

# Research on Runge Phenomenon

Jiabo She, Yanxiang Tan

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan  
Email: 17375922330@163.com

Received: August 6<sup>th</sup>, 2019; accepted: August 21<sup>st</sup>, 2019; published: August 28<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

Firstly, this paper explains the Runge phenomenon generated by high-order polynomial interpolation, and proves that the interpolation polynomial divergence is obtained by calculating the systematic error. Secondly, taking the Runge function, inverse trigonometric function and fractional function as examples, the interpolation polynomial of the function is obtained by using the equally spaced Newton interpolation, and then the interpolation residual function expression is obtained, and then the midpoint of adjacent two nodes is calculated. The error at the location determines that the above three functions have generated the Runge phenomenon. Thirdly, the three algorithms of Chebyshev node, piecewise linear interpolation and cubic spline interpolation are introduced and verified, which can avoid the Runge phenomenon. Finally, the approximation performance index is proposed, and based on the optimal polynomial construction coefficient and order double determination method, the algorithm has excellent function approximation effect while avoiding the Runge phenomenon.

## Keywords

Runge Phenomenon, Piecewise Linear Interpolation, Cubic Spline Interpolation, Coefficient and Order Double Determination

---

# Runge现象的研究

余嘉博, 谭艳祥

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙  
Email: 17375922330@163.com

收稿日期: 2019年8月6日; 录用日期: 2019年8月21日; 发布日期: 2019年8月28日

---

## 摘要

首先, 本文解释了高次多项式插值时产生的Runge现象, 并通过计算系统误差证明了插值多项式发散, 从而导致了该现象。其次, 以Runge函数、反三角函数和分式函数为例, 运用等间距牛顿插值求出函数的插值多项式, 进而求出其插值余项函数表达式, 然后计算每相邻两个节点的中点处的误差, 判断上述三个函

数产生了Runge现象。第三, 介绍并验证了采用切比雪夫节点、分段线性插值和三次样条插值三个常用的算法, 能够避免上述函数产生Runge现象。最后, 创新性地提出逼近性能指标, 并基于最优多项式构造系数与阶次双确定法, 该算法在避免Runge现象的同时具有优异的函数逼近效果, 且运行速度有极大提升。

## 关键词

Runge现象, 分段线性插值, 三次样条插值, 系数与阶次双确定法

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在数值方法领域中, 常常需要理由插值法对函数进行逼近, 多项式插值法是常用的方法之一, 不过, 对于某些函数而言, 多项式插值法的逼近效果不佳, 这是因为产生了 Runge 现象。Runge 现象是指, 对于 Runge 函数, 在区间 $[-1,1]$ 内, 等距选取插值点并采用插值多项式进行逼近, 逼近多项式在区间的两端会产生振荡现象, 且插值多项式的阶次越高, 振荡现象就越明显, 从而造成极大的逼近误差。因此, 通常认为, Runge 函数不能使用等距节点的高次多项式插值进行函数逼近。为良好地逼近 Runge 函数, 解决 Runge 现象, 通常使用切比雪夫节点代替等距插值点(使逼近误差随插值多项式的阶次的增大而减少)、分段线性插值和低次样条插值代替多项式插值、放弃个别点以及系数与阶次双确定法, 避免龙格现象[1]。

## 2. 分析 Runge 现象

20 世纪初, 数学家龙格指出, 对于连续函数:

$$R(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

在区间 $[-1,1]$ 内, 不应采用基于等距节点的高次插值多项式对该函数进行逼近。在本文中, 称式上式为 Runge 函数。为更好地解释 Runge 现象, 在区间 $[-1,1]$ 内取  $n+1$  个等距插值节点

$$\{(x_i, y_i) | x_i = -1 + 2i/n, y_i = R(x_i), i = 0, 1, \dots, n\}$$

其中  $n$  为插值多项式的阶次。则可构造逼近 Runge 函数的插值多项式, 记为:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

其中  $a \neq 0$  且满足  $p_n(x_i) = y_i$ 。为了确定其系数, 从而确定式  $p_n(x)$ , 首先定义系数列向量  $a$ 、插值输入幂激励矩阵  $V$  和插值输出列向量  $y$  分别为:

$$a = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T \in R^{n+1}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in R^{(n+1) \times (n+1)}$$

$$y = [y_0, y_1, \dots, y_n]^T \in R^{n+1}$$

根据以上定义, 由式可得方程  $Va = y$ 。由于矩阵  $V$  的行列式不为零, 即矩阵  $V$  可逆, 该方程有惟一解 [2]:

$$a = V^{-1}y$$

其中上标-1 表示的是矩阵的逆。通过公式  $a = V^{-1}y$  可确定系数列向量  $a$ , 即式  $p_n(x)$ , 进而构造出 Runge 函数的逼近插值多项式。但是, 当矩阵  $V$  的维数偏大时, 求矩阵的逆将产生巨大的计算量。所以, 为简化计算, 可通过 Lagrange 插值法构建插值多项式。设 Lagrange 插值的多项式为:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_{n,k}(x)$$

其中:

$$L_{n,k}(x) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)}$$

实际上, Lagrange 插值法所构建的多项式和通过公式  $a = V^{-1}y$  确定的多项式是相同的。不过这两种构建的插值多项式在区间  $[-1,1]$  内都不能很好的逼近 Runge 函数。当阶次为  $n$  的 Lagrange 插值多项式逼近 Runge 函数时, 其效果如图所示。从图中可知, 在区间两侧插值多项式曲线产生振荡十分明显, 且这种振荡随插值多项式阶次增加而变得严重, 这种现象被称为 Runge 现象。具体如图 1~3 所示 [3]。

$$R(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

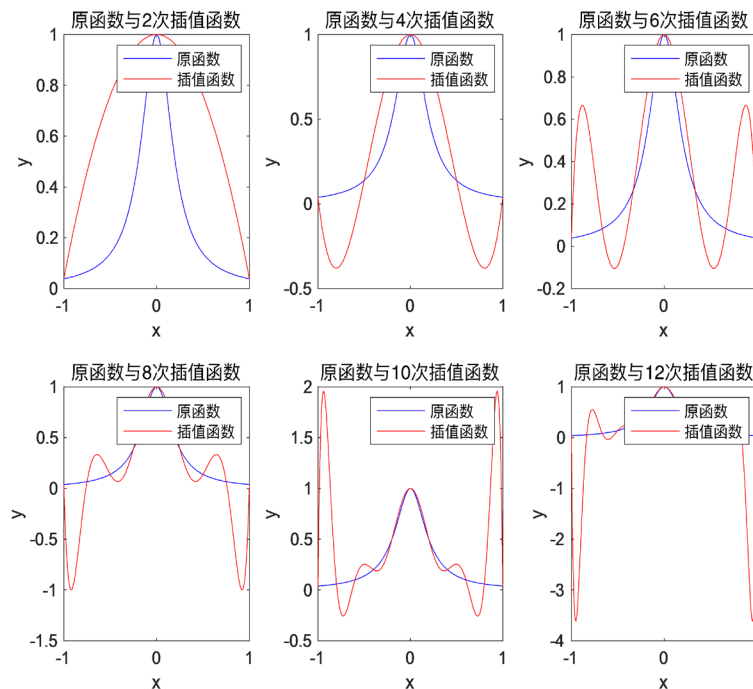


Figure 1. Runge function equidistant node language interpolation  
图 1. Runge 函数等距节点 Langleage 插值

$$f(x) = \arctan(x)$$

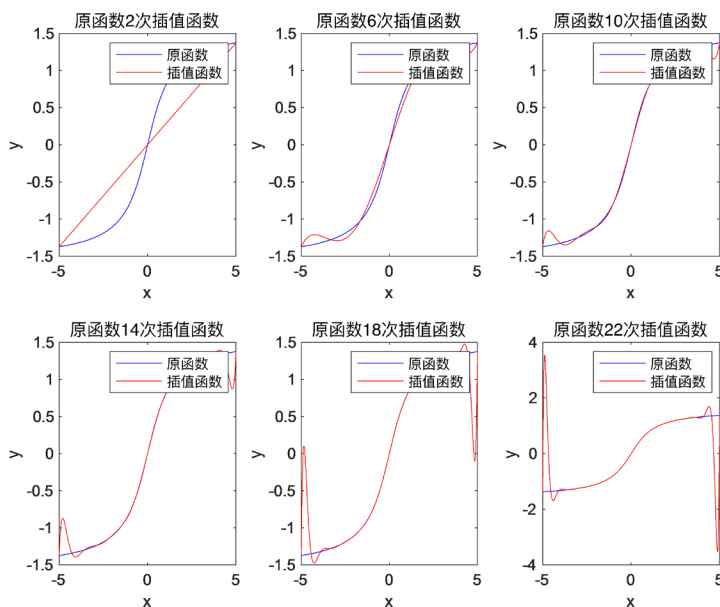


Figure 2. Anti-triangular function equidistant node Lagrange interpolation  
图 2. 反三角函数等距节点 Lagrange 插值

$$g(x) = \frac{x}{1+x^4}$$

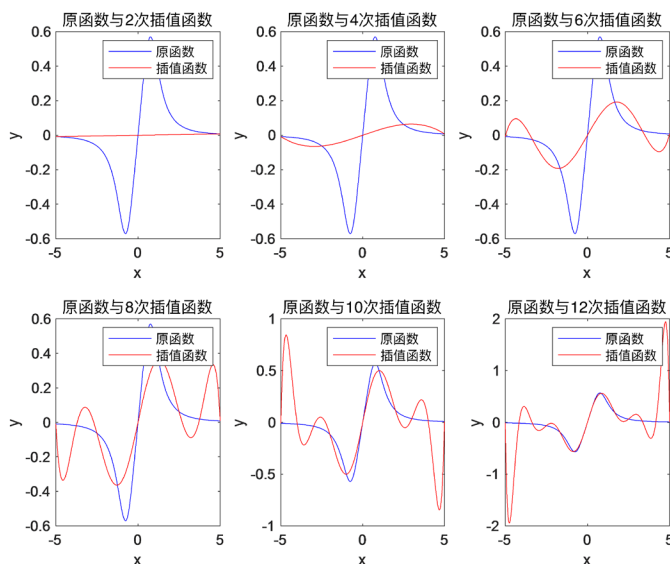


Figure 3. Fractional function equidistant node Lagrange interpolation  
图 3. 分式函数等距节点 Lagrange 插值

### 3. Runge 现象产生的原因

Runge 现象是由系统误差造成的。一般的插值余项公式为:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j^{(n)}) f^{(n+1)}(\xi)$$

其中  $\{x_j^{(n)}\}_{j=0}^n$  为插值区间  $[a, b]$  中的插值节点,  $\xi$  为  $[a, b]$  区间中一点。Runge 现象说的是, 对  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  在区间  $[-5, 5]$  上进行  $n$  次多项式插值, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $p_n(x)$  不趋近于  $f(x)$ 。更确切的说, 当  $|x| < x_c \approx 3.63$  时,  $p_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $\max |R_n(x)| \rightarrow 0$ , 当  $x_c < |x| < 5$  时,  $p_n(x)$  不趋近于  $f(x)$ ,  $\max |R_n(x)|$  不趋近于 0。

解释这一现象, 直接计算

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max \left\{ \prod_{j=1}^n (x - x_j^{(n)}) \right\} \max \{ f^{(n+1)}(x) \}$$

很困难, 因为微分项  $\max \{ f^{(n+1)}(x) \}$  不太容易直求导计算。为方便起见, 令

$$w_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j^{(n)})$$

复变函数中的 Cauchy 积分公式  $f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}} dz$  可以很方便的计算  $f^{(n)}(\xi)$  的值, 故将插值余项公式延拓到复平面上, 并应用 Cauchy 积分公式, 得

$$R_n(z) = \frac{1}{(n+1)!} w_n(z) \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{C_T} \frac{f(\xi)}{w_n(\xi)(\xi-z)} d\xi$$

其中  $C_T$  是区域  $T$  的边界, 区域  $T$  应满足  $f$  在  $T$  中解析且所有插值节点都在  $T$  中。(注意,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的奇点为  $\pm i$  故区域不能包含  $\pm i$ 。)

化简, 得到

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w_n(z)}{w_n(\xi)} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$$

所以现在的关键就是通过分析函数  $w_n(z)$  在  $n \rightarrow \infty$  时的性态, 选择一个围道, 来估计积分的值。

$w_n(z) = r^n$  的图像如图 4。

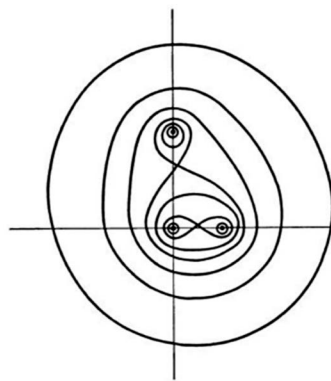


Figure 4. Function image  
图 4.  $w_n(z) = r^n$  函数图像

这是当  $n = 3$  时, 三个节点分别取  $0, 1, 2i$  时的图象。随着  $r$  的增大, 图象逐渐外扩。当  $r$  足够大时,  $w_n(z) = r^n$  的图象很接近一个包含所有节点的圆。因此我们可以选取  $w_n(\xi) = r^n$  作为积分的围道  $C_1$ 。此

时对  $C_1$  内部任意的  $z$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_n(z)}{w_n(\xi)} \right| = 0$  ( $w_n(z) = r_1^n$  且  $r_1 < r$ ), 而对于  $C_1$  外部任意的  $z$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_n(z)}{w_n(\xi)} \right| = \infty$  ( $w_n(z) = r_2^n$  且  $r_2 > r$ ). 于是, 当  $C_1$  不包含  $f(z)$  的奇点  $\pm i$  时, 可以直接选取  $C_1$  做围道计算  $R_n(z)$ , 此时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = M \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{w_n(z)}{w_n(\xi)} \right| = 0$$

随着  $r$  变大, 曲线  $C_1$  与  $x$  轴正方向交点向右移动。当  $C_1$  恰好经过  $\pm i$  时, 曲线  $C_1$  与  $x$  轴正方向交点为  $x_c \approx 3.63$ 。也就是说, 当  $|x| > x_c$  时, 可以选取  $C_1$  使  $x$  在  $C_1$  内部而  $\pm i$  在  $C_1$  外部, 这时误差估计满足上式, 插值多项式收敛。而当  $r < x_c$  时, 奇点  $\pm i$  在  $C_1$  的内部, 因此需在奇点附近挖“洞”, 记“洞”的边缘为  $C^*$ , 此时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z\pi i} \left( \int_{C_1} \frac{w_n(z)}{w_n(\xi)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} - \int_{C^*} \frac{w_n(z)}{w_n(\xi)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) = 0 - \infty = \infty$$

此时插值多项式发散, 因此由于系统误差产生了 Runge 现象。

## 4. 避免 Runge 现象的算法

### 4.1. 常用算法

$$R(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad f(x) = \arctan(x), \quad g(x) = \frac{x}{1+x^4}$$

下面将分别用三种不同的插值方法对以上三个函数进行插值, 并分析是否产生 Runge 现象。

#### 4.1.1. 采用切比雪夫节点

此处根据 Lagrange 插值的具体算法进行编程, 但插值节点不再是等距分布, 而是如下形式:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{42}\pi\right) (i = 0, 1, 2, \dots, 20)$$

从图 5~7 [3] 中看出, 插值曲线与原曲线吻合的很好, 没有产生明显的 Runge 现象。

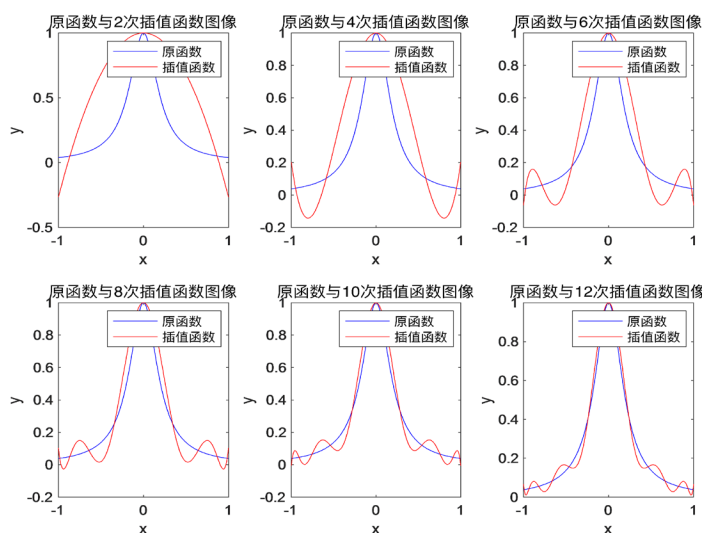


Figure 5. Runge function Chebyshev node Lagrange interpolation  
图 5. Runge 函数切比雪夫节点 Lagrange 插值

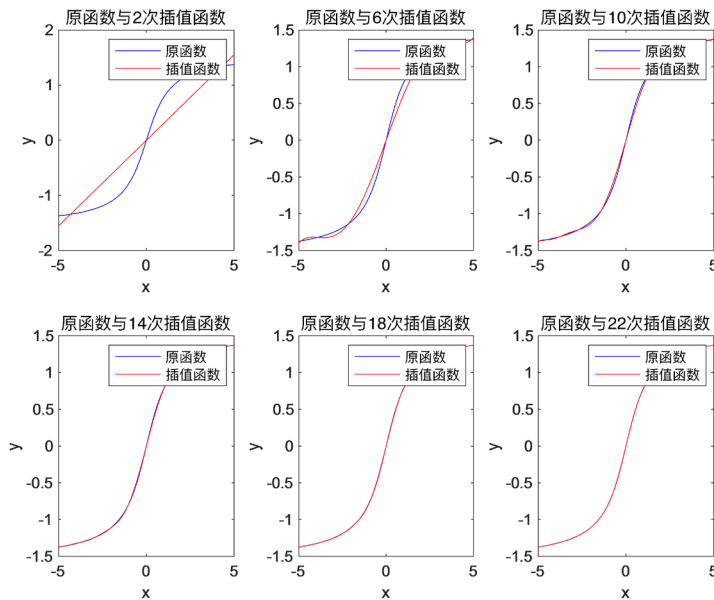


Figure 6. Anti-triangular function Chebyshev node Lagrange interpolation  
图 6. 反三角函数切比雪夫节点 Lagrange 插值

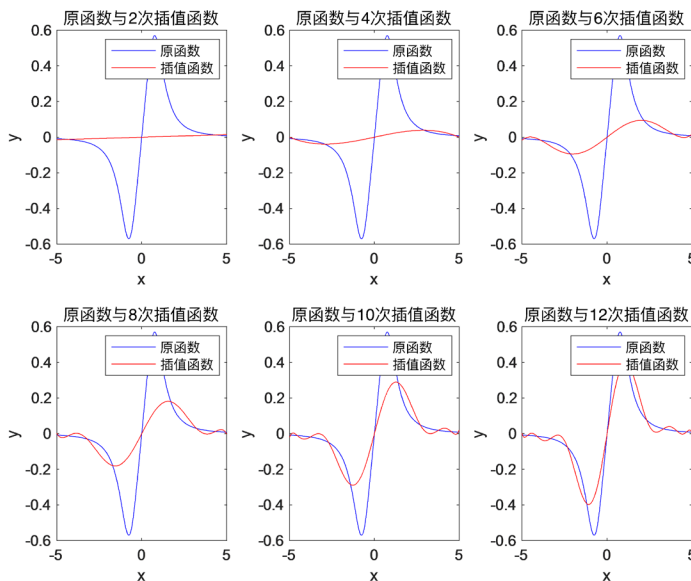


Figure 7. Fractional function Chebyshev node Lagrange interpolation  
图 7. 分式函数切比雪夫节点 Lagrange 插值

由于切比雪夫插值点定义为

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right), k = 1, 2, \dots, n+1$$

可以看出切比雪夫点恰好是以  $\left(0, \frac{b+a}{2}\right)$  为圆心,  $\frac{b-a}{2}$  为半径的圆的上半部分圆周上等距分布的点,

而对应到横坐标就是切比雪夫零点, 其表现是在接近区间的两端很密集。前面等距节点的高次插值中, 在插值区两端出现龙格现象, 两端误差较大, 这就需要在两端用更多的点来插值才可以减小误差, 而切

比雪夫零点解决了这个问题, 所以用切比雪夫零点插值可以很好的避免出现龙格现象, 切比雪夫零点要比等距节点更好。

### 4.1.2. 采用分段线性插值

分段线性插值只需要将每个节点对应的函数值求出再将相邻的数据点两两用直线相连即可。此处采用了等距节点, 从图中看出, 此处分段线性插值的效果也还是不错的, 二者只在区间中部略微存在一些偏差, 而在其他区域整体上吻合的很好, 并且不存在 Runge 现象, 如图 8~10 所示。

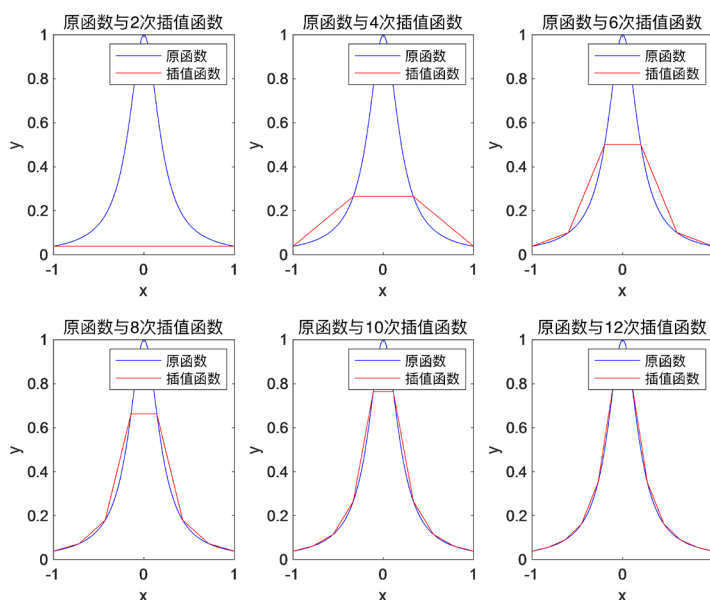


Figure 8. Runge function isometric node piecewise linear interpolation  
图 8. Runge 函数等距节点分段线性插值

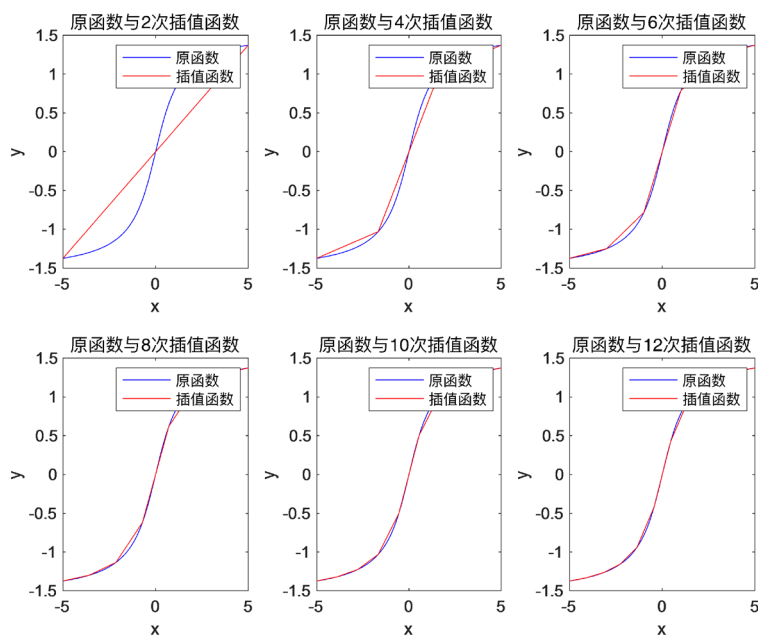
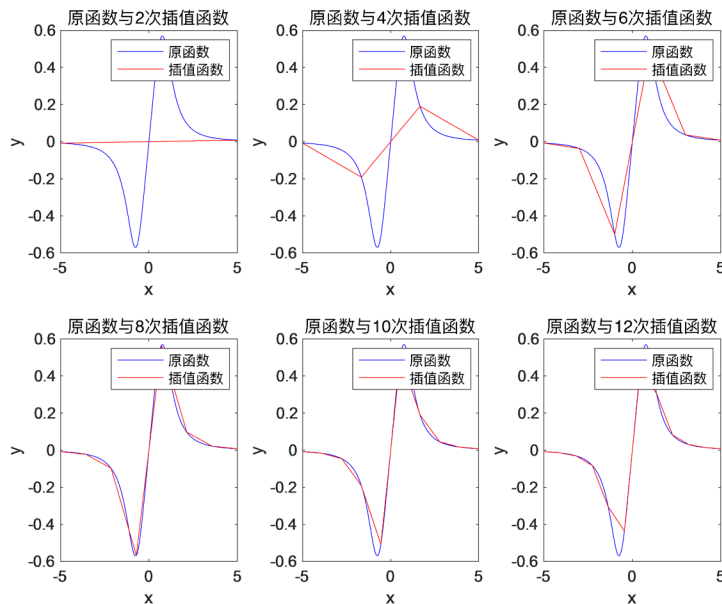


Figure 9. Inverse trigonometric function equidistant node piecewise linear interpolation  
图 9. 反三角函数函数等距节点分段线性插值



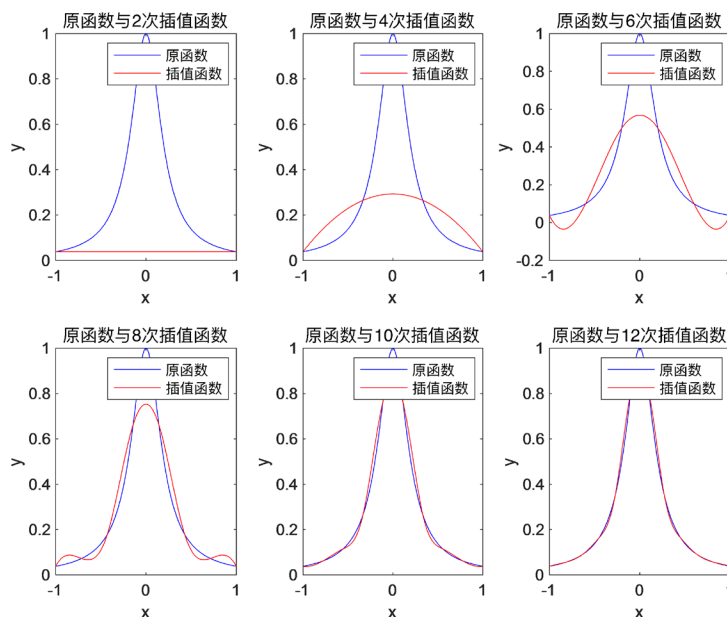


**Figure 10.** Fractional function equidistant node piecewise linear interpolation  
**图 10.** 分式函数等距节点分段线性插值

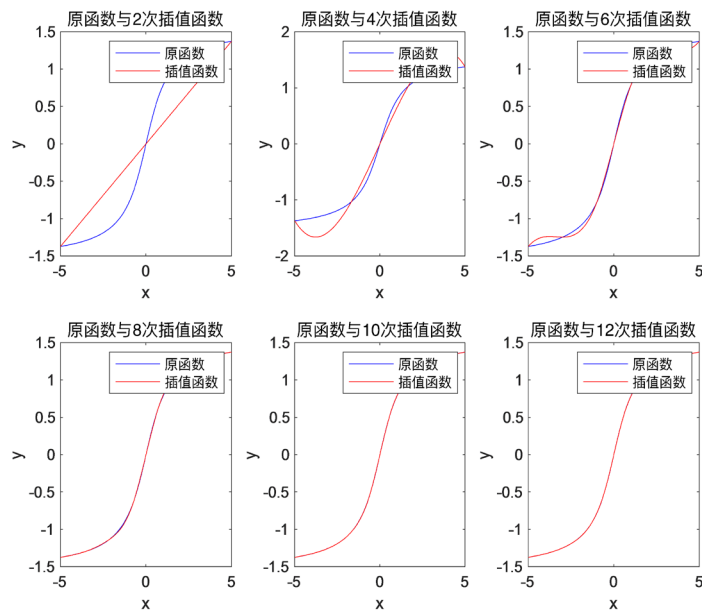
由于分段线性插值通过对插值区间分段的方法将插值函数的次数有效降低, 因而即使是等距节点分布, 也很好地避免了出现 Runge 现象的倾向。

#### 4.1.3. 采用三次样条插值

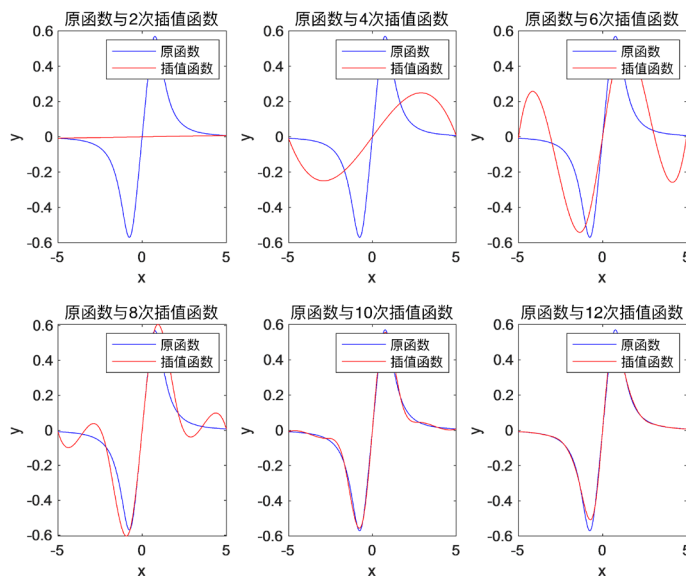
三次样条插值此处依然采用等距节点, 从图 11~13 [3]中看出, 三次样条插值的效果优于分段线性插值, 三次样条插值曲线和原曲线在整个插值区间都基本处于重合状态, 几乎没有肉眼可见的偏差。同样, 由于三次样条插值的插值函数最高次数只有 3, 在等距节点下也没有产生 Runge 现象。



**Figure 11.** Runge function equidistant node cubic spline interpolation  
**图 11.** Runge 函数等距节点三次样条插值



**Figure 12.** Anti-triangular function equidistant node cubic spline interpolation  
**图 12.** 反三角函数等距节点三次样条插值



**Figure 13.** Fractional function equidistant node cubic spline interpolation  
**图 13.** 分式函数等距节点三次样条插值

## 4.2. 结果分析

本文通过 matlab 和 C 语言编程分别 Lagrange 插值法、分段线性插值法、三次样条插值法以及系数阶次双确定法, 对 Runge 函数、反三角函数和分式函数进行了插值逼近, 并通过分析计算结果主要得到了以下结论:

1) 对于高次插值多项式, 若适当选取插值节点能够在一定程度上抑制 Runge 现象。本文中, 各函数采用切比雪夫节点 Lagrange 插值多项式, 由于采用了中间疏两边密的非等距结点, 而不是 Newton 插值多项式所用的等距节点, 有效地抑制或消除了本应出现的 Runge 现象。

2) 降低插值多项式的次数能有效避免 Runge 现象。本实验中, 分段线性插值法(各区间上均为 1 次)和三次样条插值法(最高次数为 3)都取得了较为理想的差值逼近效果, 没有出现 Runge 现象, 且在整个插值区间都与原函数的图像吻合的很好。

## 5. 结论

综上, 在实际运用中, 为了取得较好的插值逼近效果, 应尽量保证以下几点: 不采用次数过高的插值多项式; 适当选取插值节点; 避免函数值突变, 若不得已对存在不连续点的函数进行插值逼近, 可以尝试分段插值, 并将不连续点都处理到子区间的端点上, 从而原函数在各子区间内分段连续, 以便提高插值逼近的效果。

## 参考文献

- [1] 张雨浓, 李名鸣, 陈锦浩, 等. 龙格现象难题破解之系数与阶次双确定方法[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(3): 44-49.
- [2] 李庆杨, 王能超, 易大义, 编. 数值分析[M]. 第 4 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006: 13-24.
- [3] 张志涌, 等, 编著. MATLAB 教程 R2012a [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010.

### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网首页: <http://cnki.net/>, 点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”, 跳转至: <http://scholar.cnki.net/new>, 搜索框内直接输入文章标题, 即可查询;  
或点击“高级检索”, 下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询。
2. 通过知网首页 <http://cnki.net/>顶部“旧版入口”进入知网旧版: <http://www.cnki.net/old/>, 左侧选择“国际文献总库”进入, 搜索框直接输入文章标题, 即可查询。

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)