

# 关于三次代数曲面光滑拼接问题研究

许燕达, 贾为兴, 崔利宏

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

Email: 813721544@qq.com

收稿日期: 2020年10月7日; 录用日期: 2020年10月21日; 发布日期: 2020年10月28日

---

## 摘要

代数曲面拼接一直是计算机辅助几何设计(CAGD)中的热点话题。本文以现有的代数曲面拼接和Lagrange插值问题的研究成果为理论基础,对三次代数曲面的光滑拼接问题进行了研究。用Lagrange法定义在球面上的二次拼接点组的多项式的分解方法,得出了一组满足沿球面二次代数曲面的三次拼接多项式,并给出了具体的实验算例。

## 关键词

曲面拼接, Lagrange插值, 三次代数曲面, 拼接点组

---

# Research on Smooth Joining of Cubic Algebraic Surfaces

Yanda Xu, Weixing Jia, Lihong Cui

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Email: 813721544@qq.com

Received: Oct. 7<sup>th</sup>, 2020; accepted: Oct. 21<sup>st</sup>, 2020; published: Oct. 28<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

Algebraic surface stitching has always been a hot topic in computer aided geometric design (CAGD). Based on the existing research results of algebraic surface stitching and Lagrange interpolation, this paper studies the smooth splicing of cubic algebraic surfaces. In this paper, the decomposition method of the polynomial of the set of quadratic joining points on the sphere is defined by Lagrange method, and a set of cubic splicing polynomials satisfying the quadratic algebraic surface along the spherical surface are obtained, and a concrete experimental example is given.

## Keywords

Surface Joining, Lagrange Interpolation, Cubic Algebraic Surfaces, Splicing Point Group

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

曲面的拼接是通过构造出过渡面使得两个或多个曲面拼接起来的技术,使得拼接后的曲面满足功能与外观需求。此技术被广泛应用于航天业、船舶业、汽车业等工业设计中。在计算机辅助几何设计(CAGD)中,拼接曲线的选择和拼接曲面的求解一直是热点话题。本文将计算数学领域中的插值问题[1]和曲面拼接问题[2]结合起来,提出了关于三次代数曲面光滑拼接的新方法。其中,文献[3][4][5]介绍了多元多项式的Lagrange插值问题和关于适定结点组的内容,文献[6][7]中介绍了曲面光滑拼接的理论及算法。

## 2. 基本定义、注记和定理

定义1: 在三维空间中,若点 $P(x, y, z)$ 的全体满足 $n$ 次代数方程 $f(x, y, z) = 0$ ,则点 $P(x, y, z)$ 的集合称为 $n$ 次代数曲面。

定义2 [7]: 令 $S(f)$ 表示由 $f(x, y, z) = 0$ 所确定的代数曲面, $C = s(q, g)$ 表示由曲面 $q(x, y, z) = 0$ 与 $g(x, y, z) = 0$ 所确定的代数曲线。设 $q(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$ 为不同的不可约多项式,曲面 $S(q)$ ,  $S(g)$ 横截于一条不可约代数曲线 $C = s(q, g)$ ,则称代数曲面 $S(q)$ ,  $S(g)$ 沿着公共边界 $C = s(q, g)$ 的拼接。

定义3 [6]: 设 $n$ 为 $s(q, g)$ 非负整数,令 $P_n^{(3)}$ 是表示所有的三元 $n$ 次代数多项式构成的集合,且

$$P_n^{(3)} = \left\{ \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk} x^i y^j z^k \mid a_{ijk} \in R \right\}$$

$$\text{而且有 } \dim P_n^{(3)} = \binom{n+3}{3}.$$

定义4 [6]: 设 $S(q)$ 为一个二次代数曲面,定义 $d_n$ 如下:

$$d_n(2) = \begin{cases} \frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1), n < 2 \\ (n+1)^2, n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

令 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 是不可约代数曲线 $C = s(q, g)$ 上的 $d_n(2)$ 个互异的点,本文中 $n = 3$ ,因此 $d_3(2) = 16$ 给定任意一组实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ ,并且能够找到关于该实数组的一个多项式 $g(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ ,使得所求 $g(x, y, z)$ 满足下述条件:

$$g(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, d_n(2) \quad (2)$$

若任意给定一组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ , (2)式总有一组解,那么称该结点组 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ 是沿着二次代数曲线 $S(q, g)$ 的 $n$ 次光滑拼接点组,多项式 $g(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ 是沿着 $C = s(q, g)$ 的拼接多项式,并简记为 $A \in I_n^{(3)}(c)$  (代表所有位于 $C = s(q, g)$ 上的 $n$ 次拼接点组的集合)。

定理 1 [6]: 设  $d_n(2)$  为(1)式所定义, 那么位于  $k$  次代数曲线  $C = s(q, g)$  上的点组  $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$  能够做成沿  $c(q, g)$  的  $n$  次拼接结点组的充要条件是对任意零插值条件

$$g(Q_i) = 0, i = 1, \dots, d_n(2)$$

的多项式  $g(X) \in P_n^{(3)}$ , 均有下述等式成立:

$$g(x, y, z) = c(x, y, z)r(x, y, z)$$

其中当  $n \geq k$  时,  $r(x, y, z) \in P_{n-k}^3$ 。

注记 1 [6]: 定义 3 中条件: “如果对于每一个任意给定的实数组  $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(2)}$ , 方程组(2)总存在一组解[即总有满足插值条件  $g(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, d_n(2)$  的插值多项式  $g(x, y, z) \in P_n^{(3)}$  存在]” 可由条件: “如果关系式  $g(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ ,  $g(Q_i) = 0, i = 1, \dots, d_n(2)$  成立, 蕴含沿曲面  $q(x, y, z) = 0$  恒有  $g(x, y, z) \equiv 0$ ” 来取代。

### 3. 实验算例

$$\text{给定 } h(x, y, z): \begin{cases} x = 25 \sec \varphi \cos \theta \\ y = 25 \sec \varphi \sin \theta \\ z = 25 \tan \varphi \end{cases} \quad \left( 0 \leq \theta < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$q(x, y, z): \begin{cases} x = 25 \sin \alpha \cos \beta \\ y = 25 \sin \alpha \sin \beta \\ z = 25 \cos \beta \end{cases} \quad (0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta \leq 2\pi)$$

其中  $q(x, y, z) = 0$  和  $h(x, y, z) = 0$  相交于不可约的二次代数曲线  $c(x, y, z): x^2 + y^2 - 25^2 = 0$ 。

设被插值函数为  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{25^2} + \frac{z^2}{10^2} - 1$ , 接着在  $c(x, y, z)$  上任意取 16 个互不相同的点如下:

$$\begin{aligned} & Q_1(7, 24, 0), Q_2(-7, 24, 0), Q_3(7, -24, 0), Q_4(-7, -24, 0), \\ & Q_5(24, 7, 0), Q_6(-24, 7, 0), Q_7(-24, -7, 0), Q_8(24, -7, 0), \\ & Q_9(15, 20, 0), Q_{10}(-15, 20, 0), Q_{11}(-15, -20, 0), Q_{12}(15, -20, 0), \\ & Q_{13}(20, 15, 0), Q_{14}(20, -15, 0), Q_{15}(-20, 15, 0), Q_{16}(-20, -15, 0) \end{aligned}$$

再由定义, 我们设在这组实数点组上的三次插值多项式为:

$$\begin{aligned} g(x, y, z) = & a_1x^3 + a_2y^3 + a_3z^3 + a_4x^2y + a_5x^2z + a_6y^2x + a_7y^2z + a_8z^2x + a_9z^2y + a_{10}xyz \\ & + a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{13}z^2 + a_{14}xy + a_{15}xz + a_{16}yz + a_{17}x + a_{18}y + a_{19}z + a_{20} \end{aligned}$$

将插值条件代入  $g(Q_i) = f_i, (i = 1, 2, \dots, 16)$ , 我们得到  $g(Q_i) = f(Q_i) = 0$  其中的一组解为:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = a_{18} = a_{20} = 0 \\ a_5 = a_7 = 1, \quad a_{19} = -25^2 \end{aligned}$$

因此得到

$$g(x, y, z) = x^2z + y^2z - 25^2z$$

再根据定理 1, 有

$$g(x, y, z) = x^2z + y^2z - 25^2z = (x^2 + y^2 - 25^2)z = c(x, y, z)r(x, y, z)$$

其中当  $n \geq k$  时,  $r(x, y, z) \in P_{n-k}^3 = P_{3-2}^3 = P_1^3 = z$ 。

所以由定理 1 可知,  $g(x, y, z)$  是  $c(x, y, z)$  的拼接点组。拼接效果图如图 1 所示:

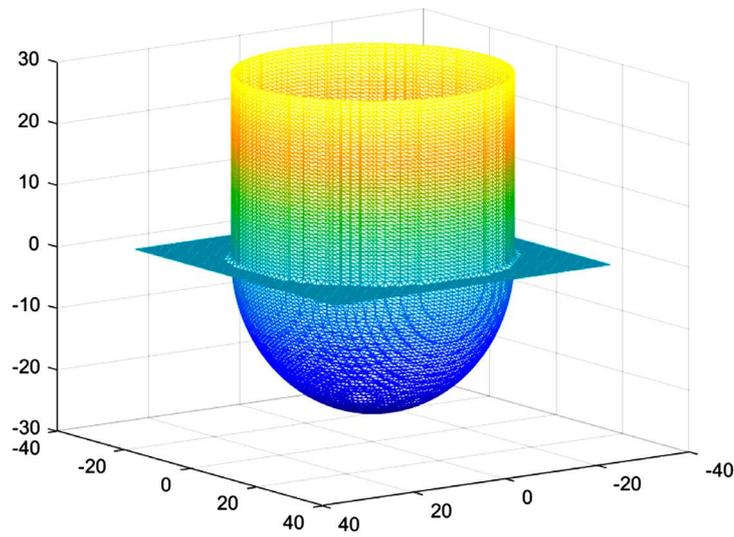


Figure 1. Splicing effect diagram  
图 1. 拼接效果图

此时  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{25^2} - \frac{z^2}{10^2} - 1$  在  $Q_{17}(25, 0, 0)$ ,  $Q_{18}(0, 25, 0)$  两点处的结果为  $f(Q_{17}) = f(Q_{18}) = 0$ ,

而  $g(x, y, z)$  在上述两点的值  $g(Q_{17}) = g(Q_{18}) = 0$  这也验证了如果关系  $g(X) \in P_2^{(3)}$ ,  $g(Q_i) = 0, i = 1, \dots, d_n(2)$  成立, 蕴含了曲线  $c(x, y, z) = 0$  恒有  $g(X) \equiv 0$ 。

### 参考文献

- [1] 梁学章, 李强. 多元逼近[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 21-28.
- [2] 周蕴时, 苏志勋, 奚涌江, 等. CAGD中的曲线与曲面[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1993.
- [3] 梁学章, 二元插值的适定结点组与迭加插值法[J]. 吉林大学自然科学学报, 1979(1): 123-124.
- [4] 崔利宏, 刘海波, 惠婷婷. 定义于单叶双曲面上的 Lagrange 插值问题研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2017(3): 297-300.
- [5] 崔利宏, 孟敏, 李笑笑, 高小淞. 二次曲面上 Lagrange 插值节点组构造问题研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2015(6): 17-25.
- [6] 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与多元 Kergin 插值[M]. 大连: 辽宁师范大学出版社, 2018(4), 36-39.
- [7] 张焕玲. 隐式曲面的一种光滑拼接定义[J]. 山东大学学报, 2002(5): 444-446.