Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(10), 1672-1685
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.910194

三圈图的极大边修正Szeged指标

王小芳，刘蒙蒙*

兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州
Email: f18893497582@163.com, *liumm05@163.com

收稿日期：2020年9月26日；录用日期：2020年10月7日；发布日期：2020年10月14日

摘 要

边修正Szeged指标 $Sz_e^*(G)$ 的定义是 $Sz_e^*(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)+\frac{m_0(e)}{2}\right)\left(m_v(e)+\frac{m_0(e)}{2}\right)$，其中 $m_u(e)$ 和 $m_v(e)$ 分别是到*u*的距离比到*v*的距离近的边的个数和到*v*的距离比到*u*的距离近的边的个数，$m_0(e)$ 是到*u*和*v*距离相等的边数。在本文中，我们得到了连通三圈图的修正边Szeged指标的上界，并且刻画了这些图达到上界的极值。

关键词

Wiener指标，修正Szeged指标，边修正Szeged指标，三圈图

Tricyclic Graphs with Maximal Edge Revised Szeged Index

Xiaofang Wang, Mengmeng Liu*

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu
Email: f18893497582@163.com, *liumm05@163.com

Received: Sep. 26th, 2020; accepted: Oct. 7th, 2020; published: Oct. 14th, 2020

Abstract

The edge revised Szeged index $Sz_e^*(G)$ is defined as $Sz_e^*(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)+\frac{m_0(e)}{2}\right)\left(m_v(e)+\frac{m_0(e)}{2}\right)$, where $m_u(e)$ and $m_v(e)$ are, respectively, the number of edges of *G* lying closer to vertex *u* than to vertex *v* and the number of edges of *G* ly-

*通讯作者。

文章引用: 王小芳, 刘蒙蒙. 三圈图的极大边修正 Szeged 指标[J]. 应用数学进展, 2020, 9(10): 1672-1685.
DOI: 10.12677/aam.2020.910194

ing closer to vertex *v* than to vertex *u*, and $m_0(e)$ is the number of edges equidistant to *u* and *v*. In this paper, we give an upper bound of the edge revised Szeged index for a connected tricyclic graphs, and also characterize those graphs that achieve the upper bound.

Keywords

Wiener Index, Revised Szeged Index, Edge Revised Szeged Index, Tricyclic Graph

1. 引言

本文中所考虑的图都是简单、无向图。文章中的术语和符号请参考[1]。令 C_m 是 m 条边的圈，G 是一个顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$ 的连通图。对 $u,v \in V(G)$，$d(u,v)$ 是 u 和 v 之间的距离。G 的 Wiener 指标的定义为

$$W(G)=\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d_G(u,v).$$

这一拓扑指标在数学文献中已得到广泛应用，可见[2] [3]。令 $e=uv$ 是 G 的一条边，则有如下三个集合：

$$N_u(e)=\{w\in V: d(u,w)<d(v,w)\};$$

$$N_v(e)=\{w\in V: d(v,w)<d(u,w)\};$$

$$N_0(e)=\{w\in V: d(u,w)=d(v,w)\}.$$

因此，$\{N_u(e),N_v(e),N_0(e)\}$ 是关于 e 的一个顶点的划分。$N_u(e)$，$N_v(e)$，$N_0(e)$ 的点的个数分别被记为 $n_u(e)$，$n_v(e)$，$n_0(e)$。显然，如果 n 是图 G 的顶点数，则有 $n_u(e)+n_v(e)+n_0(e)=n$。在文章[4]中得到了一个 Wiener 指标已知性质的公式如下：

$$W(T)=\sum_{e=uv\in E(T)} n_u(e)n_v(e).$$

这个公式只适用于树 T，使用上面的公式 Gutman [5]引入了一个名为 Szeged 指标的图的不变量作为 Wiener 指标的拓展并且被定义为

$$Sz(G)=\sum_{e=uv\in E(G)} n_u(e)n_v(e).$$

Randdić [6]观察到，Szeged 指标没有考虑到从一条边的端点到另一条边的距离相等的顶点的贡献，所以他构想出了一个改良版的 Szeged 指标，叫做修正 Szeged 指标，连通图 G 的修正 Szeged 指标定义为

$$Sz^*(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}\left(n_u(e)+\frac{n_0(e)}{2}\right)\left(n_v(e)+\frac{n_0(e)}{2}\right).$$

在[7]-[12]中介绍了这些拓扑指数的一些性质和应用。

给定一条边 $e=uv\in E(G)$，边 e 到顶点 x 之间的距离，用 $d(e,x)$ 表示，定义为

$$d(e,x)=\min\{d(u,x),d(v,x)\}.$$

类似地，集合 $M_0(e)$，$M_u(e)$ 和 $M_v(e)$ 被定义为与 u 和 v 等距的边的集合，到顶点 u 的距离小于到顶点 v 的距离的边的集合，以及到顶点 v 的距离小于 u 的边的集合。$M_0(e)$，$M_u(e)$ 和 $M_v(e)$ 的边数分别用 $m_0(e)$，$m_u(e)$ 和 $m_0(e)$ 表示。显然，如果 m 是图 G 的边数，那么 $m_u(e)+m_v(e)+m_0(e)=m$。G 的边 Szeged 指标[13]和边修正 Szeged 指标[14]的定义如下：

$$Sz_e(G)=\sum_{e=uv\in E(G)} m_u(e)m_v(e),$$

$$Sz_e^*(G)=\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)+\frac{m_0(e)}{2}\right)\left(m_v(e)+\frac{m_0(e)}{2}\right).$$

边 Szeged 指标的结果可以在[15] [16] [17]中找到。Dong 等人在中[14]确定了边修正 Szeged 指标最大和最小的 n 个顶点的单圈图。在[18]中，Liu 和 Chen 给出了一个连通双圈图的边修正 Szeged 指标的上界，并且描述了那些达到上界的图。在本文中，我们给出了连通三圈图的边修正 Szeged 指标的一个上界，并对达到上界的图进行了刻画。

定理 1.1 设 G 是一个 $m\ge 37$ 条边的连通三圈图。则有

$$Sz_e^*(G)\le\begin{cases}\dfrac{m^3-32}{4}, & m\text{是偶数}\\[2mm] \dfrac{m^3-40}{4}, & m\text{是奇数}\end{cases}$$

当且仅当 $G\cong F_m$ 时等号成立(如图 1)。

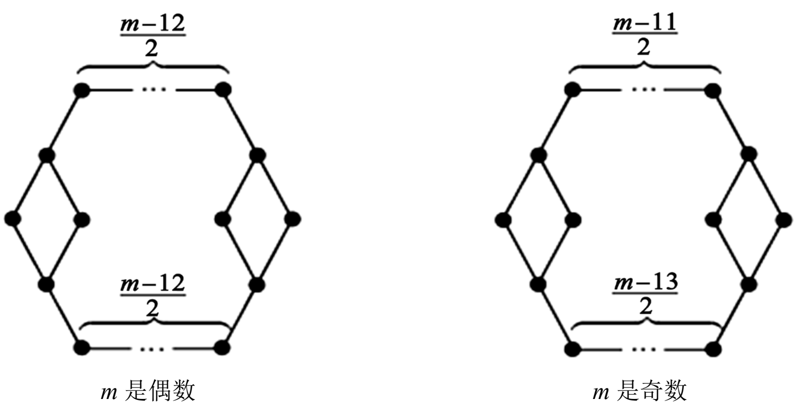

Figure 1. The graph for Theorem 1.1
图 1. 定理 1.1

2. 主要结论

很容易验证

$$Sz_e^*(F_m)=\begin{cases}\dfrac{m^3-32}{4}, & m\text{是偶数}\\[2mm] \dfrac{m^3-40}{4}, & m\text{是奇数}\end{cases}$$

即 F_m 满足定理 1.1 的等式。

因此，对于任何大小为 m 的连通三圈图 G_m，除了 F_m 之外，$Sz_e^*(G_m) < Sz_e^*(F_m)$。使用 $m_u(e)+m_v(e)+m_0(e)=m$ 这个式子，我们有

$$Sz_e^*(G) = \sum_{e=uv\in E(G)} \left(m_u(e)+\frac{m_0(e)}{2}\right)\left(m_v(e)+\frac{m_0(e)}{2}\right)$$
$$= \sum_{e=uv\in E(G)} \left(\frac{m+m_u(e)-m_v(e)}{2}\right)\left(\frac{m+m_v(e)-m_u(e)}{2}\right)$$
$$= \sum_{e=uv\in E(G)} \frac{m^2-\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2}{4}$$

则可以得到

$$Sz_e^*(G) = \frac{m^3}{4} - \frac{1}{4}\sum_{e=uv\in E(G)} \left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \tag{1}$$

我们分三种情况来证明定理 1.1。首先，我们考虑至少有一条悬挂边的连通三圈图，然后考虑没有悬挂边但是有一个割点的连通三圈图，最后考虑 2-连通的三圈图。

2.1. 至少有一条悬挂边的三圈图

引理 2.1 设 G_m 是一个至少有一条悬挂边的 $m \ge 10$ 条边的三圈图。则

$$Sz_e^*(G_m) < Sz_e^*(F_m).$$

证明 设 $e' = xy$ 是图 G 的一条悬挂边并且 $d(y)=1$。当 $m \ge 10$ 时，有

$$\sum_{e=uv\in E(G)} \left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge \left(m_x(e')-m_y(e')\right)^2 = (m-1)^2 > 40.$$

联立等式(1)，证毕。

2.2. 没有悬挂边但是有一个割点的三圈图

引理 2.2 设 G_m 是一个没有悬挂边但是有一个割点的 $m \ge 10$ 条边的三圈图。则

$$Sz_e^*(G_m) < Sz_e^*(F_m).$$

证明 假设 u 是一个割点。G 是由一个双圈图 B 和一个圈 C 组成的且 $V(B)\cup V(C)=\{u\}$。显然 $|E(B)| \ge 5$。

如果 C 是偶圈，对于 C 中的每条边 e，则有 $|m_u(e)-m_v(e)| = m-|E(C)| = |E(B)|$。因此

$$\sum_{e=uv\in E(G)} \left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge \sum_{e=uv\in E(C)} \left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge |E(C)|\cdot|E(B)|^2 \ge 4\times 5^2 > 40.$$

如果 C 是奇圈，对于 C 中除了 xy 使得 $d(u,x)=d(u,y)$ 的每条边 e，则有 $|m_u(e)-m_v(e)| = m-|E(C)| = |E(B)|$。因此

$$\sum_{e=uv\in E(G)} \left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge \sum_{e=uv\in E(C)} \left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge |E(C)-1|\cdot|E(B)|^2 > 2\times 5^2 > 40.$$

联立等式(1)，证毕。

2.3. 2-连通的三圈图

在本节中 $\kappa(G)\ge 2$，它必须是(图 2)中描述的图形之一。字母 $a,b,\cdots,f$ 表示度大于 2 的顶点之间对应路的长度。为了简单起见，我们将这些路径分别称为 $P(a),P(b),\cdots,P(f)$。在下面的引语中，我们将图 2 中的这四个图分别称为 Θ_1、Θ_2、Θ_3 和 Θ_4。

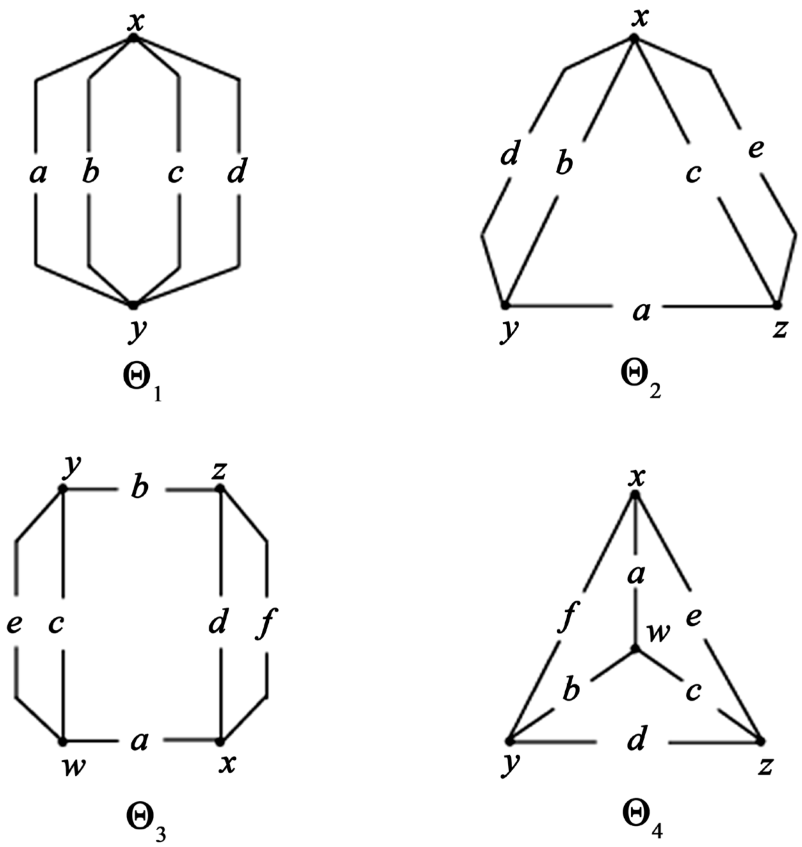

Figure 2. Four cases for 2-connected tricyclic graphs
图 2. 2-连通三圈图的四种情况

引理 2.3 设 G_m 是由路 $P(1),P(2),P(3),P(4)$ 组成的 Θ_1 图，且 $e=uv\in E(G)$。则有 $|m_u(e)-m_v(e)|\le 1$，当且仅当 e 是 $P(1),P(2),P(3),P(4)$ 四条路中奇长路上最中间的那条边。

证明 假设 $e=uv\in P(i)(1\le i\le 4)$，则关于 $N_u(e)$ 和 $N_v(e)$ 有以下三种讨论。

情形 1 x,y 属于不同的集合。我们得到

$$|m_u(e)-m_v(e)|=2|b_i-a_i|,$$

其中 a_i (或 b_i)是 x(或 y)到边 e 的距离。

假设 $x\in N_u(e),y\in N_v(e)$。则在 $P(i)$ 上 $M_u(e)$ 中的边比 $M_v(e)$ 上的边多 a_i-b_i 条，但在 $P(j)(j\ne i)$ 上 $M_u(e)$ 中的边比 $M_v(e)$ 上的边多 b_i-a_i 条，因此 $|m_u(e)-m_v(e)|=|3(b_i-a_i)+(a_i-b_i)|=2|b_i-a_i|$。

情形 2 x,y 属于相同的集合。我们得到

$$|m_u(e)-m_v(e)|=|E(G)|-g,$$

其中 g 是包含边 e 的最短圈 G 的长度。

假设 $x,y \in N_u(e)$。因此所有 $P_j(j \neq i)$ 上的边都属于 $M_u(e)$。由此 $M_v(e)=\left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor$，且 $M_u(e)=\left\lfloor \frac{g-1}{2} \right\rfloor+|E(G)|-g$，所以 $|m_u(e)-m_v(e)|=|E(G)|-g$。

情形 3 x,y 其中一个在 $N_0(e)$ 中。我们得到

$$|m_u(e)-m_v(e)| \geq 2a,$$

当且仅当有三条路 $P_i(1 \leq i \leq 4)$ 的长为 a 时等号成立，其中 a 是四条路 $P_i(1 \leq i \leq 4)$ 中的最短路。

注意到，假设 $x \in N_u(e), y \in N_0(e)$。则包含 e 的最短圈 C 是奇圈。设 $z_j \in P_j(P_j \not\subset C)$ 是离 e 最远的点使得 $z_j \in N_0(e)$。所以

$$|m_u(e)-m_v(e)|=\sum_j d(x,z_j) \geq \sum_j (a+d(y,z_j)) \geq 2a.$$

由上可知，在 case 2 中 $|m_u(e)-m_v(e)| \geq 4$，在 case3 中 $|m_u(e)-m_v(e)| \geq 2$。因此当且仅当 x,y 在不同的集合中时 $|m_u(e)-m_v(e)| \leq 1$，并且当 e 在奇长路 $P_i(1 \leq i \leq 4)$ 的最中间时，$|b_i-a_i|=0$。

引理 2.4 若 G_m 是 $m \geq 12$ 条边的 Θ_1 图(见图 2)，则有

$$Sz_e^*(G_m) < Sz_e^*(F_m).$$

证明 不失一般性，假设 $a \leq b \leq c \leq d$。

如果 $a=b=c=d$，则 $a \geq 3$。先考虑 x 和 y 的八条邻边，令 $e=xz$ 是它们其中一条，由引理 2.3 的情形 1，有 $|m_x(e)-m_z(e)| \geq 4$。所以 $\sum_{e=uv \in E(G)}(m_u(e)-m_v(e))^2 \geq 8 \times 4^2 > 40$。否则，考虑边 $xx_1 \in P(d)$，令 C 是包含 xx_1 的最短圈。若 $y \in N_x(xx_1)$，则由引理 2.3 情形 2，有 $|m_x(e)-m_{x_1}(e)| \geq m-|C|$。相同的，对 $yy_1 \in P(d)$，有 $|m_y(e)-m_{y_1}(e)| \geq m-|C|$。

若 $m-|C| \geq 5$，有 $\sum_{e=uv \in E(G)}(m_u(e)-m_v(e))^2 \geq 2 \times 5^2 > 40$。

若 $m-|C| \geq 4$，$b+c=4$，$a \leq 2$。因为 $m \geq 12, d \geq 6$，所以考虑在 $P(d)$ 上 x,y 到 e_i 的距离不超过 1 的四条边 $e_i(1 \leq i \leq 4)$，则有 $|m_u(e)-m_v(e)|=4$，所以 $\sum_{e=uv \in E(G)}(m_u(e)-m_v(e))^2 \geq 4 \times 4^2 > 40$。

若 $m-|C| \leq 3$，不成立。

若 $y \in N_{x_0}(xx_1)$，则 $d=a+1$。由 $m \geq 12, a \geq 3$，则由引理 2.3 情形 3，$|m_x(e)-m_{x_1}(e)|=|m_y(e)-m_{y_1}(e)| \geq 2a \geq 6$。同样的，当 $yy_1 \in P(d)$ 时，$|m_y(e)-m_{y_1}(e)| \geq 6$，所以 $\sum_{e=uv \in E(G)}(m_u(e)-m_v(e))^2 \geq 2 \times 6^2 > 40$。

联立等式(1)，证毕。

引理 2.5 若 G_m 是 $m \geq 12$ 条边的 Θ_2 图(见图 2)，则有

$$Sz_e^*(G_m) < Sz_e^*(F_m).$$

证明 不失一般性，假设 $d \geq b, e \geq c$。为了完成接下来的证明，我们考虑下面四种情况。

情形 1 $d \geq b+2$。

先考虑 $xx_1, yy_1 \in P(d)$ 这两条边，有

$$|m_x(e)-m_{x_1}(e)|=|m_y(e)-m_{y_1}(e)|=\begin{cases} a+c+e, & b \leq a+c, \\ b+e, & b \geq a+c. \end{cases}$$

由此可得

$\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|=\left|m_y(e)-m_{y_1}(e)\right|\geq a+c+e$。由于 $c+e\geq 3, a+c+e\geq 4$。若 $a+c+e\geq 5$。则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 5^2>40$。

若 $a+c+e=4$，则 $a=1, c=1, e=2$。若 $b\geq 3$，有 $b\geq a+c$，则有 $\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|=\left|m_y(e)-m_{y_1}(e)\right|\geq 5$，所以 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 5^2>40$。

若 $b=2$，有 $d\geq 6$.然后考虑一下边 $xx'\in P(e)$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\geq 6$，则有

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 4^2+6^2>40.$$

情形 2 $d=b+1, e=c+1$。

情形 2.1 $a+c-1\geq b$。

先考虑 $xx_1\in P(c)$，$xx_2\in P(e)$。$\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|\geq d-1+e-2$。

$$\left|m_x(e)-m_{x_2}(e)\right|=\begin{cases}c+d, & c\geq a+b,\\ b+d, & c\leq a+d.\end{cases}$$

由此可得 $\left|m_x(e)-m_{x_2}(e)\right|\geq d+b=2b+1$，所以

$$\left(m_x(e)-m_{x_1}(e)\right)^2+\left(m_x(e)-m_{x_2}(e)\right)^2>5b^2+(e-2)^2+2be+1.$$

若 $b\geq 3$ 或 $e\geq 7$，$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2>40$。

若 $b\leq 2, e\leq 6$，则考虑 $xx'\in P(d)$。

若 $b=1$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\geq 6$，则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 10+6^2>40$。

若 $b=2$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\geq 5$，则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 29+5^2>40$。

情形 2.2 $b\geq a+c+1$。

先考虑 $xx_1\in P(b)$，$xx_2\in P(d)$。由 $b\geq a+c+1$，则 $\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|=b+e-1$，$\left|m_x(e)-m_{x_2}(e)\right|=b+e$，所以 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2=(b+e-1)^2+(b+e)^2$。

若 $b\geq 3$ 或 $e\geq 4$，$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2>40$。

若 $b\leq 2, e\leq 3$，不成立，因为 $b\geq a+c+1$。

情形 2.3 $b=a+c$。

考虑 $xx_1\in P(e)$，有 $\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|=d-1+b=2b$。

若 $b\geq 4$，则有 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq\left(m_x(e)-m_{x_1}(e)\right)^2\geq 8^2>40$。

若 $b=3$，则考虑边 $xx'\in P(d)$，可以得到 $\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|=a+c+e\geq 5$，则有 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 6^2+5^2>40$。

若 $b=2$，则有 $a-c-1, e=2, d=3$，由于 $m\geq 12$，所以不成立。

情形 3 $d=b+1, e=c\geq 2$。

情形 3.1 $a+c-1\geq b$。

先考虑 $xx_1\in P(c)$ 和 $xx_2\in P(e)$，有

$$\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|=\left|m_x(e)-m_{x_2}(e)\right|\ge d-1+c-1.$$

由于 $d\ge 2,c\ge 2,d+c\ge 4$，若 $d+c\ge 7$，有

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 5^2>40.$$

当 $4\le d+c\le 6$ 时，考虑边 $xx'\in P(d)$。

若 $d=3,c=3$，则 $b=2,e=3,a\ge 1$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\ge 6$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 4^2+6^2>40.$$

若 $d=4,c=2$，则 $b=3,e=2,a\ge 2$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\ge 5$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 4^2+5^2>40.$$

若 $d=2,c=4$，则 $b=1,e=4,a\ge 1$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\ge 6$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 4^2+6^2>40.$$

若 $d=3,c=2$，则 $b=e=2,a\ge 3$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\ge 5$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 3^2+5^2>40.$$

若 $d=2,c=3$，则 $b=1,e=3,a\ge 3$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\ge 6$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 3^2+6^2>40.$$

若 $d=2,c=2$，则 $b=1,e=2,a\ge 5$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\ge 6$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 2^2+6^2>40.$$

情形 3.2 $b\ge a+c-1$。

考虑 $xx_1\in P(c)$，由 $b\ge a+c-1$，有 $y\in N_{x_1}(xx_1)$。令 u 是 $P(d)$ 上最远的点使得 $u\in N_x(xx_1)$，u' 是 u 的邻点但是它不在集合 $N_x(xx_1)$ 中，如果圈 $P(d)\cup P(c)\cup P(a)$ 是偶圈，则有 $d(u,x)=d(u',y)+a+c-1$，即 $d(u,x)-d(u',y)=a+c-1$。如果圈 $P(d)\cup P(c)\cup P(a)$ 是奇圈，则有 $d(u,x)+1=d(u',y)+a+c-1$，即 $d(u,x)+1-d(u',y)=a+c-1$。所以 $\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|=e-1+a+c-1=a+2c-2$。相同的，对于边 $xx_2\in P(e)$ 有 $\left|m_x(e)-m_{x_2}(e)\right|=a+2c-2$。

由于 $c\ge 2,a+2c\ge 5$。如果 $a+2c\ge 7$，则

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 5^2>40.$$

若 $a+2c=6$，即 $a=c=e=2$，有 $b\ge 3$。然后考虑 $xx'\in P(d)$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|=b+e\ge 5$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 4^2+5^2>40.$$

若 $a+2c=5$，即 $a=1,c=e=2$，有 $b\ge 3$。然后考虑 $xx'\in P(d)$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|=b+e\ge 5$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 2\times 3^2+5^2>40.$$

情形 4 $d=b, e=c$。

情形 4.1 $d=b=e=c\geq 2$。

考虑边 $xx_1\in P(e)$，有 $\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|=c-1+d=2e-1$。对于 x 的其他三条邻边也是一样的。

如果 $e\geq 3$，则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 4\times 5^2>40$。

如果 $e=2$，然后考虑 $P(a)$ 上的边 yy', zz'，$\left|m_y(e)-m_{y'}(e)\right|=\left|m_z(e)-m_{z'}(e)\right|\geq d+1\geq 3$。

所以 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 6\times 3^2>40$。

情形 4.2 $d=b>e=c\geq 2$。

考虑边 $xx_1\in P(b)$，$\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|=d-1+e$。同样对于 $xx_2\in P(d)$，$\left|m_x(e)-m_{x_2}(e)\right|=d-1+e$。

若 $d+e\geq 6$，则有 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 5^2>40$。

若 $d+e=5$，即 $d=3, e=2$。然后考虑 $xx'\in P(c)$，$\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\geq e-1+d=4$。则有

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 4^2+4^2>40。$$

联立等式(1)，证毕。

引理 2.6 若 G_m 是 $m\geq 12$ 条边的 Θ_3 图(见图 2)，则有，

$$Sz_e^*(G_m)<Sz_e^*(F_m).$$

证明 不失一般性，假设 $f\geq d, e\geq c$，为了完成证明，我们考虑以下四种情况。

情形 1 $e\geq c+2$。

考虑边 $ww_1, yy_1\in P(e)$，

$$\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|=\left|m_y(e)-m_{y_1}(e)\right|=\begin{cases}a+b+d+f,\ c\leq a+b+d,\\ c+f,\ c\geq a+b+d.\end{cases}$$

由此可得 $\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|=\left|m_y(e)-m_{y_1}(e)\right|\geq a+b+d+f$。因为 $d+f\geq 3$，所以 $a+b+d+f\geq 5$，则有 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 5^2>40$。

情形 2 $e=c+1, f=d+1$。

情形 2.1 $a+c-1\geq b+d$。

先考虑 $yy_1\in P(c)$，$yy_2\in P(e)$。$\left|m_y(e)-m_{y_1}(e)\right|\geq e-2+f-1=c+d-1$。

$$\left|m_y(e)-m_{y_2}(e)\right|=\begin{cases}b+d+f,\ c\leq a+b+d,\\ c+f,\ c\geq a+b+d.\end{cases}$$

由此可得 $\left|m_y(e)-m_{y_2}(e)\right|\geq d+b+f=b+2d+1$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq (c+d-1)^2+(b+2d+1)^2.$$

若 $b\geq 4$ 或 $c\geq 5$ 或 $d\geq 3$，则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2>40$。

若 $b\leq 3, c\leq 4, d\leq 2$，则考虑 $ww'\in P(e), zz'\in P(f)$。

若 $d=2$，有 $\left|m_w(e)-m_{w'}(e)\right|\geq 4$，$\left|m_z(e)-m_{z'}(e)\right|\geq 4$ 则

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 3^2+2+3^2+5^2>40.$$

若 $d=1$，有 $\left|m_w(e)-m_{w'}(e)\right|\geq 3$，$\left|m_z(e)-m_{z'}(e)\right|\geq 5$ 则

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \geq 2\times 2^2+2+3^2+5^2>40\cdot$$

情形 2.2　$a+c\leq b+d-1$。

这部分的证明和 Subcase 2.1 的过程类似的。

情形 2.3　$a+c=b+d$。

先考虑 $yy_1\in P(e)$，$xx_1\in P(f)$。$\left|m_y(e)-m_{y_1}(e)\right|\geq b+d+f-1$。$\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|=a+c+e-1$。$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq (a+c+d)^2+(a+2c)^2$。

若 $a\geq 3$ 或 $c\geq 2$ 或 $d\geq 3$，$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2>40$。

若 $a\leq 2,c\leq 1,d\leq 3$，不成立，因为 $m\geq 12$。

情形 3　$a+d-1\geq b+c$。

情形 3.1　$a+d-1\geq b+c$。

先考虑 $zz_1\in P(d)$，$\left|m_z(e)-m_{z_1}(e)\right|\geq e-1+f-1=c+d-1$。同样的，对于 $zz_2\in P(f)$，有 $\left|m_z(e)-m_{z_2}(e)\right|=c+d-1$。

因为 $d\geq 2$，否则 G 就不说简单图，所以 $c+d\geq 3$。

若 $c+d\geq 6$，则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 5^2>40$。

若 $c+d=5$，有 $\left|m_z(e)-m_{z_1}(e)\right|=\left|m_z(e)-m_{z_2}(e)\right|\geq 4$，然后考虑边 $ww'\in P(e)$。

若 $c=1,d=4$，有 $\left|m_w(e)-m_{w'}(e)\right|\geq 5$，则

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 4^2+5^2>40.$$

若 $c=2,d=3$，有 $\left|m_w(e)-m_{w'}(e)\right|\geq 5$，则

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 4^2+5^2>40.$$

若 $c=3,d=2$，有 $\left|m_w(e)-m_{w'}(e)\right|\geq 5$，则

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 4^2+5^2>40.$$

若 $c+d=4$，有 $\left|m_z(e)-m_{z_1}(e)\right|=\left|m_z(e)-m_{z_2}(e)\right|\geq 3$，则考虑边 $ww',yy'\in P(e)$.

若 $c=1,d=3$，有 $\left|m_w(e)-m_{w'}(e)\right|\geq 4$，$\left|m_y(e)-m_{y'}(e)\right|\geq 4$ 则

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 3^2+2\times 4^2>40.$$

若 $c=2,d=2$，有 $\left|m_w(e)-m_{w'}(e)\right|\geq 4$，$\left|m_y(e)-m_{y'}(e)\right|\geq 5$ 则

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 3^2+4^2+5^2>40.$$

若 $c+d=3$，即 $c=1,d=2$ 有 $\left|m_z(e)-m_{z_1}(e)\right|=\left|m_z(e)-m_{z_2}(e)\right|\geq 2$，则考虑边 $ww',yy'\in P(e)$。有 $\left|m_w(e)-m_{w'}(e)\right|\geq 5$，$\left|m_y(e)-m_{y'}(e)\right|\geq 5$，于是

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\geq 2\times 2^2+2\times 5^2>40.$$

情形 3.2　$a+d\leq b+c$。

先考虑边 $ww_1\in P(e)$，有

$$\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|=\begin{cases}a+d+f,\ c\leq a+b+d,\\ c+f,\ c\geq a+b+d.\end{cases}$$

于是，$\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right| \ge a+d+f=a+2d \ge 5$。

若 $a+2d \ge 7$，则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge 7^2 > 40$。

若 $a+2d=6$，即 $a=2,d=2$。然后考虑边 $yy'\in P(e)$。有 $\left|m_y(e)-m_{y'}(e)\right| \ge 4$，则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge 6^2+4^2 > 40$。

若 $a+2d=5$，即 $a=1,d=2$。然后考虑边 $yy'\in P(e)$。有 $\left|m_y(e)-m_{y'}(e)\right| \ge 4$，则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge 5^2+4^2 > 40$。

情形 4 $d=f,e=c$。

先设 $a\le b$。

情形 4.1 $c=e>d=f\ge 2$。

先考虑 $ww_1\in P(e)$，$\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right| \ge f+c-1$。同样的，对于 $ww_2\in P(c)$

有 $\left|m_w(e)-m_{w_2}(e)\right| = f+c-1$。

由 $c\ge 3$ 且 $f\ge 2$，有 $c+f\ge 5$。若 $c+f\ge 6$，有 $\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right| = \left|m_w(e)-m_{w_2}(e)\right| \ge 5$，则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge 2\times 5^2 > 40$.

若 $c+f=5$，即 $c=3,f=2$。有 $\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right| = \left|m_w(e)-m_{w_2}(e)\right| = 4$。

若 $b>a$，则考虑边 $xx_1\in P(d),xx_2\in P(f)$，$\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right| = \left|m_x(e)-m_{x_2}(e)\right| \ge 3$。则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge 2\times 4^2+2\times 3^2 > 40$.

若 $b=a$，则考虑路 $P(d)$ 和 $P(f)$ 上的四条边，$\left|m_x(e)-m_{x_i}(e)\right| = \left|m_z(e)-m_{x_i}(e)\right| = 2\ (1\le i\le 2)$。则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge 2\times 4^2+4\times 2^2 > 40$.

情形 4.2 $c=e=d=f\ge 3$。

先考虑 $ww_1\in P(e)$，$ww_2\in P(c)$，$xx_1\in P(d)$，$xx_2\in P(f)$ 这四条边。

$\left|m_w(e)-m_{w_i}(e)\right| = \left|m_x(e)-m_{x_i}(e)\right| \ge f-1+c-1 = 2(c-1) \ge 4\ (1\le i\le 2)$，

则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge 4\times 4^2 > 40$.

情形 4.3 $c=e=d=f=2$。

若 $b\ge a+3$，考虑 $ww_1\in P(e)$，$ww_2\in P(c)$，$xx_1\in P(d)$，$xx_2\in P(f)$ 这四条边。$\left|m_w(e)-m_{w_i}(e)\right| = \left|m_x(e)-m_{x_i}(e)\right| \ge f+c-1 = 3\ (1\le i\le 2)$。然后考虑 $P(b)$ 上的两条边 yy_1,zz_1，有 $\left|m_w(e)-m_{w_i}(e)\right| = \left|m_x(e)-m_{x_i}(e)\right| \ge f+c-1 = 3\ (1\le i\le 2)$。

则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 \ge 4\times 3^2+2\times 2^2 > 40$。

若 $b=a+2$，则 m 是偶数，我们只需证明 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 > 32$。先考虑 $ww_1\in P(e)$，$ww_2\in P(c)$，$xx_1\in P(d)$，$xx_2\in P(f)$ 这四条边。$\left|m_w(e)-m_{w_i}(e)\right| = \left|m_x(e)-m_{x_i}(e)\right| \ge f+c-1 = 3\ (1\le i\le 2)$。则 $\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2 > 32$。

若 $b=a+1$，则我们得到的图是 m 是奇数时的 F_m。如果 $b=a$，则我们得到的图是 m 是偶数时的 F_m

联立等式(1)，证毕。

引理 2.7 若 G_m 是 $m \ge 37$ 条边的 Θ_4 图(见图 2)，则有，

$$Sz_e^*(G_m) < Sz_e^*(F_m).$$

证明 不失一般性，假设 $a = \max\{a,b,c,d,e,f\}$。因为 $m \ge 37$，所以 $a \ge 7$.考虑边 $ww_1 \in P(a)$。由 a 的选择可知 $d(z,w) \le d(z,w_1)$，所以 $z \in N_w(ww_1)$ 或 $z \in N_0(ww_1)$。当且仅当 $a = c \le b+d$ 且 $e=1$ 时 $z \in N_0(ww_1)$。对于 y 我们可以得到同样的结果.。下面，令 C 是包含 ww_1 的最短圈。当 $a > \frac{|C|+1}{2}$ 时，$x \in N_w(ww_1)$；当 $a = \frac{|C|+1}{2}$ 时，$x \in N_0(ww_1)$；当 $a < \frac{|C|+1}{2}$ 时，$x \in N_{w_1}(ww_1)$。

情形 1 $a > \frac{|C|+1}{2}$。

因为 $x \in N_w(ww_1)$，可以得到 $y,z \in N_w(ww_1)$。则有 $|m_w(e) - m_{w_1}(e)| = m - |C|$。同样的，对于 $xx_1 \in P(a)$，有 $|m_x(e) - m_{x_1}(e)| = m - |C|$。

若 $m - |C| \ge 5$，有 $\sum_{e=uv\in E(G)} (m_u(e) - m_v(e))^2 \ge 2\times 5^2 > 40$。

若 $m - |C| = 4$，且 C 是由 $P(a)$，$P(f)$ 和 $P(b)$ 组成，$e+c+d=4, f+b \le 3$。由 $m \ge 37$，有 $a \ge 30$。下面考虑 $P(a)$ 上的四条边 $e_i (1 \le i \le 4)$ 使得 e_i 到 x 或 w 的距离不超过 1，则有 $|m_u(e_i) - m_v(e_i)| = 4$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)} (m_u(e) - m_v(e))^2 \ge 4\times 4^2 > 40.$$

若 $m - |C| = 4$，且 C 是由 $P(a)$，$P(f)$，$P(d)$ 和 $P(c)$ 组成，若 $b \ge 3$，则 $P(a)\cup P(c)\cup P(e)$ 是包含边 ww_1 的最短圈，矛盾。因此 $b=2$，这种情况和 C 由 $P(a)$，$P(f)$，$P(b)$ 组成的证明是一样的。

若 $m - |C| = 3$，且 C 是由 $P(a)$，$P(f)$，和 $P(b)$ 组成，$e+c+d=3, f+b=2$。由 $m \ge 37$，有 $a \ge 32$。下面考虑 $P(a)$ 上的六条边 $e_i (1 \le i \le 6)$ 使得 e_i 到 x 或 w 的距离不超过 2，则有 $|m_u(e_i) - m_v(e_i)| = 3$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)} (m_u(e) - m_v(e))^2 \ge 6\times 3^2 > 40.$$

若 $m - |C| = 3$，且 C 是由 $P(a)$，$P(f)$，$P(d)$ 和 $P(c)$ 组成，若 $b=2, e=1$，则 $P(a)\cup P(c)\cup P(e)$ 是包含边 ww_1 的最短圈，若 $b=1, e=2$，则圈 $P(a)\cup P(b)\cup P(f)$ 比圈 $P(a)\cup P(f)\cup P(d)\cup P(c)$ 的长度更短，矛盾。

若 $m - |C| = 2$，不成立。

情形 2 $a = \frac{|C|+1}{2}$。

情形 2.1 C 由 $P(a)$，$P(f)$，$P(d)$ 和 $P(c)$ 组成。

在这种情况下 $y,z \in N_w(ww_1)$ 且 $b \ge d+c$。令 u 是 $P(e)$ 上最远的点使得 $u \in N_w(ww_1)$，u' 是 u 的邻点但是它不在集合 $N_w(ww_1)$ 中，如果圈 $P(a)\cup P(c)\cup P(e)$ 是偶圈，则有 $d(u,z)+c = d(u',x)+a-1$，即 $d(u,z) = d(u',x)+a-c-1$。如果圈 $P(a)\cup P(c)\cup P(e)$ 是奇圈，则有 $d(u,z)+1+c = d(u',x)+a-1$，即 $d(u,z)+1 = d(u',x)+a-c-1$。所以 $|m_w(e) - m_{w_1}(e)| = d(u,z)+b \ge d(u',x)+a-c-1+b \ge a \ge 7$。所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)} (m_u(e) - m_v(e))^2 \ge 7^2 > 40.$$

情形 2.2 C 由 $P(a)$，$P(f)$ 和 $P(b)$ 组成。

在这种情况下 $y\in N_w(ww_1)$ 且 $b\le d+c$。

若 $z\in N_0(ww_1)$，则有 $a=c\le b+d$ 且 $e=1$。因为 $xz\in M_0(ww_1)$，所以 $\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|\ge c\ge 7$，因此

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 7^2>40.$$

若 $z\in N_w(ww_1)$，与 Subcase 2.1 相类似的，令 u 是 $P(e)$ 上最远的点使得 $u\in N_w(ww_1)$，u' 是 u 的邻点但是它不在集合 $N_w(ww_1)$ 中，则有

$$d(u,z)\ge\begin{cases}a-c-1, & c\le b+d,\\ a-(b+d)-1, & c\ge b+d.\end{cases}$$

于是有 $\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|\ge d+c+a-1\ge a\ge 7$，因此

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 7^2>40.$$

情形 3 $a<\dfrac{|C|+1}{2}$。

情形 3.1 $y,z\in N_0(ww_1)$。

在这种情况下，$a=b=c,e=f=1$，则 $\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|=c-e\ge a-1\ge 6$。然后考虑边 $xx'\in P(a)$，则 $y\in N_x(xx'),z\in N_x(xx'),w\in N_{x'}(xx')$，在圈 C 上只有一条边在集合 $M_{x'}(xx')$ 中，其它边都在集合 $M_x(xx')$ 中，所以 $\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|=c-1-1+e\ge 6$，因此

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 6^2+6^2>40.$$

情形 3.2 y,z 其中有一个在集合 $N_w(ww_1)$ 中。

在这种情况下，我们可以得到

$$\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|\ge\begin{cases}a+d-1, & b\le c+d,\\ a-c-1+b, & b\ge c+d.\end{cases}$$

则有 $\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|\ge a+d-1\ge a\ge 7$。因此

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 7^2>40.$$

情形 3.3 y,z 其中有一个在集合 $N_0(ww_1)$ 中。

首先假设 $z\in N_0(ww_1)$，则 $a=c\le b+d,e=1$。

若 $z\notin V(C)$，$C=P(a)\cup P(f)\cup P(b)$。则有 $\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|\ge a-1\ge 6$，$\left|m_x(e)-m_{x_1}(e)\right|\ge a-1\ge 6$，因此

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u(e)-m_v(e)\right)^2\ge 6^2+6^2>40.$$

若 $z\in V(C)$，$C=P(a)\cup P(e)\cup P(c)$。否则 $C=P(a)\cup P(f)\cup P(d)\cup P(c)$，因为 $z\in N_0(ww_1)$，所以 $y\in N_{w_1}(ww_1)$，矛盾。令 u 是 $P(f)$ 上最远的点使得 $u\in N_w(ww_1)$，u' 是 u 的邻点但是它不在集合 $N_w(ww_1)$ 中，如果圈 $P(a)\cup P(f)\cup P(b)$ 是偶圈，则有 $d(u,y)+b=d(u',x)+a-1$，即 $d(u,y)-d(u',x)+a-b-1$。如果圈 $P(a)\cup P(f)\cup P(b)$ 是奇圈，则有 $d(u,y)+1+b=d(u',x)+a-1$，即 $d(u,y)+1-d(u',x)=a-b-1$。

$\left|m_w(e)-m_{w_1}(e)\right|\ge b+a-b-1\ge a-1\ge 6$。然后考虑 $P(a)$ 上的边 xx'。在这种情况下我们可以得到 $w\in N_{x'}(xx'),z\in N_x(xx')$。如果 $y\in N_x(xx')$，则有 $\left|m_x(e)-m_{x'}(e)\right|\ge a-f-1+f+d\ge a\ge 7$。所以

$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u\left(e\right)-m_v\left(e\right)\right)^2 \geq 6^2+7^2>40$。如果 $y\in N_0\left(xx'\right)$，即 $f=a,b=1$。则有 $\left|m_x\left(e\right)-m_{x'}\left(e\right)\right|\geq a-1\geq 6$，所以

$$\sum_{e=uv\in E(G)}\left(m_u\left(e\right)-m_v\left(e\right)\right)^2 \geq 6^2+6^2>40.$$

联立等式(1)，证毕。

从引理 2.1，2.2，2.4，2.5，2.6，2.7，我们证明了定理 1.1。

注： 事实上，当 $m\geq 25$ 时，定理 1.1 也可以被证明，不过这需要更多的一些细节。

基金项目

国家自然科学基金(No. 11961040)；甘肃省教育厅基金(No. 2019A-037)。

参考文献

[1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2008) Graph Theory, GTM 244. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5

[2] Gutman, I., Klavzar, S. and Mohar, B. (1997) Fifty Years of the Wiener Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **35**, 1-259.

[3] Gutman, I., Yeh, Y.N., Lee, S.L. and Luo, Y.L. (1993) Some Recent Results in the Theory of the Wiener Number. *Indian Journal of Chemistry*, **32A**, 651-661.

[4] Wiener, H. (1947) Structural Determination of Paraffin Boiling Points. *Journal of the American Chemical Society*, **69**, 17-20. https://doi.org/10.1021/ja01193a005

[5] Gutman, I. (1994) A Formula for the Wiener Number of Trees and Its Extension to Graphs Containing Cycles. *Graph Theory Notes of New York*, **27**, 9-15.

[6] Randic, M. (2002) On Generalization of Wiener Index for Cyclic Structures. *Acta Chimica Slovenica*, **49**, 483-496. https://doi.org/10.1201/b14725-23

[7] Chen, L., Li, X. and Liu, M. (2014) Tricyclic Graphs with Maximal Revised Szeged Index. *Discrete Applied Mathematics*, **177**, 71-79. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.05.034

[8] Li, X. and Liu, M. (2013) Bicyclic Graphs with Maximal Revised Szeged Index. *Discrete Applied Mathematics*, **161**, 2527-2531. https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.04.002

[9] Pisanski, T. and Randic, M. (2010) Use of the Szeged Index and the Revised Szeged Index for Measuring Network Bipartivity. *Discrete Applied Mathematics*, **158**, 1936-1944. https://doi.org/10.1016/j.dam.2010.08.004

[10] Pisanski, T. and Zerovnik, J. (2009) Edge-Contributions of Some Topological Indices and Arboreality of Molecular Graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, **2**, 49-58. https://doi.org/10.26493/1855-3974.68.51b

[11] Simic, S., Gutman, I. and Baltic, V. (2000) Some Graphs with Extremal Szeged Index. *Mathematica Slovaca*, **50**, 1-15.

[12] Xing, R. and Zhou, B. (2011) On the Revised Szeged Index. *Discrete Applied Mathematics*, **159**, 69-78. https://doi.org/10.1016/j.dam.2010.09.010

[13] Gutman, I. and Ashrafifi, A.R. (2008) The Edge Version of the Szeged Index. *Croatica Chemica Acta*, **81**, 263-266.

[14] Dong, H., Zhou, B. and Trinajstic, C. (2011) A Novel Version of the Edge-Szeged Index. *Croatica Chemica Acta*, **84**, 543-545. https://doi.org/10.5562/cca1889

[15] Cai, X. and Zhou, B. (2010) Edge Szeged Index of Unicyclic Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **63**, 133-144.

[16] Khalifeh, M.H., Yousefifi-Azari, H., Ashrafifi, A.R. and Gutman, I. (2008) The Edge Szeged Index of Product Graphs. *Croatica Chemica Acta*, **81**, 277-281.

[17] Vukicevic, D. (2009) Note on the Graphs with the Greatest Edge-Szeged Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **61**, 673-681.

[18] Liu, M. and Chen, L. (2016) Bicyclic Graphs with Maximal Edge Revised Szeged Index. *Discrete Applied Mathematics*, **215**, 225-230. https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.07.005