Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(9), 1574-1586
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.89184

Hans汉斯

$(3,1)^*$-Choosability of Planar Graphs without Adjacent Short Cycles

Qian Zhang

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 1095911397@qq.com

Received: Sep. 1^{st}, 2019; accepted: Sep. 16^{th}, 2019; published: Sep. 23^{rd}, 2019

Abstract

For a graph G, a list assignment is a function L that assigns a list $L(v)$ of colors to each vertex $v \in V(G)$. An (L,d)-coloring is a mapping φ that assigns a color $\varphi(v) \in L(v)$ to each $v \in V(G)$ so that at most d neighbors of v receive the color $\varphi(v)$. A graph G is said to be $(k,d)^*$-choosable if it admits an $(L,d)^*$-coloring for every list assignment L with $|L(v)| \geq k$ for all $v \in V(G)$. Xu and Zhang conjectured that every planar graph without adjacent 3-cycles is $(3,1)^*$-choosable. In this paper, we prove that every planar graph without adjacent k-cycles, $k = 3,4,5$, is $(3,1)^*$-choosable.

Keywords

Planar Graph, Improper Choosability, Discharge, Cycle

不含相邻短圈的平面图的 $(3,1)^*$-可选性

张 倩

浙江师范大学，数学与计算机科学学院，浙江 金华
Email: 1095911397@qq.com

收稿日期：2019年9月1日；录用日期：2019年9月16日；发布日期：2019年9月23日

文章引用: 张倩. 不含相邻短圈的平面图的 $(3,1)^*$-可选性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(9): 1574-1586.
DOI: 10.12677/aam.2019.89184

摘 要

图 G的一个颜色列表配置 L是指给 G中的每个顶点 v都分配一个可用色集 $L(v)$。如果在映射 φ下对任意 $v \in V(G)$均满足 $\varphi(v) \in L(v)$，使得在 v的邻点中至多有 d个顶点的颜色为 $\varphi(v)$，那么我们称 G是 $(L,d)^*$-可染的。如果对任意颜色列表配置 $L = \{L(v)||L(v)| \geq k, v \in V(G)\}$，$G$都是 $(L,d)^*$-可染的，那么我们就称 G 是 $(k,d)^*$-可选的。Xu 和Zhang 猜想:不含相邻 3-圈的平面图是 $(3,1)^*$-可选的。在本文中，我们将证明不含相邻 k-圈的平面图是 $(3,1)^*$-可选的，其中 $k \in \{3,4,5\}$。

关键词

平面图，非正常列表染色，权转移，圈

1. 引言

图 G的一个颜色列表配置 L是指给 G中的每个顶点 v都分配一个可用色集 $L(v)$。如果在映射 φ下对任意 $v \in V(G)$均满足 $\varphi(v) \in L(v)$，使得在 v的邻点中至多有 d个顶点的颜色为 $\varphi(v)$，那么我们称 G是$(L,d)^*$- 可染的。如果对任意色列表 $L = \{L(v)||L(v)| \geq k, v \in V(G)\}$，图 G都是 $(L,d)^*$-可染的，那么我们就称图 G是 $(k,d)^*$-可选的。Škrekovski [1] 与Eaton 和Hull [2]在1999年首次提出了非正常染色的概念，并且证明了所有的平面图都是 $(3,2)^*$-可选的以及所有外平面图都是 $(2,2)^*$-可选的。在文献 [3]中，Cowen 等人证明了存在平面图不是 $(3,1)^*$-可染的，所以也就说明了并非所有的平面图都是 $(3,1)^*$-可选的。那么在什么条件下的平面图是 $(3,1)^*$-可选的呢？Škrekovski [4]首先证明了不含 3-圈的平面图是 $(3,1)^*$-可选的。随后，Lih等人证明了不含 4-圈和 k-圈的平面图是 $(3,1)^*$-可选的，其中 $k \in \{5,6,7\}$。此外，Dong 和Xu [6]又证明了不含 4-圈和 k-圈的平面图是 $(3,1)^*$-可选的，其中 $k \in \{8,9\}$。随后，Wang [7]证明了不含 4-圈的平面图是 $(3,1)^*$-可选的。在文献 [8]中，Xu 和Zhang提出了如下猜想：

猜想 1 不含相邻 3-圈的平面图是 $(3,1)^*$-可选的。

在本文中，我们证明了猜想1的充分条件如下：

定理 1 不含相邻 k-圈的平面图是 $(3,1)^*$-可选的，其中$k \in \{3,4,5\}$.

本文考虑的图均为无环和无重边的有限无向图。下面我们对平面图中的一些概念进行说明。对于平面图 G，用 $V(G)$，$E(G)$，$|V(G)|$，$|E(G)|$和 $\delta(G)$分别表示图 G的顶点集，边集，顶点数，边数和最小度；用$d(v)$和 $d(f)$分别表示顶点 v 的度和面 f的度。如果顶点 v的度等于 k (至少是 k或至多是 k)，则称 v是 k-点(k^+-点或 k^--点)。类似地定义k-面，k^--面和 k^+-面。若 $uv \in E(G)$，则称 uv为 $(d(u), d(v))$- 边。用 $b(f)$表示 f边界上的路。如果 $v_1, v_2, \cdots, v_n$是 f 上的顶点，则记为 $f = [v_1v_2, \cdots, v_n]$ 或 $(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_n))$-面。若 u是 v的一个 i-邻点并且 uv不与 3-面相关联，则称 u为 v的孤立 i-邻点。若 v有一个关联 3-面的 3-邻点且 v不在这个 3-面上，则称这个 3-面是 v的悬挂 3-面。如果一个 5-点关联一个 $(3,4,5)$-面和一个 $(4,5,5^+)$-面并且有一个孤立的 3-邻点，那么我们称这样的 5-点为坏点，反之称为好点。如果一个 6-点关联两个 $(3,4,6)$-面和一个 $(4,5^+,6)$-面，那我们称这样的 6-点为坏点，反之称为好点。对于 $k = 5, 6$，用 k^b- 点(k^g-点)来表示坏点(好点)。

2. 定理1 的证明

假设定理 1是不正确的。设 $G = (V, E)$为定理 1对于 $|V(G)| + |E(G)|$最少的极小反例，显然图 G是连通的。我们将从以下的引理和权转移得出矛盾。

2.1. 可约性结构

注 1 令$\mathcal{G}$为不含相邻 k-圈的平面图族，其中 $k \in \{3,4,5\}$，则 $G \in \mathcal{G}$。由此可知图 G中不含以下这些结构：

(1)相邻 3-面；

(2)相邻 4-面；

(3)相邻 5-面；

(4) 3-面与两个 4-面相邻；

(5) 4-面与两个 3-面相邻；

(6) 5-面与相邻的 3-面和 4-面相邻。

我们先介绍Wang在 [7]中的给出的几个引理：

引理 1 [7]

(1) $\delta(G) \geq 3$;

(2) G中不含 $(3,3)$-边。

引理 2 [7]

(1) G中没有 $(4^-, 4^-, 4^-)$-面；

(2) G中没有 $(3,4,3,4)$-面。

引理 3 [7]

(1) 4-点至多有两个 3-邻点；

(2)若 5-点与两个 3-面相关联，其中有一个 3-面是 $(3,4,5)$-面，则另一个 3-面不为 $(4^-,4^-,5)$-面；

(3)若 5与一个 $(3,4,5)$-面 f_1相关联，则除了 $b(f_1)$ 上的邻点外它至多有一个 3-邻点；

(4)若 6-点与 3个 3-面相关联，其中有一个 3-面是 $(3,4,6)$-面，则其它两个 3-面不同时为 $(4^-,4^-,6)$-面；

(5)若 5-点与两个 $(4,4,5)$-面相关联，则它没有 3-邻点。

引理 4 G中没有 $(4,5^b,5^b)$-面。

证：假设 $f_1=[v_1,v_2,v_3]$为 $(4,5^b,5^b)$-面，对于 $i=2,3$, $f_i=[x_i,y_i,v_i]$为 $(3,4,5)$-面。v_i是 5^b-点，设 v_i'为 v_i 的孤立 3-邻点。对于 $i=1,2$，令 x_i'为 x_i 的孤立邻点， y_i'和 y_i'' 为 y_i的孤立邻点。由 G的极小性，图 $G'=G-\{v_1,v_2,v_3,v_2',v_3',x_2,y_2,x_3,y_3\}$ 有一个 $(3,1)^*$-染色 φ(对每个顶点 $x\in V(G)$来说，它的染色来自于色表 $L(x)$)。首先，依次给 $v_1,v_2',v_3',y_2,y_3,x_3$ 一个正常染色。然后，给 v_2染 $L(v_2)\backslash\{\varphi(v_2'),\varphi(y_2)\}$ 中的颜色，给 v_3染 $L(v_3)$在 $\{\varphi(v_1),\varphi(v_2),\varphi(v_3'),\varphi(y_3),\varphi(x_3)\}$ 至多出现一次的颜色。最后, 给 x_2染 $L(x_2)\backslash\{\varphi(v_2),\varphi(x_2')\}$中的颜色. 由上可知 G有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色，矛盾。

引理 5 G中没有 $(4,5^b,6^b)$-面。

证：假设 $f_1=[v_1,v_2,v_3]$为 $(4,5^b,6^b)$-面，$f_2=[x_2,y_2,v_2]$为 $(3,4,5)$-面。v_2是 5^b-点，设 v_2'为 v_2的孤立 3-邻点， x_2'为 x_2的孤立邻点。对于 $i=3,4$, 令 $f_i=[x_i,y_i,v_3]$ 为 $(3,4,6)$-面, x_i'为 x_i的孤立邻点。由 G的极小性，图 $G'=G-\{v_1,v_2,v_3,v_2',x_2,y_2,x_3,y_3,x_4,y_4\}$ 有关于列表L的一个 $(3,1)^*$-染色 φ。首先，依次给 v_1,v_2',y_2,y_3,y_4,x_4正常染色。然后，依次给 v_2染 $L(v_2)\backslash\{\varphi(v_2'),\varphi(y_2)\}$中的颜色，$x_2$染 $L(x_2)\backslash\{\varphi(x_2'),\varphi(v_2)\}$中的颜色，$v_3$ 染 $L(v_3)$在 $\{\varphi(v_1),\varphi(v_2),\varphi(x_4),\varphi(y_3),\varphi(y_4)\}$ 至多出现一次的颜色。最后，给 x_3染 $L(x_3)\backslash\{\varphi(v_3),\varphi(x_3')\}$ 中的颜色。由上可知 G有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色，矛盾。

引理 6 G中没有 $(4,6^b,6^b)$-面。

证：假设 $f=[v_1,v_2,v_3]$为 $(4,6^b,6^b)$-面，对于 $i=1,2$, $f_i=[x_i,y_i,v_2]$为 $(3,4,6)$-面，对于$i=3,4$, $f_i=[x_i,y_i,v_3]$为 $(3,4,6)$-面。令 x_i'为 x_i的孤立邻点，其中 $i=1,2,3,4$。由 G的极小性，图$G'=G-\{v_1,v_2,v_3,x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4\}$有关于列表 L的$(3,1)^*$-染色 φ。首先，依次给 v_1,y_1,y_2,y_3,y_4,x_3正常染色。然后，依次给 v_2染 $L(v_2)\backslash\{\varphi(y_1),\varphi(y_2)\}$中的颜色，给 x_i染 $L(x_i)\backslash\{\varphi(v_2),\varphi(x_i')\}$中的颜色，其中 $i=1,2$，给 v_3染 $L(v_3)$在 $\{\varphi(v_1),\varphi(v_2),\varphi(x_3),\varphi(y_3),\varphi(y_4)\}$ 至多出现一次的颜色。最后，给 x_4染 $L(x_4)\backslash\{\varphi(v_3),\varphi(x_4')\}$中的颜色。由上可知 G有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色，矛盾。

引理 7 若 5-点关联一个 $(4^-,4,5)$-面，则它不与 $(3,4,3,5)$-面相关联。

证：当 5-点关联一个 $(3,4,5)$-面时，由引理 3(3)可知 $(3,4,5)$-面与 $(3,4,3,5)$-面相邻。假设 $f_1=[v_2,v_1,v]$为 $(3,4,5)$-面， $f_2=[v_2,u,v_3,v]$为 $(3,4,3,5)$-面。令 v的其它邻点为 v_4和 v_5, v_3'为 v_3孤立邻点。由 G的极小性，图 $G'=G-\{v,v_1,v_2,v_3,u\}$有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-

染色 φ。首先，依次给 v_1, u正常染色。然后，依次给 v染 $L(v)\backslash\{\varphi(v_4),\varphi(v_5)\}$中的颜色，$v_3$染 $L(v_3)\backslash\{\varphi(v_3^{'}),\varphi(v)\}$中的颜色。最后，给 v_2染 $L(v_2)\backslash\{\varphi(u),\varphi(v)\}$中的颜色。由上可知 G关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色，矛盾。

当 5-点关联一个 $(4,4,5)$-面时，由引理 1(2)可知 $(4,4,5)$-面不与 $(3,4,3,5)$-面相邻。假设 $f=[v_1,v_2,v]$为 $(4,4,5)$-面, $f_2=[v_3,u,v_4,v]$为 $(3,4,3,5)$-面. 令 v_5为 v的其它邻点， $v_4^{'}$为 v_4的其它邻点。由 G的极小性，图 $G^{'}=G-\{v,v_1,v_2,v_3,v_4,u\}$有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色 φ。首先，依次给 v_1, v_2, u, v_3正常染色。然后，依次给 v染 $L(v)\backslash\{\varphi(v_5)\}$且在 $\{\varphi(v_1),\varphi(v_2),\varphi(v_3)\}$中只出现一次的颜色。最后，给 v_4染 $L(v_4)\backslash\{\varphi(v),\varphi(v_4^{'})\}$中的颜色。由上可知 G有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色，矛盾。

引理 8 若 5-点关联一个 $(3,4,3,5)$-面 f_1，则除了 $b(f_1)$上的邻点外它至多有一个3-邻点。

证：假设 $f_1=[v_1,u,v_2,v]$为 $(3,4,3,5)$-面。对于$i=3,4,5$，令v_i 为 v的其它邻点，不妨设 v_3和 v_4为 3-点， $v_2^{'}$ 为 v_2的其它邻点. 由 G的极小性, 图 $G^{'}=G-\{v,v_1,v_2,v_3,v_4,u\}$有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色 φ. 首先，依次给 u，v_1, v_3, v_4正常染色。然后，依次给 v染 $L(v)\backslash\{\varphi(v_5)\}$并且在 $\{\varphi(v_1),\varphi(v_3),\varphi(v_4)\}$中至多出现一次的颜色。最后，给 v_2染 $L(v_2)\backslash\{\varphi(v),\varphi(v_2^{'})\}$中的颜色。由上可知 G有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色，矛盾。

引理 9 若 6-点关联两个 $(3,4,6)$-面 f_1和 f_2, 则除了 $b(f_1)$和 $b(f_2)$上的邻点外它没有 3-邻点。

证：假设 $f_1=[v_1,v_2,v]$为 $(3,4,6)$-面， $f_2=[v_3,x_4,v]$为 $(3,4,6)$-面。令 v_5为 v的 3-邻点，对于 $i=2,4,5$, $v_i^{'}$和 $v_i^{''}$为 v_i的其它邻点，对于 $i=1,3$, $v_i^{'}$为 v_i的其它邻点。由 G的极小性，图 $G^{'}=G-\{v,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 有关于列表 L 的一个 $(3,1)^*$-染色 φ。首先，依次给 v_2,v_4,v_5正常染色。然后，依次给 v染 $L(v)\backslash\{\varphi(v_6)\}$且在$\{\varphi(v_2),\varphi(v_4),\varphi(v_5)\}$至多出现一次的颜色。最后，给 v_1染$L(v_1)\backslash\{\varphi(v),\varphi(v_1^{'})\}$中的颜色，$v_3$染 $L(v_3)\backslash\{\varphi(v),\ \varphi(v_3^{'})\}$中的颜色。由上可知 G 有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色，矛盾。

引理 10 若 6-点关联一个 $(3,4,6)$-面 f_1和一个 $(3,4,3,6)$-面 f_2, 则除了 $b(f_1)$和 $b(f_2)$上的邻点外它至多有一个 3-邻点。

证明：当 f_1与 f_2相邻时，假设 $f_1=[v_1,v_2,v]$为 $(3,4,6)$- 面， $f_2=[v_2,u,v_3,v]$为 $(3,4,3,6)$-面。对于$i=4,5,6$，令 v_i为 v的邻点，不妨设 v_4和 v_5是 3- 点。对于 $i=1,4,5$，令 $v_i^{'}$和 $v_i^{''}$为 v_i的其它邻点，$v_3^{'}$为 v_3的其它邻点。由 G 的极小性，图 $G^{'}=G-\{v,v_1,u,v_2,v_3,v_4,v_5\}$有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色 φ。首先，依次给 v_1,u,v_4,v_5正常染色。然后，给 v染 $L(v)\backslash\varphi(v_6)\}$并且在 $\{\varphi(v_1),\varphi(v_4),\varphi(v_5)\}$至多出现一次的颜色. 最后，给 v_3染 $L(v_3)\backslash\{\varphi(v),\varphi(v_3^{'})\}$中的颜色，$v_2$ 染 $L(v_2)\backslash\{\varphi(u),\varphi(v)\}$中的颜色。由上可知 G有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色，矛盾。

当 f_1与 f_2不相邻时，假设 $f_1=[v_2,v_1,v]$是 $(3,4,6)$-面， $f_2=[v_3,u,v_4,v]$ 为 $(3,4,3,6)$-面。对于 $i=5,6$，令 v_i 为 v不在 $b(f_1)$和 $b(f_2)$ 上的 3-邻点，$v_3^{'}$为 v_3的其它邻点。由 G的极小性，图 $G^{'}=G-\{v,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,u\}$ 有关于列表 L的一个 $(3,1)^*$-染色 φ。首先，依次给 v_1,v_2,u,v_4,v_5,v_6 正常染色。然后，给 v染在 $\{\varphi(v_1),\varphi(v_2),\varphi(v_4),\ \varphi(v_5),\varphi(v_6)\}$至多出现一次的颜色。最后，给 v_3染 $L(v_3)\backslash\{\varphi(v),\varphi(v_3^{'})\}$中的颜色。由上可知 G有关于列表 L 的一个 $(3,1)^*$-染色，矛盾。

2.2. 权转移规则

对连通平面图 G, 由欧拉公式，有 $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$ 及 $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=\sum\limits_{f\in F(G)} d(f)=2|E(G)|$，可得：

$$\sum_{v\in V(G)}(2d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(d(f)-6)=-12$$

对每一个 $x\in V(G)\cup F(G)$，定义其初始权值为 $ch(x)$。对任意 $v\in V(G)$，定义 $ch(v)=2d(v)-6$，而对于 $f\in F(G)$, $ch(f)=d(f)-6$，则 $\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)} ch(x)=-12<0$. 下面定义权转移规则, 重新分配顶点和面的权, 使得对每个 $x\in(V(G)\cup F(G))$, 都有 $ch^*(x)\geq 0$. 由于只在顶点和面之间进行权转移，故权总和不变，从而$0\leq \sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)} ch^*(x)=\sum\limits_{x\in V(G)\cup F(G)} ch(x)=-12<0$，矛盾。说明极小反例不存在，从而定理成立。我们将与坏点相关联的面称为坏面，否则称为好面。以下如果没有特别说明好面与坏面可看成两个种情况下坏点与好点转权情况一样。
权转移规则如下：

R1 4-点转权情况

R1.1 给每个悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$；

R1.2 给每个与它相关联的 3-面转 $\frac{2}{3}$；

R1.3 给每个与它相关联的 4-面转权情况；

(1)给每个与它相关联的 $(3,4,3^+,4^+)$-面转 $\frac{2}{3}$；

(2)给每个与它相关联的 $(4,4^+,4^+,4^+)$-面转 $\frac{1}{2}$；

R1.4 给每个与它相关联的 5-面 f转 $\frac{1}{5-m}$，其中 m为 $b(f)$上 3-点的个数，由引理 1(2)可知 $m\leq 2$。

R2 5^+-点转权情况

R2.1 5^+-点给 3-面的转权情况

(1) 给每个悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$；

(2) 给每个与它相关联的 $(3,4,5^+)$-面转 2；

(3) 给每个与它相关联的 $(4,4,5^+)$-面转 $\frac{5}{3}$；

(4) 给每个与它相关联的 $(3,5^+,5^+)$-面转 $\frac{4}{3}$；

(5) 给每个与它相关联的好 $(4,5^+,5^+)$-面转 $\frac{7}{6}$，坏点给每个与它相关联的坏 $(4,5^+,5^+)$-面转 1，好点或 7^+-点转 $\frac{4}{3}$；

(6) 给每个与它相关联的 $(5^+,5^+,5^+)$-面转 1；

R2.2 5^+-点给 4-面的转权情况

(1) 给每个与它相关联的 $(3,4,3,5^+)$-面转 $\frac{4}{3}$；

(2) 给每个与它相关联的 $(3,5^+,3,5^+)$-面转 1；

(3) 给每个与它相关联的 $(3,4^+,4^+,5^+)$-面转 $\frac{2}{3}$；

(4) 给每个与它相关联的 $(4^+,4^+,4^+,5^+)$-面转 $\frac{1}{2}$；

R2.3 5^+-点给每个与它相关联的 5-面 f转 $\frac{1}{5-m}$，其中 m 为 $b(f)$ 上 3-点的个数，由引理 1(2) 可知 $m \le 2$。

下面验证新权 $ch^*(x) \ge 0$，$x \in V(G) \cup F(G)$。

断言 1 $\forall f \in F(G)$, $ch^*(f) \ge 0$。

根据 $d(f)$的值，我们可以分为以下 4种情况进行讨论。

情况 1：$d(f) = 3$，则 $ch(f) = 3 - 6 = -3$。由引理 1可知 G中没有相邻的 3-点，所以 3-面至多关联一个 3-点。

若 f与一个 3-点相关联，则由引理 2(1)可知 G中没有 $(3,4,4)$-面，所以 f是 $(3,4,5^+)$-面或 $(3,5^+,5^+)$-面。由引理 1(2)可知 f 上的 3-点的外邻点(不在 f 上的邻点)为 4^+-点。当 f是 $(3,4,5^+)$-面时，由 R1.1，R2.1(1)，R1.2和 R2.1(2) 可知 3-点的外邻点给 f转 $\frac{1}{3}$, 4-点给 f转 $\frac{2}{3}$，5^+-点给 f转 2，所以 $ch^*(f) = ch(f) + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1 + 2 \times 1 = 0$。当 f是 $(3,5^+,5^+)$-面时，由 R1.1，R2.1(1)和 R2.1(4)可知 3- 点的外邻点给 f转 $\frac{1}{3}$，5^+-点给 f转 $\frac{4}{3}$，所以 $ch^*(f) = ch(f) + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{4}{3} \times 2 = 0$。

若 f不与 3-点相关联，则由引理 2(1)可知 G中没有 $(4,4,4)$-面，所以 f是 $(4,4,5^+)$-面，$(4,5^+,5^+)$-面或 $(5^+,5^+,5^+)$- 面。当 3-面是 $(4,4,5^+)$-面时，由 R1.2和 R2.1可知 4-点给 f转 $\frac{2}{3}$，5^+-点给 f转 $\frac{5}{3}$，所以 $ch^*(f) = ch(f) + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{5}{3} \times 1 = 0$。当 3-面是 $(5^+,5^+,5^+)$-面时，由 R2.1可知 5^+-点给 f转 1，所以 $ch^*(f) = ch(f) + 1 \times 3 = 0$。当 3-面是 $(4,5^+,5^+)$-面时，由引理 4, 5, 6可知 f上至多一个坏点。当 f上没有坏点时，由 R1.2和 R2.1(5)可知 4-点给 f转 $\frac{2}{3}$，5^+- 点给 f转 $\frac{7}{6}$，所以 $ch^*(f) = ch(f) + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{7}{6} \times 2 = 0$。当 f上有一个坏点时，由 R1.2和 R2.1(5)可知 4-点给 f转 $\frac{2}{3}$，好5^+-点给 f转 $\frac{4}{3}$，坏5^+-点给 f转 1，所以 $ch^*(f) = ch(f) + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{4}{3} \times 1 + 1 \times 1 = 0$.

情况 2：$d(f) = 4$，则 $ch(f) = 4 - 6 = -2$。由引理 1可知 G中没有相邻的 3-点，所以 4-面至多关联两个 3-点。

若 f与两个 3-点相关联，则由引理 2(2)可知 f不为 $(3,4,3,4)$-面，所以 f是 $(3,4,3,5^+)$-面或 $(3,5^+,3,5^+)$-面。当 f是 $(3,4,3,5^+)$-面时，由 R1.3(1)和 R2.2(1)可知 4-点给 f 转 $\frac{2}{3}$，5^+-点给 f转 $\frac{4}{3}$，所以 $ch^*(f) = ch(f) + \frac{2}{3} \times 1 + \frac{4}{3} \times 1 = 0$。当 f是 $(3,5^+,3,5^+)$-面时，由 R2.2(2)可知每个 5^+-点给 f转 1，所以 $ch^*(f) = ch(f) + 1 \times 2 = 0$。

若 f与一个3-点相关联，则 f是 $(3,4^+,4^+,4^+)$-面，由 R1.3(1)和 R2.2(1)(2)可知每个 4^+-点给 f至少转 $\frac{2}{3}$，所以 $ch^*(f) \ge ch(f) + \frac{2}{3} \times 3 = 0$。

若 f不与 3-点相关联，则 f是 $(4^+,4^+,4^+,4^+)$-面，由R1.3(2)和 R2.2(4)可知每个 4^+-点给 f至少转 $\frac{1}{2}$，所以 $ch^*(f) \ge ch(f) + \frac{1}{2} \times 4 = 0$。

情况 3：$d(f) = 5$，则 $ch(f) = 5 - 6 = -1$。由 R1.4和 R2.3可知每个 4^+-点给转 $\frac{1}{5-m}$，所以 $ch^*(f) = ch(f) + \frac{1}{5-m} \times (5-m) = 0$。

情况 4：$d(f) \ge 6$，则由权转移规则可知 f不发生权转移，所以 $ch^*(f) = ch(f) = d(f) - 6 \ge 0$。

断言 2 $\forall v \in V(G)$， $ch^*(v) \geq 0$。

令 t为 v关联的 3-面的个数，q为 v关联的 4-面的个数，s为 v 关联的 5- 面的个数，p为 v的悬挂 3-面的个数，其中 $t, q, s, p \in N$。以下提到的 3-面和 4-面都是指与 v相关联的。由引理 1可知根据 $d(v)$的值我们可以分为以下 5种情况进行讨论。
由注 1(1)(2)(3)可知 G中没有相邻的 3-面，4-面和 5-面，所以

$$t \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor \tag{1}$$

$$q \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor \tag{2}$$

$$s \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor \tag{3}$$

由注 1(1)(5)可知 G中没有相邻的 3-面且 4-面不与两个 3-面相邻，所以

$$p \leq d(v) - 2 \times t - q \tag{4}$$

情况 1： $d(v) = 3$，则由权转移规则可知 v不发生权转移，所以 $ch^*(v) = ch(v) = 2 \times 3 - 6 = 0.$

情况 2： $d(v) = 4$，则 $ch(v) = 2 \times 4 - 6 = 2$。由 (1)式可知 $t \leq 2$，

若 $t = 2$，则由注 1(1)(5)可知 G中的 3-面不与 3-面相邻且 4-面不与两个 3-面相邻，所以 $q = 0$。由(2)式和(4)式可知 $s \leq 2, p = 0$. 由 R1.2 和 R1.4可知 v给每个关联的 3-面转 $\frac{2}{3}$, 给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 = 0$。

若 $t = 1$，则由注 1(2)(4)可知 G中 4-面不与 4-面相邻且 3-面不与两个 4-面相邻，所以 $q \leq 1$。当 $q = 0$ 时，由(3)式和(4)式可知 $s \leq 2, p \leq 2$。由 R1.2，R1.4和 R1.1可知 v给每个关联的 3-面转 $\frac{2}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 = 0$。当 $q = 1$ 时，若 3-面与 4-面相邻，则由注 1(6)可知 5-面不与相邻的 3-面和 4-面相邻，所以 $s = 0$。由(4)式可知 $p \leq 1$。由 R1.2，R1.3和 R1.1可知 v给每个关联的 3-面转 $\frac{2}{3}$，给每个关联的 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$。若 3- 面不与 4-面相邻，由(3)式可知 $s \leq 2$，当 $s = 0$时，由(4)式可知 $p \leq 2$。当 $1 \leq s \leq 2$ 时，由注 1(1)(6)可知 3-面不与 3-面相邻且 5- 面不与相邻的 3-面和 4-面相邻，所以 $p = 0$。由此可知 $s + p \leq 2$。由 R1 可知 v给每个关联的 3-面转 $\frac{2}{3}$，给每个关联的 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3- 面转 $\frac{1}{3}$, 所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 2 = 0.$

若 $t = 0$，则由(2)式和(3)式可知 $q \leq 2$ 和 $s \leq 2$。当 $q \leq 1$时，由引理 3(1)可知 v至多有两个 3-邻点，所以 $p \leq 2$。由 R1.3，R1.4和 R1.1可知 v给每个关联的 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 = 0$。当 $q = 2$时，假设 $s = 0$, 则由(4)式可知 $p \leq 2$. 假设 $1 \leq s \leq 2$，则由注 1(6)可知 5-面不与相邻的 3-面和 4-面相邻，此时 $p = 0$。综上可知 $s + p \leq 2$，由 R1.3，R1.4和 R1.1可知 v给每个关联的 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，

给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 = 0.$

情况 3：$d(v) = 5$， $ch(v) = 2 \times 5 - 6 = 4$。由(1)式可知 $t \leq 2$。

若 $t = 0$，则由(2)式和(3)式可知 $q \leq 2$ 和 $s \leq 2$。当 $q = 2$时，假设 $s = 0$时，由(4)式可知 $p \leq 3$。假设 $s = 1$时，由注 1(2)(6)可知 4-面不与 4-面相邻且 5-面不与相邻的 3-面和 4- 面相邻，此时 $p \leq 2$。假设 $s = 2$ 时，由注 1(2)(6)可知 4-面不与 4-面相邻且 5-面不与相邻的 3-面和 4- 面相邻，此时 $p \leq 1$。综上可知 $s + p \leq 3$。由 R2.2, R2.3 和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 4-面至多转 $\frac{4}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{4}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 3 = \frac{1}{3}$。当 $q \leq 1$时，由(4)式可知 $p \leq 5$。由 R2.2， R2.3和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 4-面至多转 $\frac{4}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{4}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 5 = \frac{1}{3}$。

若 $t = 1$，则由(2)式可知 $q \leq 2$。当 $q = 0$时，由(3)式和(4)式可知 $s \leq 2, p \leq 3$。由 R2.1，R2.3和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 3-面至多转 2，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以$ch^*(v) \geq ch(v) - 2 \times 1 - \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 3 = \frac{1}{3}$. 当 $q = 1$时，由(3)式和(4)式可知 $s \leq 2$, $p \leq 2$。若 3-面是 $(3, 4, 5)$-面，则由引理 7可知 v不与 $(3, 4, 3, 5)$-面相关联。假设 3-面不与 4-面相邻，则由引理 1(2)和引理 3(3)可知 v不与 $(3, 4^+, 3, 5^+)$-面相关联。由 R2.1(2)， R2.2, R2.3和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 3-面转 2，给每个关联的 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - 2 \times 1 - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 = 0$。假设 3-面与 4-面相邻，则由注 1(6)可知 5-面不与相邻的 3-面和 4-面相邻，所以 $s \leq 1$。由 R2.1(2)，R2.2, R2.3和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 3-面转 2，给每个关联的 4-面至多转 1，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - 2 \times 1 - 1 \times 1 - \frac{1}{3} \times 3 = 0$。若 3-面是 $(4, 4, 5)$-面，则由引理 7可知 v不与 $(3, 4, 3, 5)$-面相关联。由 R2.1(3)，R2.2, R2.3和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 3-面转 $\frac{5}{3}$，给每个关联的 4-面至多转 1, 给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3- 面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{5}{3} \times 1 - 1 \times 1 - \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 = 0$。若 3-面是 $(3, 5, 5^+)$-面或 $(4, 5, 5^+)$-面，则由 R2.1(4)(5)，R2.2，R2.3和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 3-面转 2，给每个关联的 4-面至多转 1，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{4}{3} \times 1 - \frac{4}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 4 = 0$。当$q = 2$时，由注 1(3)可知 3-面与 4-面相邻，所以由注 1(6)和(4)式可得 $s = 0$和 $p \leq 1$。若 3-面是 $(3, 4, 5)$-面，则由引理 7可知 v不与 $(3, 4, 3, 5)$-面相关联。由引理 1(2)和引理 3(3)可知 v至多关联一个 $(3, 5, 3, 5^+)$-面。由 R2.1，R2.2和 R2.1(1) 可知 v给每个关联的 3-面转 2，给其中一个 4-面至多转 1，给另一个 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，给悬挂 3- 面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - 2 \times 1 - 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 = 0$。若 3-面是 $(3, 5, 5^+)$-面，则由引理 8可知若 v关联一个 $(3, 4, 3, 5)$-面那么 v不再关联 $(3, 4^+, 3, 5)$-面。当 v关联一个 $(3, 4, 3, 5)$-面时，由 R2.1，R2.2和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 3-面转 $\frac{4}{3}$，给关联的 $(3, 4, 3, 5)$-面转 $\frac{4}{3}$，给另一个 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{4}{3} \times 1 - \frac{4}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$。当 v不关联 $(3, 4, 3, 5)$-面时，由 R2.1(4), R2.2和 R2.1(1)可知 v 给每个关联的 3-面转 $\frac{4}{3}$，给每个关联的 4-面至多转 1，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{4}{3} \times 1 - 1 \times 2 - \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$。若 3-面是 $(4, 4^+, 5)$-面，则由注 1(3)可知 3-面与一个 4-面相邻，所以 v至多关联一个 $(3, 4^+, 3, 5)$- 面。由 R2.1(3)，R2.2和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 3-面转 $\frac{5}{3}$，给关联的其中一个 4-面至多转 $\frac{4}{3}$，给另一个 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v) \geq ch(v) - \frac{5}{3} \times 1 - \frac{4}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 = 0$。

若 $t = 2$，则由注 1(2)(5)可知 4- 面不与 4-面相邻且 4-面不与两个 3-面相邻，所以 $q \leq 1$。

当 $q=0$时，由(3)式和(4)式可知 $s\le 2$, $p\le 1$。假设 $p=0$, 则由引理 3(2)可知 v 至多与一个 $(3,4,5)$-面相关联。若 v与一个 $(3,4,5)$-面相关联，则由引理 3(2)可知 v不再与 $(4^-,4^-,5)$-面相关联。由 R2.1和 R2.3可知 v给关联的 $(3,4,5)$-面转 2，给另外一个关联的 3-面至多转 $\frac{4}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$, 所以 $ch^*(v)\ge ch(v)-2\times 1-\frac{4}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 2=0$。若 v不与 $(3,4,5)$-面相关联，由 R2.1和 R2.3可知 v给关联的 3- 面至多转 $\frac{5}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\ge ch(v)-\frac{5}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 2=0$。假设 $p=1$, 则由引理 3(2)可知 v 至多与一个 $(3,4,5)$-面相关联。若 v与一个 $(3,4,5)$-面相关联，则由引理 3(2)和注 1(1)可知 v不再与 $(4^-,4^-,5)$-面以及 $(3,5,5^+)$相关联，因此 v关联的另一个 3-面为 $(4,5,5^+)$-面或 $(5,5^+,5^+)$- 面。当 v关联的另一个 3-面为 $(4,5,5^+)$-面时， v 为 5^b- 点。由 R2.1(2)(5) 和 R2.3可知 v 给关联的 $(3,4,5)$-面转 2，给 $(4,5,5^+)$-面转 1，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\ge ch(v)-2\times 1-1\times 1-\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 1=0$。当 v关联的另一个 3-面为 $(5,5^+,5^+)$-面时，由 R2.1(2)(5)，R2.3和 R2.1(1)可知 v给关联的 $(3,4,5)$-面转 2，给 $(5,5^+,5^+)$-面转 1，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\ge ch(v)-2\times 1-1\times 1-\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 1=0$。若 v不与 $(3,4,5)$-面相关联，当 v 与两个 $(4,4,5)$-面相关联时，则由注1(1)和引理 3(5)可知 $p=0$。由 R2.1(3)和 R2.3可知 v给关联的 $(3,4,5)$-面转 2，给 $(5,5^+,5^+)$-面转 1，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\ge ch(v)-\frac{5}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 2=0$。当 v不与两个 $(4,4,5)$-面相关联时，由 R2.1, R2.3和 R2.1(1)可知 v 给关联的一个 3-面至多转 $\frac{5}{3}$，给另一个关联的 3-面至多转 $\frac{4}{3}$，给 $(5,5^+,5^+)$-面转 1, 给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\ge ch(v)-\frac{5}{3}\times 1-\frac{4}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 1=0$。当 $q=1$时，由注 1(1)(6)可知 $s=0,p=0$。由引理 3(2)可知 v至多关联一个 $(3,4,5)$-面。若 v 关联一个 $(3,4,5)$-面。则由引理 3(2)可知 v不再与 $(4^-,4^-,5)$-面相关联。当 4-面与 $(3,4,5)$-面相邻时，由引理 7可知 4-面不为 $(3,4,3,5)$- 面。若4-面不是 $(3,5,3,5^+)$-面，则由 R2.1(2)(3)和 R2.2(3)可知 v给关联的 $(3,4,5)$-面转 2，给另一个 3-面转 $\frac{4}{3}$，给每个关联的 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，所以 $ch^*\ge ch(v)-2\times 1-\frac{4}{3}\times 1-\frac{2}{3}\times 1=0$。若 4-面是 $(3,5,3,5^+)$-面，由引理 3(3)可知 v关联的其它 3-面不是 $(3,5,5^+)$-面。当其它 3-面是 $(4,5,5^+)$-面时，v是5^b-点，由R2.1(2)(5)和 R2.2(2)可知 v给关联的 $(3,4,5)$-面转 2, 给另一个 $(4,5,5^+)$- 面转 1，给每个关联的 $(3,5,3,5^+)$-面转 1，所以 $ch^*=ch(v)-2\times 1-1\times 1-1\times 1=0$；当其它 3-面是 $(5,5^+,5^+)$-面，由 R2.1(2)(6)和 R2.2(2)可知 v给关联的 $(3,4,5)$-面转 2，给另一个 $(5,5^+,5^+)$-面转 1，给每个关联的 $(3,5,3,5^+)$-面转 1，所以 $ch^*(v)=ch(v)-2\times 1-1\times 1-1\times 1=0$。当 4-面不与 $(3,4,5)$-面相邻，由引理 3(3)可知 4-面不为 $(3,4^+,3,5)$。由 R2.1和 R2.2可知 v给关联的 $(3,4,5)$-面转 2，给另一个 3-面至多转 $\frac{4}{3}$，给每个关联的 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，所以 $ch^*\ge ch(v)-2\times 1-\frac{2}{3}\times 1-\frac{4}{3}\times 1=0$；若 v不与 $(3,4,5)$-面相关联。当 v与 $(4,4,5)$-面相关联，由引理 7可知 4-面不为 $(3,4,3,5)$-面。如果 v关联两个 $(4,4,5)$-面，则 4-面不为 $(3,4^+,3,5)$-面。由 R2.1和 R2.2可知 v给关联的 $(4,4,5)$-面转 $\frac{5}{3}$，给关联的 4-面至多转 $\frac{2}{3}$，所以 $ch^*\ge ch(v)-\frac{5}{3}\times 2-\frac{2}{3}\times 1=0$；如果 v关联一个 $(4,4,5)$-面，由 R2.1和 R2.2 可知 v给关联的 $(4,4,5)$-面转 $\frac{5}{3}$，给另一个 3-面至多转 $\frac{4}{3}$，给关联的 4- 面至多转 1, 所以 $ch^*\ge ch(v)-\frac{5}{3}\times 1-\frac{4}{3}\times 1-1\times 1=0$. 如果 v不关联 $(4,4,5)$-面，由 R2.1和 R2.2可知 v给关联的 3-面至多转 $\frac{4}{3}$，给关联的 4-面至多转 $\frac{4}{3}$，所以 $ch^*(v)\ge ch(v)-\frac{4}{3}\times 2-\frac{4}{3}\times 1=0$.

情况 4：$d(v)=6$， $ch(v)=2\times 6-6=6$。由(1)式可知 $t\le 3$。

若 $t=0$，则由(2)(4)式可知 $q\le 3$, $s\le 6-q$和 $p\le 6-q$，由 R2.2，R2.3和 R2.1(1)可知 v给每个关联的 4-面至多转 $\frac{4}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$, 给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\ge$

DOI: 10.12677/aam.2019.89184

$ch(v)-\frac{4}{3}\times q-\frac{1}{3}\times(6-q)-\frac{1}{3}\times(6-q)\geq 0$。

若 $t=1$，则由注 1(2)(4)可知 4-面不与 4-面且 3-面不与两个 4-面相邻，所以 $q\leq 2$。当 $q=2$时，由(4)式可知 $p\leq 2$。当 $p=2$时，由注 1(1)(5)(6)可知 4- 面不与 4-面相邻，3-面不与两个 4-面相邻且 5-面不与相邻 3-面和 4-面相邻，所以 $s=0$。当 $p\leq 1$时，由(3)式可知 $s\leq 3$。由此可知 $s+p\leq 4$。由 $R2.1$，$R2.2$，$R2.3$和 $R2.1(1)$可知 v给每个关联的 3-面至多转 2，给每个关联的 4-面至多转 $\frac{4}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-2\times 1-\frac{4}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 4=0$。当 $q\leq 1$时，由(3)式和(4)式可知 $s\leq 3, p\leq 4$。由 $R2.1$，$R2.2$，$R2.3$和 $R2.1(1)$可知 $ch^*(v)\geq ch(v)-2\times 1-\frac{4}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 3-\frac{1}{3}\times 4=\frac{1}{3}$。

若 $t=2$，则由注 1(2)(4)可知 4-面不与 4-面相邻且 3-面不与两个 4- 面相邻，所以$q\leq 2$。由(4)式可知$p\leq 2$。由引理 6(4)可知 v至多关联两个 $(3,4,6)$-面。当 v与两个 $(3,4,6)$-面相关联时，由引理 9和注 1(1)可知 v与两个 $(3,4,6)$-面相关联时，v没有孤立的 3-邻点且 3-面不与 3-面相邻，所以 $p=0$，$s\leq 4-q$。由引理 9可知当 v与两个 $(3,4,6)$-面相关联时，与 v关联的 4-面不为 $(3,4^+,3,6)$- 面。由 $R2.1(2)$，$R2.2$和 $R2.3$ 可知 v给每个关联的 3- 面转 2，给关联的 4- 面至多转 $\frac{2}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-2\times 2-\frac{2}{3}\times q-\frac{1}{3}(4-q)\geq 0$。当 v关联一个 $(3,4,6)$-时，如果 $q=2$，则由注 1(1)(2)(6)可知 $s=0$且由(4)式可知 $p=0$。由引理 10可知两个 4-面不同时为 $(3,4,3,6)$- 面。由 $R2.1$和 $R2.2$可知 v给每个关联的 $(3,4,6)$-面转 2，给另一个 3-面至多转 $\frac{5}{3}$，给其中一个 4- 面至多转 $\frac{4}{3}$，给另一个 4-面至多转 1，所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-2\times 1-\frac{5}{3}\times 1-\frac{4}{3}\times 1-1\times 1=0$；如果 $q=1$，则由(4)式可知 $p\leq 1$。当 $p=1$时，由注 1(1)(5)(6)可知 $s\leq 1$。当 $p=0$时，由(3)式可知 $s\leq 3$。由此可得 $s+p\leq 3$。由 $R2.1$，$R2.2$，$R2.3$和 $R2.1(1)$可知 v给每个关联的 $(3,4,6)$-面转 2，给另一个 3-面至多转 $\frac{5}{3}$，给关联的 4-面至多转 $\frac{4}{3}$，给另一个 4-面至多转 1，给关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-2\times 1-\frac{5}{3}\times 1-\frac{4}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 3=0$。当 v不与 $(3,4,6)$-面相关联时，如果 $q=2$，则由注 1(1)(2)(6)可知 $s=0$。由(4)式可知 $p=0$。由 R2.1 和 R2.2 可知 v给每个关联的 3- 面至多转 2，给关联的 4-面至多转 $\frac{4}{3}$，所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-\frac{5}{3}\times 2-\frac{4}{3}\times 2=0$。如果 $q=1$，则由(4)式可知 $p\leq 1$。当 $p=1$时，由注 1(1)(5)(6)可知 $s\leq 1$。当 $p=0$时，由(3)式可知 $s\leq 3$。由此可得 $s+p\leq 3$。由 R2.1，R2.2，R2.3和 R2.1(1)可知 v给每个关联 3-面至多转 $\frac{5}{3}$，给关联的 4-面至多转 $\frac{4}{3}$，给关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-\frac{5}{3}\times 2-\frac{4}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 3=\frac{1}{3}$。如果 $q=0$，则由(3)式和(4)式可知 $s\leq 3, p\leq 2$。由 R2.1，R2.3 和 R2.1(1)可知 v给每个关联 3-面至多转 $\frac{5}{3}$，给关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，给悬挂 3-面转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-\frac{5}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 3-\frac{1}{3}\times 2=1$。

若 $t=3$，则由注 1(1)(4)可知 $q=0$，由(3)式和(4)式可知$s\leq 3, p=0$。由引理 6(4)可知 v至多与两个 $(3,4,6)$-面相关联。当 v与两个 $(3,4,6)$-面相关联时，由引理 6(4)和引理 9可知其它 3-面是 $(4,5^+,6^b)$-面或 $(5^+,5^+,6)$-面。由 R2.1(2)(5)(6)和 R2.3可知 v给每个关联的 $(3,4,6)$-面转 2，给其它 3-面至多转 1，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-2\times 2-1\times 1-\frac{1}{3}\times 3=0$。当 v与一个 $(3,4,6)$-面相关联时，由引理 6(4)可知 v至多有一个 $(4,4,6)$-面，由 R2.1和 R2.3可知 v给关联的 $(3,4,6)$-面转 2，给其他 3-面至多转 $\frac{5}{3}$或 $\frac{4}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$, 所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-2\times 1-\frac{5}{3}\times 1-\frac{4}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 3=0$. 当 v不与 $(3,4,5)$-面相关联，由 R2.1和 R2.3可知 v给关联的 3-面至多转 $\frac{5}{3}$，给每个关联的 5-面至多转 $\frac{1}{3}$，所以 $ch^*(v)\geq ch(v)-\frac{5}{3}\times 3-\frac{1}{3}\times 3=0$。

情况 5：$d(v)\geq 7$，$ch(v)=2d(v)-6$。令 k为与 v相关联的 3-面和 4-面相邻的数量。

由注 1(1)(2)(4)(5)可知

$$k \leq \lfloor \frac{d(v)}{3} \rfloor \tag{5}$$

$$q \leq (k + \lfloor \frac{d(v)-3k}{2} \rfloor) - (t-k) = \lfloor \frac{d(v)-3k}{2} \rfloor + 2k - t \tag{6}$$

$$s \leq d(v) - (t+q) - k \tag{7}$$

由(1)式，(4)式，(5)式，(6)式和(7)式可得

$$\begin{aligned}
ch^*(v) &\geq 2d(v) - 6 - (2t + \frac{4}{3}q + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}p) \\
&\geq d(v) - 6 - [2t + \frac{4}{3}q - \frac{1}{3}(d(v) - (t+q) - k) + \frac{1}{3}(d(v) - 2 \times t - q)] \\
&\geq \frac{4}{3}d(v) - 6 - (t + \frac{2}{3}q - \frac{1}{3}k) \\
&\geq \frac{4}{3}d(v) - 6 - [t + \frac{2}{3} \times (\lfloor \frac{d(v)-3k}{2} \rfloor + 2k - t) - \frac{1}{3}k] \\
&\geq d(v) - 6 - \frac{1}{3}t.
\end{aligned}$$

若 $d(v) = 2r + 1$，其中 $r \geq 3$，则 $ch^*(v) \geq \frac{5}{3}r - 5 \geq 0$；若 $d(v) = 2r$，其中 $r \geq 4$，则$ch^*(v) \geq \frac{5}{3}r - 6 > 0$。

由上可知，对任意 $x \in V \cup F$，$ch^*(v) \geq 0$已得证，所以定理 1 得证。

参考文献

[1] Škrekovski, R. (1999) List Improper Coloring of Planar Graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, **8**, 293-299. https://doi.org/10.1017/S0963548399003752

[2] Eaton, N. and Hull, T. (1999) Defective List Colorings of Planar Graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, **25**, 79-87.

[3] Cowen, L.J., Cowen, R.H. and Woodall, D.R. (1986) Defective Colorings of Graphs in Surfaces: Partitions into Subgraphs of Bounded Valency. *Journal of Graph Theory*, **10**, 187-195. https://doi.org/10.1002/jgt.3190100207

[4] Škrekovski, R. (1999) Gröstzsch-Type Theorem for List Colorings with Impropriety One. *Combinatorics, Probability and Computing*, **8**, 493-507. https://doi.org/10.1017/S096354839900396X

[5] Lih, K.W. (2001) A Note on List Improper Coloring Planar Graphs. *Applied Mathematics Letters*, **14**, 269-273. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(00)00147-6

[6] Dong, W. and Xu, B. (2009) A Note on List Improper Coloring of Plane Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **157**, 433-436. https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.06.023

[7] Wang, Y. and Xu, L. (2013) Improper Choosability of Planar Graphs without 4-Cycles. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **27**, 2029-2037. https://doi.org/10.1137/120885140

[8] Xu, B. and Zhang, H. (2007) Every Toroidal Graphs without Adjacent Triangles Is $(4,1)^*$-Choosable. *Discrete Applied Mathematics*, **155**, 74-78.
https://doi.org/10.1016/j.dam.2006.04.042