Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(1), 38-42
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.91005

The Nature of the $\Phi(m)$ Function

Wei Zhang

College of Economics and Management, Chengdu University, Chengdu Sichuan
Email: tianshi20122013@sina.com

Received: Dec. 12th, 2019; accepted: Dec. 28th, 2019; published: Jan. 3rd, 2020

Abstract

In number theory, for the continuous product formula $\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$, the meaning is unclear. This paper gives the definition and nature of $\Phi(m)$ function, as well as the relationship between $\Phi(m)$ and Euler's totient function $\varphi(m)$. As is known to all, Euler function $\varphi(m)$ is widely used, $\Phi(m)$ function if there are other applications, some attempts are made in this paper.

Keywords

$\Phi(m)$ Function, Euler Function $\varphi(m)$, Co-Prime, Generalized Goldbach Conjecture

$\Phi(m)$函数的性质

张　伟

成都大学经济管理学院，四川　成都
Email: tianshi20122013@sina.com

收稿日期：2019年12月12日；录用日期：2019年12月28日；发布日期：2020年1月3日

摘　要

数论中，连乘积公式$\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$的含义并不明确。本文给出了$\Phi(m)$函数的定义与性质，以及$\Phi(m)$函数与欧拉$\varphi(m)$函数之间的关系。众所周知，欧拉$\varphi(m)$函数应用十分广泛，$\Phi(m)$函数是否有其他应用，本文作了一点探索。

关键词

$\Phi(m)$函数，欧拉$\varphi(m)$函数，互质，广义哥德巴赫猜想

文章引用: 张伟. $\Phi(m)$函数的性质[J]. 应用数学进展, 2020, 9(1): 38-42.
DOI: 10.12677/aam.2020.91005

1. 定义与性质

1) 欧拉 $\varphi(m)$函数

在数论中，对正整数 m，欧拉(Euler)函数 $\varphi(m)$是小于 m 的正整数中与 m 互质的数的数目。

$\varphi(m)=m\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)$ ($\prod$ 为连乘积符号，p 为 m 的素因子)。

$\Phi(m)$函数[1] [2]：

在数论中，对偶数 m ($m\geq 6$)，函数 $\Phi(m)$是小于 m 的正奇数中 q 与 m 互质且 $q-2k$ 或 $q+2k$ ($k\geq 1$)与 m 互质的正奇数 q 的数目。

显然，$q<m$，$q-2k$ 不一定为正整数或 $q+2k$ 不一定小于 m。

若 $k=2^n$，$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$ ($\prod$ 为连乘积符号，p 为 m 的奇素因子)。

若 k 与 m 的奇素因子不同，$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$ ($\prod$ 为连乘积符号，p 为 m 的奇素因子)。

若 k 与 m 存在共有的奇素因子，$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}$ ($\prod$ 为连乘积符号，$\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$，$p$ 为 m 的奇素因子，$\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}$，p 为 k 与 m 的共有奇素因子)。

若 k 与 m 的奇素因子相同，$\Phi(m)=\varphi(m)$。

对于不同的 $2k$，如果二者之差为 m 的倍数，$\Phi(m)$相等，q 相同。

若 $m=2^n$，$\Phi(m)=\varphi(m)=\frac{m}{2}$。

2) 若 m 为奇数($m\geq 3$)，函数 $\Phi(m)$是小于 m 的正整数中 q 与 m 互质且 $q-k$ 或 $q+k$ ($k\geq 1$)与 m 互质的正整数 q 的数目。

显然，$q<m$，$q-k$ 不一定为正整数或 $q+k$ 不一定小于 m。

若 $k=2^n$，$\Phi(m)=m\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$ ($\prod$ 为连乘积符号，p 为 m 的奇素因子)。

若 k 与 m 的奇素因子不同，$\Phi(m)=m\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$ ($\prod$为连乘积符号，p 为 m 的奇素因子)。

若 k 与 m 存在共有的奇素因子，$\Phi(m)=m\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}$ ($\prod$ 为连乘积符号，$\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$，$p$ 为 m 的奇素因子，$\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}$，p 为 k 与 m 的共有奇素因子)。

若 k 与 m 的奇素因子相同，$\Phi(m)=\varphi(m)$。

对于不同的 k，如果二者之差为 m 的倍数，$\Phi(m)$相等，q 相同。

3) 在数论中，对偶数 $m(m\geq 6)$，函数 $\Phi(m)$也可表示小于 m 的正奇数中 q 与 m 互质且 $m+2k-q(k\geq 1)$ 与 m 互质的正奇数 q 的数目。

显然，$q<m$，$m+2k-q$ 不一定小于 m。

若 $k=2^n$，$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$（$\prod$ 为连乘积符号，p 为 m 的奇素因子）。

若 k 与 m 的奇素因子不同，$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$（$\prod$ 为连乘积符号，p 为 m 的奇素因子）。

若 k 与 m 存在共有的奇素因子，$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}$（$\prod$ 为连乘积符号，$\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$，$p$ 为 m 的奇素因子，$\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}$，p 为 k 与 m 的共有奇素因子）。

若 k 与 m 的奇素因子相同，$\Phi(m)=\varphi(m)$。

对于不同的 $2k$，如果二者之差为 m 的倍数，$\Phi(m)$相等，q 相同。

2. 证明

$\Phi(m)$函数性质的证明与欧拉 $\varphi(m)$函数类似，略。

3. 举例

1：$m=30$，$2k=2$ 或 $2k=4$ 或 $2k=8$ 或 $2k=16$ 或 $2k=32$ 或 $2k=2^n$，$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)=3$。

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-2, q)$个数为 3，分别为：(−1, 1), (11, 13), (17, 19)。
q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-4, q)$个数为 3，分别为：(7, 11), (13, 17), (19, 23)。
q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-8, q)$个数为 3，分别为：(−7, 1), (−1, 7), (11, 19)。
q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-16, q)$个数为 3，分别为：(1, 17), (7, 23), (13, 29)。
q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-32, q)$个数为 3，分别为：(−31, 1), (−19, 13), (−13 ,19)。
q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-64, q)$个数为 3，分别为：(−53, 11), (−47, 17), (−41 ,23)。
$2k=2$ 与 $2k=32$，$2k$ 之差为 30，q 相同，分别为：1, 13, 19。
$2k=4$ 与 $2k=64$，$2k$ 之差为 60，q 相同，分别为：11, 17, 23。

$m=210$，$2k=2$ 或 $2k=4$ 或 $2k=8$ 或 $2k=16$ 或 $2k=32$ 或 $2k=2^n$，$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)=15$。

q 不超过 210 与 210 互质的奇数对$(q-2, q)$个数为 15，分别为：
(−1, 1), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109),
(137, 139), (149, 151), (167, 169), (179, 181), (191, 193), (197, 199)。

2：$m=30$，$2k=6$ 或 $2k=12$ 或 $2k=24$ 或 $2k=48$ 或 $2k=3^N\times 2^n$，$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}=6$。

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-6, q)$个数为 6，分别为：(1, 7), (7, 13)，(13, 19), (11, 17), (17, 23), (23, 29)。

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-12, q)$个数为 6，分别为：(−11, 1), (1, 13), (7, 19), (17, 29), (−1, 11), (11, 23)。

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-24, q)$个数为 6，分别为：(−23, 1), (−17, 7), (−13, 11),(−11, 13), (−7, 17), (1, 23)。

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-48, q)$个数为 6，分别为：(−47, 1), (−41, 7), (−37, 11), (−31, 17), (−29, 19), (−19, 29)。

3：$m=30$，$2k=30$ 或 $2k=60$ 或 $2k$ 为 30 的倍数，

$$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)=\varphi(m)=8\text{。}$$

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-30, q)$个数为 8，分别为：(−29, 1), (−23, 7), (−19, 11), (−17, 13), (−13, 17), (−11, 19), (−7, 23), (−1, 29)。

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-60, q)$个数为 8，分别为：(−59, 1), (−53, 7), (−49, 11), (−47, 13), (−43, 17), (−41, 19), (−37, 23), (−31, 29)。

4：$m=30$，$2k=14$ 或 $2k=28$ 或 $2k=56$ 或 $2k=7^N\times 2^n$， $\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)=3$。

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-14, q)$个数为 3，分别为：(−13, 1), (-7, 7), (−1, 13)。

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-28, q)$个数为 3，分别为：(1, 29), (−11, 17), (−17, 11)。

q 不超过 30 与 30 互质的奇数对$(q-56, q)$个数为 3，分别为：(−49, 7), (−43, 13), (−37, 19)。

5：$m=30$，$2k=2$ 或 $2k=4$ 或 $2k=8$ 或 $2k=16$ 或 $2k=32$ 或 $2k=2^n$， $\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)=3$。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+2-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 3，分别为：1, 13, 19。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+4-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 3，分别为：11, 17, 23。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+8-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 3，分别为：1, 7, 19。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+16-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 3，分别为：17, 19, 23。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+32-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 3，分别为：1, 13, 19。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+64-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 3，分别为：11, 17, 23。

$2k=2$ 与 $2k=32$，$2k$ 之差为 30，q 相同，分别为：1, 13, 19。

$2k=4$ 与 $2k=64$，$2k$ 之差为 60，q 相同，分别为：11, 17, 23。

6：$m=30$，$2k=6$ 或 $2k=12$ 或 $2k=24$ 或 $2k=48$ 或 $2k=3^N\times 2^n$， $\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}=6$。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+6-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 6，分别为：7, 13, 17, 19, 23, 29。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+12-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 6，分别为：1, 11, 13, 19, 23, 29。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+24-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 6，分别为：1, 7, 11, 13, 17, 23。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+48-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 6，分别为：1, 7, 11, 17, 19, 29。

7：$m=30$，$2k=30$ 或 $2k=60$ 或 $2k$ 为 30 的倍数。

$$\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)\prod\frac{(p-1)}{(p-2)}=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)=\varphi(m)=8\text{。}$$

q 不超过 30 与 30 互质，$30+30-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 8，分别为：1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29。

q 不超过 30 与 30 互质，$30+60-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 8，分别为：1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29。

8：$m=30$，$2k=14$ 或 $2k=28$ 或 $2k=56$ 或 $2k=7^N\times 2^n$， $\Phi(m)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)=3$。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+14-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 3，分别为：1, 7, 13。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+28-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 3，分别为：11, 17, 29。

q 不超过 30 与 30 互质， $30+56-q$ 与 30 互质的奇数 q 个数为 3，分别为：7, 13, 19。

4. Φ(*m*)函数的应用：广义哥德巴赫猜想

哥德巴赫猜想：对于任意大于 2 的正整数 *n*，偶数 2*n* 都可表示为二个素数之和。

即：$\forall n\in N\left(N\geq 3\right)$，$\exists p,q\in P$ （*P* 为素数），$2n=p+q$。

广义哥德巴赫猜想[3] [4]：

对于任一充分大的偶数 2*n*，若 *n* 对于模 *m* 的余数为 *a* (*a*，*m* 互素)，则偶数 2*n* 可表示为二个对于模 *m* 的余数为 *a* 的素数之和。

即：若 $n\equiv a\left(\operatorname{mod} m\right)$ (*n* 为充分大的正整数)，$\left(a,m\right)=1$，$\exists p,q\in P$ (*P* 为素数)，$p\equiv q\equiv a\left(\operatorname{mod} m\right)$，$2n=p+q$。

设 *G* (*x*)为偶数 *x* 可表示为二个素数之和的表示数即偶数 *x* 的(1 + 1)表示数。

$G\left(a,m,x\right)$为偶数 *x* 可表示为二个对于模 *m* 的余数为 *a* 的素数之和的表示数。

Φ(*m*)为偶数 *x* 的(1 + 1)表示数对于模 *m* 的分类数，则：

1) 若 $m=2^n$，$G\left(a,m,x\right)\sim\frac{1}{\Phi\left(m\right)}G\left(x\right)\sim\frac{1}{\varphi\left(m\right)}G\left(x\right)$ (~为等价符号)。

2) 若 *m* 为偶数，$G\left(a,m,x\right)\sim\frac{1}{\Phi\left(m\right)}G\left(x\right)$，$\Phi\left(m\right)=\frac{m}{2}\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$ (*p* 为 *m* 的奇素因子)。

3) 若 *m* 为奇数，$G\left(a,m,x\right)\sim\frac{1}{\Phi\left(m\right)}G\left(x\right)$，$\Phi\left(m\right)=m\prod\left(1-\frac{2}{p}\right)$ (*p* 为 *m* 的奇素因子)。

其中，$G\left(x\right)\sim 2C\cdot\prod\frac{\left(p-1\right)}{\left(p-2\right)}\cdot\frac{x}{\ln^2 x}$ (*p* 为 *x* 的奇素因子。$C=\prod\left(1-\frac{1}{\left(p-1\right)^2}\right)$，*p* 遍历所有奇素数)。

显然，当 *m*=2，*m*=3 或 *m*=6 时，$G\left(a,m,x\right)$与 *G* (*x*)等价。

例如：

形如 2 + 30*k* 的大偶数 2*n* 都可表示为形如 1 + 30*k* 的两个素数之和，且其表示数约为偶数 2*n* 的(1 + 1)表示数的$\frac{1}{3}$。

参考文献

[1] 柯召, 孙琦. 数论讲义(上) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1986: 49-51.

[2] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992: 46-49.

[3] 哈代, 怀特. 数论导引(第 17.1 和 22.20 节) [M]. 第 5 版. 牛津: 牛津大学出版社, 2008.

[4] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想(第 6.1 和 8.1 节) [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2011.