang, Z. (2007) Positive Radial Solutions of p-Laplacian Equation with Sign Changing Nonlinear Sources. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **30**, 1-14. https://doi.org/10.1002/mma.771

[6] 夏道行, 严绍宗, 舒五昌, 等. 泛函分析第二教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[7] Habets, P. and Zanolin, F. (1994) Upper and Lower Solutions for a Generalized Emden-Fowler Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **181**, 684-700. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1052