

# The New Equation Deduces the Counting Formula of Repeatable Combination under Arbitrary Conditions

Youyi Huang

Guangdong Tengye Technology Co., LTD., Shantou Guangdong  
Email: 1214592398@qq.com

Received: Sep. 1<sup>st</sup>, 2019; accepted: Sep. 16<sup>th</sup>, 2019; published: Sep. 23<sup>rd</sup>, 2019

---

## Abstract

Repeatable combination counting is an important content in combinatorial mathematics that has not been solved for hundreds of years. It is still controversial to prove the counting formulas under arbitrary conditions by using principle of inclusion and exclusion. In this paper, according to some new equations found, the counting formulas of repeatable combination under arbitrary conditions are derived. It is pointed out that there are a lot of similar equations. According to the set given by equality, the deficiency of this kind of problem proved by the principle of inclusion and exclusion is analyzed. A conjecture is given on the basis of a corollary.

## Keywords

Repeatable Combination, Equation, Different Solutions

---

# 新等式推出任意条件下可重复组合的计数公式

黄友谊

腾业科技有限公司, 广东 汕头  
Email: 1214592398@qq.com

收稿日期: 2019年9月1日; 录用日期: 2019年9月16日; 发布日期: 2019年9月23日

---

## 摘要

可重复组合的计数是组合数学中的重要内容, 几百年都未完全解决, 任意条件下的计数公式应用容斥原理证明还存在争议, 这里根据发现的一些新等式, 推出了任意条件下可重复组合的计数公式, 并指出类似的等式大量存在, 根据等式给出的集合, 分析了容斥原理证明此类问题的不足。根据推论给出了猜想。

## 关键词

可重复组合, 等式, 不同的解

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

现在离散数学和组合数学中, 把  $\binom{n+k-1}{n}$  作为可重复组合的计数公式[1] [2] [3] [4] [5], 必须  $k$  种元素每一种元素的个数都不小于  $n$ , 这个公式才成立; 任意条件下组合的生成函数在组合数学中已是成熟理论[1] [2] [3] [4], 但是任意条件下组合的计数公式还未讨论[1] [2] [3] [4] [5], 这里通过发现一些等式推出了此计数公式, 提供了一种新证法给大家讨论。并指出了类似的等式大量存在, 同时希望更多的人受到启示, 在其它方面也能发现类似的等式。现在应用容斥原理证明与本文类似的问题[6], 只描述交集或交集之和具有某种特征[6], 不能给出具体的集合[6], 这里根据参考文献[7]发现的等式给出的具体集合, 分析了容斥原理证法的不足。

## 2. 理论探讨

**命题:** 元素  $x_1$  有  $p_1-1$  个, 元素  $x_2$  有  $p_2-1$  个, 元素  $x_3$  有  $p_3-1$  个……元素  $x_k$  有  $p_k-1$  个,

$$s_1 = \binom{n+k-1-p_1}{k-1} + \binom{n+k-1-p_2}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1-p_k}{k-1}, \text{ 有 } \binom{k}{1} \text{ 个式子相加。}$$

$$s_2 = \binom{n+k-1-p_1-p_2}{k-1} + \binom{n+k-1-p_2-p_3}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1-p_{k-1}-p_k}{k-1}, \text{ 有 } \binom{k}{2} \text{ 个式子相加。}$$

$$s_3 = \binom{n+k-1-p_1-p_2-p_3}{k-1} + \binom{n+k-1-p_2-p_3-p_4}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1-p_{k-2}-p_{k-1}-p_k}{k-1}, \text{ 有 } \binom{k}{3} \text{ 个式子相加。}$$

……

直到  $s_i$  中的  $\binom{k}{i}$  个式子都没有意义,  $s_1, s_2, \dots, s_i$  中的没有意义的式子等于零。从  $p_1 + p_2 + \dots + p_k - k$

个元素中取  $n$  个元素, 共有  $\binom{n+k-1}{k-1} + \sum_{i=1}^i (-1)^i s_i$  种不同的取法。

注释: 本文中有  $\binom{k}{i}$  个式子相加 ( $i=1, 2, 3, \dots$ ), 是指从  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$  中任意取  $i$  个  $p$ , 共有  $\binom{k}{i}$  种

不同方案, 每一种方案都与其它数组成一个式子, 共组成  $\binom{k}{i}$  个式子相加,  $p$  的值即使有多个相等,

但是式子的数量还是  $\binom{k}{i}$  个。证明思路: 从  $y_i$  组解中任意取一组解, 把  $i$  个不满足要求的  $x$  值, 分别减

去对应的  $p(x$  的序号与  $p$  的序号相同才能相减一次), 可得到  $\binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \binom{i}{3} + \dots + \binom{i}{i}$  组不同的非负整数解,

再根据  $p$  的序号找到对应的方程(对应方程的解与新解是一一对应的关系), 根据对应方程就能知道所取的

这组解, 在  $s_1, s_2, s_3, \dots$  中的数量。

证明: 命题就是求方程①  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  ( $p_1 > x_1 \geq 0, p_2 > x_2 \geq 0, \dots, p_k > x_k \geq 0$ ) 非负整数解的数量, 先求出不满足要求的解的数量, 令有  $y_1$  组解, 每组解中有一个  $x$  的值不满足要求, 令有  $y_2$  组解, 每组解中有两个  $x$  的值不满足要求,  $\dots$  令有  $y_b$  组解, 每组解中有  $b$  个  $x$  的值不满足要求, 且  $b$  个值是最多的 ( $k \geq b \geq 1$ )。  $y_1 + y_2 + \dots + y_b$  是方程①所有不满足要求的解。

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_1$  的每一组非负整数解,  $x_1$  的值加  $p_1$  可得到  $\binom{n+k-1-p_1}{k-1}$  组不同的新解。

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_2$  的每一组非负整数解,  $x_2$  的值加  $p_2$  可得到  $\binom{n+k-1-p_2}{k-1}$  组不同的新解。

.....

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_k$  的每一组非负整数解,  $x_k$  的值加  $p_k$  可得到  $\binom{n+k-1-p_k}{k-1}$  组不同的新解。

$s_1 = \binom{n+k-1-p_1}{k-1} + \binom{n+k-1-p_2}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1-p_k}{k-1}$ , 有  $\binom{k}{1}$  个式子相加, 任意两个式子之间都可能存在相同的新解。

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_1 - p_2$  的每一组非负整数解,  $x_1$  的值加  $p_1$ ,  $x_2$  的值加  $p_2$ , 可得到  $\binom{n+k-1-p_1-p_2}{k-1}$  组不同的新解。  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_2 - p_3$  的每一组非负整数解,  $x_2$  的值加  $p_2$ ,  $x_3$  的值加  $p_3$ , 可得到  $\binom{n+k-1-p_2-p_3}{k-1}$  组不同的新解。

.....

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_{k-1} - p_k$  的每一组非负整数解,  $x_{k-1}$  的值加  $p_{k-1}$ ,  $x_k$  的值加  $p_k$ , 可得到  $\binom{n+k-1-p_{k-1}-p_k}{k-1}$  组不同的新解。

$s_2 = \binom{n+k-1-p_1-p_2}{k-1} + \binom{n+k-1-p_2-p_3}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1-p_{k-1}-p_k}{k-1}$ , 有  $\binom{k}{2}$  个式子相加, 任意两个式子之间都可能存在相同的新解。

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_1 - p_2 - p_3$  的每一组非负整数解,  $x_1$  的值加  $p_1$ ,  $x_2$  的值加  $p_2$ ,  $x_3$  的值加  $p_3$ , 可得到  $\binom{n+k-1-p_1-p_2-p_3}{k-1}$  组不同的新解。

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_2 - p_3 - p_4$  的每一组非负整数解,  $x_2$  的值加  $p_2$ ,  $x_3$  的值加  $p_3$ ,  $x_4$  的值加  $p_4$ , 可得到  $\binom{n+k-1-p_2-p_3-p_4}{k-1}$  组不同的新解。

.....

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_{k-2} - p_{k-1} - p_k$  的每一组非负整数解,  $x_{k-2}$  的值加  $p_{k-2}$ ,  $x_{k-1}$  的值加  $p_{k-1}$ ,  $x_k$  的值加  $p_k$ , 可得到  $\binom{n+k-1-p_{k-2}-p_{k-1}-p_k}{k-1}$  组不同的新解。

$s_3 = \binom{n+k-1-p_1-p_2-p_3}{k-1} + \binom{n+k-1-p_2-p_3-p_4}{k-1} + \dots + \binom{n+k-1-p_{k-2}-p_{k-1}-p_k}{k-1}$ , 有  $\binom{k}{3}$  个式子相加, 任意两个式子之间都可能存在相同的新解。

.....按照上述方法直到求出  $s_b$  中的  $\binom{k}{b}$  个式子相加, 任意两个式子之间都可能存在相同的新解。在

实际中  $s_1, s_2, \dots, s_b$  都可能存在没有意义的式子, 这样的式子等于零, 没有意义的式子对应的方程没有非负整数解。

上述方法得到的所有新解, 都不满足方程①的要求, 令所有新解中不同解的个数是  $a$ , 则有  $y_1 + y_2 + \dots + y_b \geq a$ , 由以下论述可知  $y_1 + y_2 + \dots + y_b$  中的任意一组解, 在新解中都存在, 则有  $y_1 + y_2 + \dots + y_b \leq a$ , 因此  $y_1 + y_2 + \dots + y_b = a$ 。由于  $p_1, p_2, \dots, p_k$  可能有多个是相等的, 上述方程就可能存在多个方程的解完全相同, 任意取一组解, 因为  $p$  的序号与  $x$  的序号相同才可以相加, 所以这组解组成的新解是各不相同的, 因此把  $p$  与  $x$  的序号相同作为必要条件, 上述方程的任意一组解, 只对应一个方程和一组新解。下面就讨论  $y_1 + y_2 + \dots + y_b$  中的每一组解, 在新解中存在多少个。

从  $y_1$  中任意取一组解  $x_1 = q_1, x_2 = q_2 + p_2, \dots, x_k = q_k$ , 把  $x_2$  的值减去  $p_2$ , 得到的解是方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_2$  的一组解, 因此所取的这组解在  $s_1$  组新解中仅有一个,  $y_1$  的每一组解都能推出同样的结论。

从  $y_2$  中任意取一组解  $x_1 = c_1 + p_1, x_2 = c_2 + p_2, \dots, x_k = c_k$ , 把  $x_1, x_2$  的值任意减去对应的  $p_1, p_2$ , 可得到  $\binom{2}{1} + \binom{2}{2}$  组不同的非负整数解,  $\binom{2}{1}$  组解分别是  $(x_1 = c_1, x_2 = c_2 + p_2, \dots, x_k = c_k)$ ,

$(x_1 = c_1 + p_1, x_2 = c_2, \dots, x_k = c_k)$ , 对应的方程分别是  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_1$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_2$ ,  $\binom{2}{2}$  组解是  $(x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_k = c_k)$ , 对应的方程是  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_1 - p_2$ , 因此从  $y_2$  中取的这组解, 在  $s_1$  组新解中存在  $\binom{2}{1}$  个, 在  $s_2$  组新解中存在  $\binom{2}{2}$  个,  $y_2$  中每一组解都能推出同样的结论。

从  $y_3$  中任意取一组解  $x_1 = h_1 + p_1, x_2 = h_2 + p_2, \dots, x_k = h_k + p_k$ , 把  $x_1, x_2, x_k$  的值任意减去对应的  $p_1, p_2, p_k$ , 可得到  $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$  组不同的非负整数解,  $\binom{3}{1}$  组解分别是

$(x_1 = h_1, x_2 = h_2 + p_2, \dots, x_k = h_k + p_k)$ ,  $(x_1 = h_1 + p_1, x_2 = h_2, \dots, x_k = h_k + p_k)$ ,  $(x_1 = h_1 + p_1, x_2 = h_2 + p_2, \dots, x_k = h_k)$  对应的方程分别是  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_1$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_2$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_k$ ,  $\binom{3}{2}$  组解分别是  $(x_1 = h_1, x_2 = h_2, \dots, x_k = h_k + p_k)$ ,  $(x_1 = h_1, x_2 = h_2 + p_2, \dots, x_k = h_k)$ ,  $(x_1 = h_1 + p_1, x_2 = h_2, \dots, x_k = h_k)$ , 对应的方程分别是  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_1 - p_2$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_1 - p_k$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_2 - p_k$ 。  $\binom{3}{3}$  组解是  $(x_1 = h_1, x_2 = h_2, \dots, x_k = h_k)$ , 对应的

方程是  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n - p_1 - p_2 - p_k$ 。因此从  $y_3$  中取的这组解, 在  $s_1$  组新解中有  $\binom{3}{1}$  个, 在  $s_2$  组新解中有  $\binom{3}{2}$  个, 在  $s_3$  组新解中有  $\binom{3}{3}$  个,  $y_3$  中每一组解都能推出同样的结论。

.....

从  $y_b$  中任意取一组解, 同理可知这组解在  $s_1$  组新解中有  $\binom{b}{1}$  组, 在  $s_2$  组新解中有  $\binom{b}{2}$  组, ..., 在  $s_b$  组新解中有  $\binom{b}{b}$  组。

根据以上论述可推出下列  $b$  个等式:

$$1) y_1 + \binom{2}{1}y_2 + \binom{3}{1}y_3 + \dots + \binom{b}{1}y_b = s_1$$

$$2) \binom{2}{2}y_2 + \binom{3}{2}y_3 + \cdots + \binom{b}{2}y_b = s_2$$

$$3) \binom{3}{3}y_3 + \binom{4}{3}y_4 + \cdots + \binom{b}{3}y_b = s_3$$

.....

$$b) \binom{b}{b}y_b = s_b$$

$$\sum_{i=1}^b (-1)^{i+1} s_i$$

$$= y_1 + \left[ \binom{2}{1} - \binom{2}{2} \right] y_2 + \left[ \binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{3}{3} \right] y_3 + \cdots + \left[ \binom{b}{1} - \binom{b}{2} + \binom{b}{3} - \cdots + (-1)^{b+1} \binom{b}{b} \right] y_b$$

$$= y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_b$$

方程①在没有约束条件下，所有非负整数有  $\binom{n+k-1}{k-1}$  组，因此满足约束条件的解有

$$\binom{n+k-1}{k-1} + \sum_{i=1}^b (-1)^i s_i \text{ 组。}$$

**推论:** 1)  $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ ,  $a_0 = \binom{p}{k}$ ,  $a_1 = \binom{p-p_1}{k} + \binom{p-p_2}{k} + \cdots + \binom{p-p_k}{k}$ , 有  $\binom{k}{1}$  个式子相加。

$$a_2 = \binom{p-p_1-p_2}{k} + \binom{p-p_2-p_3}{k} + \cdots + \binom{p-p_{k-1}-p_k}{k}, \text{ 有 } \binom{k}{2} \text{ 个式子相加。}$$

$$a_3 = \binom{p-p_1-p_2-p_3}{k} + \binom{p-p_2-p_3-p_4}{k} + \cdots + \binom{p-p_{k-2}-p_{k-1}-p_k}{k}, \text{ 有 } \binom{k}{3} \text{ 个式子相加。}$$

.....

$a_1, a_2, a_3, \dots$  都可能没有意义的式子，无意义的式子等于零， $p_1, p_2, \dots, p_k$  都是不小于 2 的整数，则

$$\text{有: } \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i = p_1 p_2 \cdots p_k$$

$$2) \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{kp-ip}{k} \binom{k}{i} = p^k$$

**提示:** 由命题的组合生成函数可知，

$$p_1 p_2 \cdots p_k = \sum_{n=0}^{p-k} \left[ \binom{n+k-1}{k-1} + \sum_{i=1}^b (-1)^i s_i \right] = \sum_{n=0}^{p-k} \binom{n+k-1}{k-1} - \sum_{n=0}^{p-k} s_1 + \sum_{n=0}^{p-k} s_2 - \cdots。 \text{ 当 } n = p_1 \text{ 时}$$

$$\binom{n+k-1-p_1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} \text{ 才有意义，因此}$$

$$\sum_{n=0}^{p-k} \binom{n+k-1-p_1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{p-1-p_1}{k-1} = \binom{p-p_1}{k}, \text{ 因此 } \sum_{n=0}^{p-k} s_i \text{ 中的每个式子都可以}$$

用同样的方法求和。把  $p_1 = p_2 = \cdots = p_k$  代入推论 1) 式可得推论 2) 式。

### 3. 猜想

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k, a_0 = \binom{r+p}{k-c}, a_1 = \binom{r+p-p_1}{k-c} + \binom{r+p-p_2}{k-c} + \cdots + \binom{r+p-p_k}{k-c}, \text{ 有 } \binom{k}{1} \text{ 个式子}$$

$$\text{相加。 } a_2 = \binom{r+p-p_1-p_2}{k-c} + \binom{r+p-p_2-p_3}{k-c} + \cdots + \binom{r+p-p_{k-1}-p_k}{k-c}, \text{ 有 } \binom{k}{2} \text{ 个式子相加。}$$

$a_3 = \binom{r+p-p_1-p_2-p_3}{k-c} + \binom{r+p-p_2-p_3-p_4}{k-c} + \dots + \binom{r+p-p_{k-2}-p_{k-1}-p_k}{k-c}$ , 有  $\binom{k}{3}$  个式子相加。

.....

$a_1, a_2, a_3, \dots$  都可能有没有意义的式子, 无意义的式子等于零,  $p_1, p_2, \dots, p_k$  都是不小于 2 的整数,  $r$  是任意非负整数, 当  $c=0$  时,  $\sum_{i=0}^i (-1)^i a_i = p_1 p_2 \dots p_k$ 。当  $k \geq c \geq 1$  时,  $\sum_{i=0}^i (-1)^i a_i = 0$ , 当  $c=1$  时这个等式是可以证明的, 对猜想的证明可能会有帮助, 当  $n \geq (p_1-1) + (p_2-1) + \dots + (p_k-1) + 1 = p-k+1$  时, 方程①所有非负整数解中都存在不满足要求的值, 此时  $\binom{n+k-1}{k-1} + \sum_{i=1}^i (-1)^i s_i = 0$ , 把  $n = p-k+1+r$  代入此式就可以证明。当  $c=k$  和  $k-c=1$  时, 也可以证明等式成立。

#### 4. 容斥原理证法分析和问题推广应用

$A_1 = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_b\}$ ,  $A_2 = \{z_2, z_3, \dots, z_b\}$ ,  $A_3 = \{z_3, \dots, z_b\}$ ,  $\dots$ ,  $A_b = \{z_b\}$ , 从  $b$  个集合中取  $m$  个集合的交集之和是  $\binom{m}{m} z_m + \binom{m+1}{m} z_{m+1} + \binom{m+2}{m} z_{m+2} + \dots + \binom{b}{m} z_b$ ,  $m$  等于  $1, 2, 3, \dots, b$  分别代入此式,

$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_b = \binom{n+k-1}{k-1}$  或  $\binom{n-1}{k-1}$  或其它的式子, 从不定方程解的数量可知与本文  $b$  个等式类似的

等式大量存在[7]。 $b$  个等式就是一组方程, 其解是唯一的, 组成的  $b$  个集合也是唯一的,  $b$  个集合的交集是多样的, 现在容斥原理证明与本文类似的问题时, 没有给出具体的集合[6], 交集特征的描述也比较单一[6], 对应的集合是否存在还有疑问。容斥原理证明的过程中  $|A_i \cap A_j| = \binom{n+k-1-p_i-p_j}{k-1}$  [6], 本文的

理论却是肯定的,  $A_1 \cap A_3 = A_3$  集合中不存在两个  $x$  值不满足要求的解, 但是  $\binom{n+k-1-p_1-p_3}{k-1}$  组不同的新解中却存在。交集之和一般都存在多个相同的元素, 交集之和的值中是否对应存在还需证明, 容斥原理没有这方面的证明[6]。

命题同样的方法可求出方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  ( $p_1 \geq x_1 \geq 1, p_2 \geq x_2 \geq 1, \dots, p_k \geq x_k \geq 1$ ) 的正整数解的数量。

#### 5. 结论

参考文献 7 用集合理论证明了类似的等式存在较多, 根据此推出了这里的新等式和任意条件下可重复组合的计数公式, 这是一种新证法, 并指出了容斥原理证明此类问题的不足, 因此本文具有一定的参考价值。

#### 参考文献

- [1] 卢开澄, 卢华明. 组合数学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.
- [2] [美]罗森(Rosen, K.H.). 离散数学及其应用[M]. 袁崇义, 屈婉玲, 王捍贫, 刘田, 译. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- [3] [美]格里马迪(Grimaldi, R.). 离散数学与组合数学[M]. 林永钢, 译. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [4] 柯召, 魏万迪. 组合论(上)[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [5] 谢胜利, 虞铭才, 黄月华. 离散数学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [6] 赵玉怀, 刘晓妮. 重复数有限的重复组合[J]. 榆林学院学报, 1992(4): 98-101.
- [7] 黄友谊. 特殊条件下可重复组合的计数[J]. 数学学习与研究, 2015(11): 98-99.