Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(11), 1887-1892
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.911217

正交及等距反射向量在l_p空间的应用

吴思远*，计东海

哈尔滨理工大学理学院，黑龙江 哈尔滨
Email: *2330475414@qq.com

收稿日期：2020年10月16日；录用日期：2020年11月5日；发布日期：2020年11月12日

摘　要

在本文中，我们首先考虑有限维赋范线性空间中的正交基在l_p空间与Birkhoff正交的相关联系，其次考虑等距反射向量和L_2被加项向量在具体的l_p空间中的联系以及当扩展到Hilbert空间中的一些性质变化。

关键词

Birkhoff正交，等腰正交的超平面，Roberts正交，正交基，线性赋范空间

Application of Orthogonal and Isometric Reflection Vectors in l_p Space

Siyuan Wu*, Donghai Ji

School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang
Email: *2330475414@qq.com

Received: Oct. 16th, 2020; accepted: Nov. 5th, 2020; published: Nov. 12th, 2020

Abstract

In this paper, we first consider the relationship between the orthogonal basis in the finite-dimensional normed linear space and the Birkhoff orthogonality in the l_p space, and then consider the relationship between the isometric reflection vector and L_2-summand vectors in the specific l_p space and some property changes when it is extended to Hilbert space.

*通讯作者。

文章引用: 吴思远, 计东海. 正交及等距反射向量在 l_p 空间的应用[J]. 应用数学进展, 2020, 9(11): 1887-1892.
DOI: 10.12677/aam.2020.911217

Keywords

Birkhoff Orthogonality, Isosceles Orthogonal Hyperplane, Roberts Orthogonality, Orthonormal Basis, Normed Linear Space

1. B_i 正交在 l_p 空间的应用

在本文中，我们将关注 Birkhoff 正交。假设 X 为赋范线性空间且 $x, y \in X$。若对于任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$，都有 $\|x+\alpha y\| \ge \|x\|$，那么就称作 x Birkhoff 正交于 y，记为 $x \perp_B y$。M 和 N 是 X 的两个子空间，若对于任意的 $x \in M$ 且 $y \in N$，都有 $x \perp_B y$，则称 M Birkhoff 正交于 N，记为 $M \perp_B N$。特别地，$\langle\{x\}\rangle \perp_B N$ 和 $M \perp_B \langle\{y\}\rangle$ 被分别简记为 $x \perp_B N$ 和 $M \perp_B y$。又 Birkhoff 正交总是齐次的，即 $x \perp_B y$ 意味着对于任意的实数 α 和 β 都有 $\alpha x \perp_B \beta y$。然而，Birkhoff 正交通常不是对称的，即 $x \perp_B y$ 并不意味着 $y \perp_B x$。一个维数大于或等于 3 的实赋范线性空间为内积空间当且仅当 Birkhoff 正交是对称的[1] [2]。更多有关 Birkhoff 正交的细节可见[1]-[6]。

若满足 $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\| \le \|\cdot\|_\infty$，则称 $\mathbb{R}^n$ 上的一个范数 $\|\cdot\|$ 是标准的。记 NN_n 为 $\mathbb{R}^n$ 上所有标准范数的全体。在以往的文献[7]中，已表明每个 n 维赋范线性空间都是与拥有标准范数的 $\mathbb{R}^n$ 空间是等度同构的。若 $n=2$，结果可参考文献[8]。它在本质上基于文献[4]中的以下结论：

对于每个有一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \subset S_X$ 的 n 维赋范线性空间 X，对于所有的 $k = 1, 2, \cdots, n$，有

$$(B_1)\, e_k \perp_B M_k, \quad M_k = \langle\{e_1, \cdots, e_{k-1}, e_{k+1}, \cdots, e_n\}\rangle$$

然而，如前所述，$e_k \perp_B M_k$ 与 $M_k \perp_B e_k$ 并不等价。因此，考虑满足以下条件的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \subset S_X$：对于所有的 $k = 1, 2, \cdots, n$，有

$$(B_2)\, M_k \perp_B e_k, \quad M_k = \langle\{e_1, \cdots, e_{k-1}, e_{k+1}, \cdots, e_n\}\rangle$$

当满足条件 $(B_i)(i=1,2)$ 时，我们称 n 维赋范线性空间的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 B_i 正交的，当其满足 B_i 正交且标准，即 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \subset S_X$ 时，称其为 B_i 标准正交的。

假设 1.1 设 X 是 n 维赋范线性空间且 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 X 的一组标准基。那么，就有以下等价关系：

(i) $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 B_1 标准正交的；

(ii) 不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \ge \max_{1 \le i \le n} |a_i|$$

对所有 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 都成立。

证明仅考虑对于每一个 $k = 1, 2, \cdots, n$，$e_k \perp_B \left[\{e_i\}_{i \ne k}\right]$ 当且仅当

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| = \left\|a_k e_k + \sum_{i \ne k} a_i e_i\right\| \ge |a_k|$$

对于所有 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 都成立。显然，(i)和(ii)等价。

假设 1.2 设 X 是一个 n 维赋范线性空间且 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 的一组标准基。那么，就有以下等价关系：

(i) $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 B_1 标准正交的；

(ii) 不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \geq \max_{1\leq k\leq n}\left\|\sum_{i\neq k} a_i e_i\right\|$$

对所有 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ 都成立。

证明设 $i=1,2,\cdots,n$。由于 $\left[\{e_1,\cdots,e_{k-1},e_{k+1},\cdots,e_n\}\right]\perp_B e_k$ 当且仅当

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \geq \left\|\sum_{i\neq k} a_i e_i\right\|$$

对于所有 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ 都成立。于是可得(i)与(ii)等价。

接下来考虑条件 (B_1) 和 (B_2) 之间的关系。下述引理是条件 (B_2) 的重要特性描述。其证明易得，故省略。

引理 1.3 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 n 维赋范线性空间的一组 B_2 正交基，那么

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| = \max\left\{\left\|\sum_{i\in A} a_i e_i\right\| : A\subset\{1,2,\cdots,n\}\right\}$$

对于所有 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ 都成立。

这意味着如果 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 B_2 正交的，X 上的任意自然投影都有范数 1。那么，B_2 标准正交基可被视为一维无条件基的有限维版本。

由前述引理，可以直接得出以下结论。

定理 1.4 令 X 是 n 维实赋范线性空间。假设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 X 的范数基。有以下成立：

(i) 若 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 B_2 正交的，则它也是 B_1 正交的；

(ii) 在 l_p^2 空间，$\{e_1,e_2\}$ 是 B_2 正交，同时也是 B_1 正交的。

但在 l_p^3 空间，B_1 正交则不能推出 B_2 正交，有以下证明：

我们的目的是证在 l_p^3 空间中，B_1 无法推得 B_2。

证明 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准单位向量，赋予 $\mathbb{R}^n$ 上的范数，

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\| = \sqrt[p]{|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p}$$

$i\geq 2$ 时，$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|\geq\|x_i\|$ 显然成立。

对于 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in l_p^3$，因此 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 满足 B_1 正交条件。

然而

$$\|(-1,1,\cdots,1)\| = \sqrt[p]{n} < \sqrt[p]{n-1} = \|(0,1,\cdots,1)\|$$

因此 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 不满足 B_2 正交条件，因此得出结论，在 l_p^3 空间中 B_1 正交无法推出 B_2 正交。

2. 等距反射向量和正交性在空间上的表示

下面，我们讨论等距反射向量和空间之间的联系。

X 上的反射是一个定义如下的运算：

$$T_{x,x^*}: z\to z-2x^*(z)\cdot x,\quad x\in X,\quad x^*\in X^*，并且\ x^*(x)=1。$$

令 x 是 S_X 中的一个点，如果存在着点 $x^* \in S_{X^*}$，使得映射 T_{x,x^*} 是一个等距映射，那么则称 x 是一个等距反射向量，并且 x^* 称为一致等距反射函数。

对于任意的等距反射向量 x，都存在着唯一的 x^* 与之对应[9]。在研究等距反射向量和 Roberts 正交关系中，有以下引理证明：

引理 2.1 假设 X 是一个实 Banach 空间，$x \in S_X$，$x^* \in S_X$，且 T_{x,x^*} 是一个反射。那么，T_{x,x^*} 是一个等距反射当且仅当 $x \perp_R H := \{z : z \in X, x^*(z) = 0\}$ 成立。

引理 2.2 若 $x \in H_X$ 是 S_X 的光滑点，那么 x 是一个等距反射向量，因此，x Roberts 正交于一个超平面。

由引理 2.1 的证明就足以表明 x Roberts 正交于一个超平面。由于 x 是一个光滑点，因而存在一个唯一的超平面 H 使得 $x \perp_B H$。

接下来我们将证明 $x \perp_R H$：

对于任意一个向量 $z \in H \setminus \{o\}$，存在一个单位向量 $z' \in X_{x,z}$，使得

$$x \perp_I z'$$

由 $x \in H_X$ 得出 $x \perp_R z'$，可知

$$x \perp_B z'$$

又因为 x 是一个光滑点，总有

$$z/\|z\| = z' \text{ 或 } z/\|z\| = -z'$$

成立。

因此

$$x \perp_R z$$

$z = 0$ 的情况可以忽略不计。

假设 M 是 X 的一个闭的子空间。若存在 X 的另一个闭子空间 N 使得 $X = M \oplus N$ 且对每一对 $m \in M$ 和 $n \in N$ 的点，都有等式

$$\|m+n\|^2 = \|m\|^2 + \|n\|^2 \tag{1}$$

成立。

那么 M 就被称作是一个 L_2 被加项子空间[10]。需注意到当 M 是一个 L_2 被加项子空间时，N 是唯一且确定的。

设 x 为 X 中的一个点，若由 x 张成的子空间是一个 L_2 被加项子空间，那么 x 就被称为 L_2 被加项向量。

定理 2.3 令 X 为 l_p^2 空间，那么 X 是 Hilbert 空间的充分必要条件是：S_X 中的 H_X 的相对内部非空。

证明反证法如果 X 是一个 Hilbert 空间，因此有等腰正交和 Roberts 正交是一致的，则有

$$H_X = S_X$$

现假设 S_X 上的 H_X 的相对内部记为 Q，它是非空的。通过文献[9]中的定理 2.2，有 Q 中的每一个点 x 都是等距反射向量。

由引理 2.2 可知，我们需让 Q 中的每一个点都是光滑点。

$\forall x \in Q$，假设 x 不是光滑点，存在一个二维子空间 Y，使 x 不是 S_Y 中的光滑点。令 $u \in S_Y$，假设 $x \perp_B u$。

因为 x 是 Q 的相对内部中的点，它也是 $Q \cap S_Y$ 的相对内部的点。因此，存在两个点，w 和 v，

$$arc(w,v)=\{\alpha w+\beta v,\alpha,\beta\geq 0\}\cap S_Y\subset Q$$

不失一般性， $v\in arc\{x,u\}$， $arc\{w,v\}/\{x\}$ 是光滑点。存在 $\lambda_0\geq 0$， $\mu_0\leq 0$，使

$$w\perp_B(\lambda_0x+u)，\ v\perp_B(\mu_0x+u)$$

B_Y 的支撑线与穿过 u 的线相交，并且平行于 $(-x,x)$。

$$\{w_n\}\subset arc(w,x):=\{\alpha w+\beta x,\alpha,\beta>0\}\cap S_Y$$

$$\{v_n\}\subset arc(v,x):=\{\alpha v+\beta x,\alpha,\beta>0\}\cap S_Y$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=x$。

存在 $\{\lambda_n\}$ 和 $\{\mu_n\}$

$$u_n\perp_B(\lambda_nx+u)，\ v_n\perp_B(\mu_nx+u)$$

不失一般性，假设存在两个点 M 和 N，

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=N，\ \lim_{n\to\infty}\mu_n=M$$

因为 S_Y 是一个闭的凸曲线， $N\geq M$，

$$x\perp_B(Nx+u)，\ x\perp_B(Mx+u)$$

因为 x 不是光滑点， $N>M$， 由 Roberts 正交可推出 Birkhoff 正交。

$$w_n\perp_R(\lambda_nx+u)，\ v_n\perp_R(\mu_nx+u)$$

$$w_n\perp_I(\lambda_nx+u)，\ v_n\perp_I(\mu_nx+u)$$

因此

$$x\perp_I(Nx+u)，\ x\perp_I(Mx+u)$$

因为 $x\in H_x$， 有

$$x\perp_I\left(\frac{Nx+u}{\|Nx+u\|}\right)，\ x\perp_I\left(\frac{Mx+u}{\|Mx+u\|}\right)$$

根据等腰正交在单位圆上的唯一性，这是矛盾的，所以可知 x 是光滑点。

3. 结论

本文解决了 Birkhoff 正交在 l_p 空间上与正交基相关联的一些问题，为了进一步刻画，考虑了 B_1 正交和 B_2 正交在有限赋范线性空间上的关系。除此之外，得出了等距反射向量和 L_2 被加项向量从 l_p 空间扩展到 Hilbert 空间上的一些性质变化。

参考文献

[1] Day, M.M. (1947) Some Characterizations of Inner Product Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **62**, 320-337. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1947-0022312-9

[2] James, R.C. (1947) Inner Products in Normed Linear Spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **53**, 559-566. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1947-08831-5

[3] Birkhoff, G. (1935) Orthogonality in Linear Metric Spaces. *Duke Mathematical Journal*, **1**, 169-172. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-35-00115-6

[4] Day, M.M. (1947) Polygons Cricumscribed about Closed Convex Curves. *Transactions of the American Mathematical*

Society, **62**, 315-319. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1947-0022686-9

[5] James, R.C. (1945) Orthogonality in Normed Linear Spaces. *Duke Mathematical Journal*, **12**, 291-302. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-45-01223-3

[6] James, R.C. (1947) Orthogonality and Linear Functionals in Normed Linear Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **61**, 265-292. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1947-0021241-4

[7] Tanaka, R. and Saito, K.S. (2012) Every *n*-Dimensional Normed Space Is the Space $\mathbb{R}^n$ Endowed with a Normal Norm. *Journal of Inequalities and Applications*, **2012**, Article No. 284. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-284

[8] Alonso, J. (2011) Any Two-Dimensional Normed Space Is a Generalized Day-James Space. *Journal of Inequalities and Applications*, **2011**, Article No. 2. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2011-2

[9] Guerrero, J.B. and Palacios, A.R. (2000) Isometric Reflections on Banach Spaces after a Paper of A. Skorik and M. Zaidenberg. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **30**, 63-83. https://doi.org/10.1216/rmjm/1022008976

[10] Aizpuru, A. and Garcia Pacheco, F.J. (2006) L2-Summand Vectors in Banach Spaces. *American Mathematical Society*, **134**, 2109-2115.