Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(1), 105-108
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.91013

Hans汉斯

The Maximum Number of Hyperedges of An *r*-Uniform *D*-Hypergraph

Yiping Zhu, Yaping Xiong

School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
Email: yipingzhu0207@163.com, ypxiongyj@163.com

Received: Dec. 26th, 2019; accepted: Jan. 8th, 2020; published: Jan. 15th, 2020

Abstract

A mixed hypergraph on a finite set X is a triple $H=(X,C,D)$, where *C* and *D* are families of subset of X. The member of *C* is called *C*-edge and the member of *D* is called *D*-edge. A mixed hypergraph is called *C*-hypergraph when $D=\varnothing$, a mixed hypergraph is called *D*-hypergraph when $C=\varnothing$. Let $H=(X,C,D)$ be a mixed hypergraph, *r* is a positive integer not less than 2. For an arbitrary *C*-edge and *D*-edge, if we have $|C|=r$, $|D|=r$, then the mixed hypergraph *H* is called *r*-uniform mixed hypergraph. In particular, if $C=\varnothing$, the mixed hypergraph *H* is called *r*-uniform mixed *D*-hypergraph. In this paper, we solve the problem about the maximum number of hyperedges of an *r*-uniform *D*-hypergraph when $\chi(H)=k$.

Keywords

Mixed Hypergraph, *r*-Uniform *D*-Hypergraph, The Maximum Number of Hyperedges

r-一致*D*-超图的最大边数

朱义坪，熊亚萍

山东师范大学数学与统计学院，山东 济南
Email: yipingzhu0207@163.com, ypxiongyj@163.com

收稿日期：2019年12月26日；录用日期：2020年1月8日；发布日期：2020年1月15日

摘　要

混合超图 $H=(X,C,D)$ 是一个三元组，其中***X***为***H***的顶点集。***C***为***X***的子集族，记作***C***-边。***D***为***X***的子集族，

文章引用: 朱义坪, 熊亚萍. *r*-一致 *D*-超图的最大边数[J]. 应用数学进展, 2020, 9(1): 105-108.
DOI: 10.12677/aam.2020.91013

记作D-边。$C=\varnothing$ 的混合超图称为D-超图，$D=\varnothing$ 的混合超图称为C-超图。$H=(X,C,D)$是一混合超图，r是不小于2的正整数，若满足对任意的C-超边和D-超边，都有$|C|=r$，$|D|=r$，则称混合超图H为r-一致混合超图。特别地，若又有$C=\varnothing$，则称混合超图H为r-一致D超图。在本文中，我们解决当$\chi(H)=k$时，r-一致D-超图H的最大边数这一问题。

关键词

混合超图，r-一致D-超图，最大超边数

1. 引言

1995 年，Vitaly Voloshin [1]对于超图的染色理论提出了其对偶问题，即：使某些超边中至少有两个点染相同的颜色，此类超边称为 C-边，传统超边称为 D-边，同时包含 C-边和 D-边的超图称为混合超图，记为 $H=(X,C,D)$。这两种超图的主要区别体现在染色上。$C=\varnothing$ 的混合超图称为 D-超图，$D=\varnothing$ 的混合超图称为 C-超图。

设 $H=(X,C,D)$ 是一混合超图，H 的一个正常的 k-染色是一个映射 φ：$X\to\{1,2,\cdots,k\}$，使得下述条件成立：

1) 每条 C-边中至少有两个顶点染相同的颜色；

2) 每条 D-边中至少有两个顶点染不同的颜色。

混合超图 $H=(X,C,D)$ 的一个 k 色严格染色是一个正常的 k-染色且恰使用了 k 种染色。使混合超图 $H=(X,C,D)$ 有一个严格染色所需的最多(最少)的颜色数被称为 H 的上色数(下色数)，记作 $\bar{\chi}(H)$ ($\chi(H)$)。

混合超图的概念一经提出，关于混合超图的新的问题也随之产生，如对 C-超图的染色的研究。C-超图的染色理论是最大顶点染色理论，因为对于 C-超图来说，存在 1 色严格染色。而在超图中所用的最多颜色数即为超图的顶点数，故超图的染色理论是最小顶点染色理论。因此，对于混合超图来说，最小最大顶点染色理论都是有意义的。对于 D-超图的染色问题已有许多结果，本文中我们将研究 r-一致 D-超图，我们首先给出 r-一致 D-超图的概念：

设 $H=(X,C,D)$ 是一混合超图，r 是不小于 2 的正整数，若满足对任意的 C-超边和 D-超边，都有 $|C|=r$，$|D|=r$，则称混合超图 H 为 r-一致混合超图。特别地，若又有 $C=\varnothing$ ($D=\varnothing$)，则称 H 为 r-一致 D-超图(r-一致 C-超图)。

极值问题在超图与混合超图中是有趣的而又极具挑战性的。在参考文献[1] [2] [3] [4]中已有一些关于混合超图的最小点数，最小边数等问题的结果。Vitaly Voloshin 在文献[3]中提出一个公开问题：当 $\bar{\chi}(H)\ge k$ 时，r-一致 C-超图 H 的最大边数是多少？该问题已经在文献[5]中得到解决。在本文中，我们解决当 $\chi(H)=k$ 时，r-一致 D-超图 H 的最大边数这一问题。

2. 定理及其证明

定理 1 设 $H=(X,D)$ 是具有 n 个顶点的 r-一致 D-超图，φ 是顶点集 X 的一个 k-染色且 $\chi(H)=k$。

则 H 的最大边数为 $k^{r-1}c$，其中 r 充分大时，对任意的 $\lambda < \sqrt{2}$，$c = \lambda\left(r/\ln r\right)^{1/2}$。

断言 1 存在 $p \in [0,1]$ 使得 $c(1-p)^r + c^2 p < 1$。

因为 $1-p \le \mathrm{e}^{-p}$。当 $p = \ln(r/c)/r$ 时，函数 $c\mathrm{e}^{-pr} + c^2 p$ 取得最小值。将 p 代入上面的函数，若

$$\frac{c^2}{r}\left(1+\ln(r/c)\right) < 1$$

则断言 1 成立。当 r 充分大时，对任意的 $\lambda < \sqrt{2}$，$c = \lambda\left(r/\ln r\right)^{1/2}$，这个不等式是成立的。因此，断言 1 的证明完成。

设 $H = (X, D)$ 具有 $\varepsilon(H) = k^{r-1}c$ 条边且 p 满足上述条件。首先我们随机地用 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中的一种颜色逐个给 H 的顶点着色。其次对于每个顶点 v，我们抛掷硬币，出现正面的概率为 p。另外，对 V 中的顶点随机排序。

步骤 1. 随机地用 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中的一种颜色逐个给 H 的顶点着色，称之为第一次染色。令 B 表示位于某条(可能多条)单色边 $e \in E$ 中的点 $v \in V$ 的集合。

步骤 2. 按 V 中顶点的顺序依次考虑 B 中的元素。当我们考虑 b 时，若存在某条(可能多条)包含 b 的边 $e \in H$ 在第一次染色中是单色的且这条边中至今没有顶点改变颜色，则称 b 仍然危险。若 b 不是仍然危险的，则保持原有染色。但若 b 是仍然危险的，则抛掷硬币。若出现正面则改变 b 的颜色，否则保持原有染色。我们称终止时的染色为最终染色。

坏事件 在最终的染色中，某条边 $e \in H$ 是单色的。

在最终的染色中，边 $e \in E$ 是单色的有两种情况。要么在第一次染色中，边 e 是单色的且在最终的染色中，边 e 仍然是单色的；要么在第一次染色中，边 e 不是单色的但在最终的染色中，边 e 是单色的。第一种情况记作 A_e，第二种情况记作 B_e。在第一次染色中，边 e 是单色的概率为 $\left(\frac{1}{k}\right)^r$，在最终的染色中，所有的硬币出现反面的概率为 $(1-p)^r$，即边 e 仍然是单色的概率为 $\left(\frac{1}{k}\right)^r$，则

$$\Pr[A_e] = \left(\frac{1}{k}\right)^r (1-p)^r$$

故

$$k\sum_{e\in H}\Pr[A_e] = c(1-p)^r$$

为了避免过度重染且得到 $\Pr[B_e]$ 更好的界，我们巧妙地界定 $\Pr[B_e]$。对于不同的边 $e, f \in E$，若

1) 边 e, f 恰重叠一个元素，记作 v；

2) 在第一次染色中边 f 是单色的且在最终的染色中 e 是单色的；

3) 在步骤 2 中，点 v 是边 e 中最后一个改变颜色的点；

4) 当考虑点 v 时，边 f 仍然是单色的；

则称边 e 取决于边 f。

假设 B_e 成立。因边 e 中的某些点会改变染色，故存在最后一个改变颜色的点 v。但对于点 v，为什么仍要抛掷硬币？因为点 v 一定存在于某条(可能多条)边 f 中，边 f 在第一次染色中是单色的且当考虑点 v 时，边 f 仍然是单色的。那么边 e, f 会重叠另一个点 v'？答案是否定的。因为点 v' 一定在点 v 之前改变颜色，则当考虑点 v 时，边 f 不再是完全单色的，与边 f 的假设矛盾。因此当 B_e 成立时，边 e 取决于边 f。令 C_{ef} 表示事件边 e 取决于边 f，则 $\sum_e \Pr[B_e] \le \sum_{e\ne f}\Pr[C_{ef}]$。

设边e, f 固定且$e \cap f = \{v\}$ (否则C_{ef} 不发生)。顶点集V的随机排序导致了$e \cup f$ 的一个随机排序σ。令$i = i(\sigma)$ ($i > 0$)表示在点v之前点$v' \in e$的数量，$j = j(\sigma)$表示在点v之前的点$v' \in f$ 的数量。

由上述讨论知，计算$\Pr\left[C_{ef}\right]$须同时满足以下几点。首先，在第一次染色中，边f是单色的，在最终的染色中，点v一定会改变颜色。其次，对点v之前的点$v' \in f$ 进行抛掷硬币时全部是反面朝上。再者，点 v 之后的点$v' \in e$的颜色起初就相同(因为点 v 是边 e 中最后一个改变颜色的顶点)。最后，随机从$\{1, 2, \cdots, k\}$中选择颜色对点v之前的点$v' \in e$进行染色且最终染色与点v之后的顶点颜色相同。

固定σ得到

$$\Pr\left[C_{ef} \middle| \sigma\right] \le \left(\frac{1}{k}\right)^r p(1-p)^j \left(\frac{1}{k}\right)^{r-i-1} \left(\frac{1+p}{k}\right)^i$$

故

$$\Pr\left[C_{ef}\right] \le k^{1-2r} pE\left[(1+p)^i (1-p)^j\right]$$

引理 4 [6] $E\left[(1+p)^i (1-p)^j\right] \le 1$。

因为至多存在$\varepsilon(H)^2 = \left(k^{r-1}c\right)^2$对边$e, f$ 且边$e \ne f$，则

$$\sum_e \Pr\left[B_e\right] \le \left(k^{r-1}c\right)^2 k^{1-2r} p < c^2 p$$

因此坏事件出现的概率为$c(1-p)^k + c^2 p$。由断言 1，坏事件不发生的概率为正。这表明存在一种无单色边e的染色。因此，定理 1 的证明完成。

致 谢

感谢导师蔡建生教授给我们介绍混合超图的相关知识，并对本文进行了全面的修改。最后，向各位尊敬的评审专家致以诚挚的感谢，谢谢你们对本论文做出的评审以及提出的宝贵意见。

参考文献

[1] Voloshin, V.I. (2002) Coloring Mixed Hypergraphs: Theory, Algorithms and Applications, AMS, Providence.

[2] Bujt´as, C. and Tuza, Z. (2008) Uniform Mixed Hypergraphs: The Possible Numbers of Colors. *Graphs and Combinatorics*, **24**, 1-12. https://doi.org/10.1007/s00373-007-0765-5

[3] Diao, K., Zhao, P. and Wang, K. (2014) The Smallest One-Realization of a Given Set III. *Graphs and Combinatorics*, **30**, 875-885. https://doi.org/10.1007/s00373-013-1322-z

[4] Voloshin, V.I. (1992) On the Upper Chromatic Number of a Hypergraph. *Scientific Research Conference of the Moldova State University*, Theses of Resports, Kishinev, Vol. 1, 42.

[5] Cai, J., Xiong, Y. and Yang, D. (2020) A Note on the Maximum Number of Hyperedge so f C-Hypergraph. Submitted for Publication.

[6] Alon, N. and Spencer, J.H. (2008) The Probablistic Method. 3rd Edition, John Wiley and Sons, New York.