

随机分析方法在材料科学中的应用

冯 岩, 宋 珊, 徐常青*

苏州科技大学, 江苏 苏州

Email: 1753080215@qq.com, 2837388358@qq.com, *cqخورichard@usts.edu.cn

收稿日期: 2020年10月25日; 录用日期: 2020年11月11日; 发布日期: 2020年11月18日

摘 要

裂缝宽度是钢筋与混凝土间裂缝两侧滑移的和, 而滑移是关于裂缝间距的函数。本文在随机模型的基础上, 得到裂缝宽度的分布函数和密度函数。

关键词

钢筋砼, 裂缝宽度, 滑移, 裂缝间距

Application of Stochastic Analysis Method in Materials Science

Yan Feng, Shan Song, Changqing Xu*

Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Email: 1753080215@qq.com, 2837388358@qq.com, *cqخورichard@usts.edu.cn

Received: Oct. 25th, 2020; accepted: Nov. 11th, 2020; published: Nov. 18th, 2020

Abstract

The crack width is the sum of the slip on both sides of the crack between the steel bar and the concrete, and the slip is a function of the crack spacing. This paper obtains the distribution function and density function of the crack width on the basis of the random model.

Keywords

Reinforced Concrete, Crack Width, Slip, Crack Spacing

*通讯作者。



1. 引言

二十世纪初,马尔可夫研究了一系列有特定相依性的随机变量,后人称之为马尔可夫链,这标志着随机过程的诞生。随机过程是一连串随机事件动态关系的定量描述,它与其他数学、物理分支如位势论、微分方程、复变函数论、力学等有密切的联系,是在自然科学、工程科学及社会科学各领域研究随机现象的重要工具[1]。例如在桥梁建设工程飞快发展的过程中,经常只追求建设速度而忽视桥梁建设基本规律和质量规定;只重视桥梁的建设施工过程,而忽视后期的管理养护工作。相当数量的在役桥梁出现了带病服役、使用性能差、使用寿命短、耐久性差等问题,造成桥梁维护成本过高。因此,可以运用灰色系统预测模型、马尔科夫预测模型等对桥梁性能进行预测,分析模型的优劣性,并对桥梁维修加固策略进行了优化[2]。另外,还可以对海洋各种环境随机荷载的概率模型及参数估计,在此基础上对一些工程实践常见的荷载组合方法进行比较分析。然后根据海洋环境随机荷载的原始资料进行不相关及相关性荷载的组合分析,研究基于可靠度的海洋工程随机荷载组合及设计方法[3]。本文主要研究钢筋混凝土裂缝间距即裂缝间距的随机分析。

钢筋与混凝土共同协调工作是因其自身材料性质决定的[4]。首先它们的膨胀系数近似相同,且不会因环境变换产生过大的应力。其次钢筋与混凝土间有良好的粘结力,有时钢筋的表面也被加工成有间隔的肋条(称为变形钢筋)来提高混凝土与钢筋之间的机械咬合,当此仍不足以传递钢筋与混凝土之间的拉力时,通常将钢筋的端部弯起 180° 弯钩。此外混凝土中的氢氧化钙提供的碱性环境,在钢筋表面形成了一层钝化保护膜,使钢筋相对于中性与酸性环境下更不易腐蚀。

在裂缝计算理论方面,传统的钢筋混凝土梁裂缝计算理论大致可以归为三类[5]:一类认为裂缝是由于钢筋和混凝土之间不再保持变形协调而出现相对滑动形成的,即“滑移理论”;第二种理论认为在钢筋表面处的裂缝宽度为零,随着逐渐接近构件的表现,裂缝的宽度不断增加,到混凝土表面缝宽达到最大值,即“无滑移理论”,现在英国钢筋混凝土设计规范(CP110)计算裂缝的公式,就是依据这种理论;第三种为把滑移和无滑移结合起来的“一般裂缝理论”,欧洲混凝土委员会(CEB)1970年设计建议的裂缝宽度公式即依据这种理论[6]。除了利用上述理论来判定混凝土开裂状态和计算裂缝数值外,有限元方法在模拟结构开裂情况、计算裂缝间距、深度和宽度方面的研究方兴未艾[7]。此外,线弹性段断裂有限元法对分析钢筋混凝土受弯构件的裂缝失稳扩展有一定的进展[8]。

混凝土在凝结硬化过程中就有微裂缝存在,这是因为混凝土中的水泥石和骨料在温度、湿度变化条件下产生不均匀的体积形变,而它们又粘结在一起不能自由变形,于是形成相互间的约束应力;一旦约束应力大于水泥石和骨料间的粘结强度,以及水泥自身的抗拉强度,就会产生微裂缝[9][10]。

未出现裂缝时,在受弯构件纯弯曲段内,各截面受拉,混凝土的拉应力、拉应变大致相同,当受拉区外边缘的混凝土达到其抗拉强度时,由于混凝土的塑性变形,因此还不会马上开裂;当其拉应变接近混凝土的极限拉应变值时,就处于即将出现裂缝的状态,当受拉区外边缘混凝土在最薄弱的截面处达到其极限拉应变值后,就会出现第一批裂缝,一条或几条裂缝。

混凝土一旦开裂,张紧的混凝土就像剪断了的橡皮筋那样向裂缝两侧回缩,但这种回缩是不自由的,它收到钢筋的约束,直到被阻止,在回缩的那一段长度中,混凝土与钢筋之间有相对滑移,产生粘结应力,通过粘结应力的作用,随着离裂缝截面距离的增大,混凝土拉应力由裂缝处的零逐渐增大,当距离

达到粘结伸长度 l_e 后, 粘结应力消失, 混凝土的应力又趋于均匀分布。

裂缝处, 钢筋的情况与混凝土相反。在裂缝出现的瞬间, 裂缝处的混凝土应力突然降至零, 使得钢筋的拉应力突然增大, 通过粘结应力的作用, 随着离开裂缝截面距离的增大, 钢筋拉应力逐渐降低, 混凝土逐渐张紧达到 l_e 后, 混凝土又处于要开裂的状态。很多研究领域都需要探测裂缝分布, 比如地震预测、油气勘探、二氧化碳封存及矿产开发等。

本文中, 我们定义两条裂缝间距为其中心点间距, 记 w 和 s 分别为裂缝宽度和裂缝间距, $s_l(s_r)$ 为裂缝与其左(右)侧裂缝间距, $v(s)$ 为钢筋与混凝土间的滑移, A_s 和 A_c 分别为钢筋和混凝土横截面积, $E_s(E_c)$ 为钢筋(混凝土)的弹性模量, d_s 为钢筋直径, σ_s 和 σ_c 分别表示钢筋和混凝土的应力, $\tau(r)$ 为 r 处粘结应力, N 为拉力, N_{cr} 为混凝土开裂的临界力, l_e 为粘结延伸长度, f_t 为混凝土抗拉强度。

2. 钢筋混凝土受力的力学分析

粘结滑移理论是由 Saliger [11] 于 1936 年根据钢筋混凝土拉杆试验提出的一种最早的裂缝理论, 直至 60 年代中期这个理论还一直被广泛应用。这一理论认为, 裂缝的展开是由于钢筋与混凝土间不再保持变形协调, 出现相对滑移而产生的, 它假定混凝土开裂后, 开裂截面仍然保持平截面, 构件开裂后横贯截面的裂缝宽度相同, 因此裂缝宽度等于裂缝间距范围内钢筋和混凝土的变形差, 而裂缝的间距取决于钢筋与混凝土间粘结应力的大小与分布, 粘结应力越大, 混凝土拉应力沿构件纵向从零增大到其极限抗拉强度所需的粘结传递长度会越短, 裂缝间距也就越短, 裂缝宽度越小, 此时裂缝“密而多”; 反之, 裂缝“疏而稀”, 裂缝宽度越大。

2.1. 应力与应力平衡状态

考虑一段长度为 l 的构件(见图 1), 在其端头, 混凝土受到向外的拉力, 达到抗拉强度后, 混凝土出现裂缝, 裂缝出现后, 裂缝处混凝土表面应力为零, 在一定距离内, 离裂缝越远处的横截面上的点的应力越大, 假设与裂缝 C_i 的距离为 r , 应力为, 不妨假设

$$\tau(r) = \begin{cases} ar + b, & 0 \leq r \leq l_e \\ M, & r > l_e \end{cases} \quad (1)$$

当距离达到粘结延伸长度 l_e 时, 混凝土的应力分布不再受裂缝影响, 这时混凝土与钢筋间的粘结力为零, 裂缝使其附近 l_e 区段内的混凝土表面应力低于其他区段, 也使混凝土的抗拉强度高于其他区段, 所以下一条裂缝只能出现在 l_e 区段以外, 这样两条裂缝之间的距离大于 $2l_e$ 时, 在它们之间就可能形成一条新的裂缝; 当两条裂缝之间的距离小于 $2l_e$ 时, 在它们之间就不会出现新的裂缝, 那么当所有裂缝出现时, 裂缝的最小间距为 l_e , 最大间距为 $2l_e$ 。

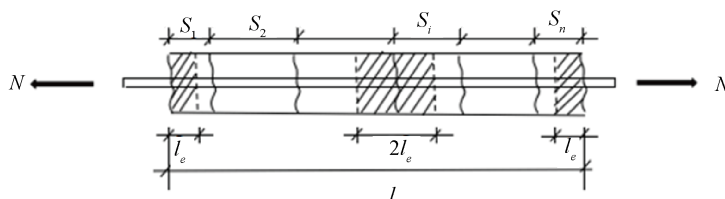


Figure 1. Cracking of reinforced concrete members under tension

图 1. 张力作用下钢筋混凝土构件的开裂

2.2. 钢筋混凝土在产生裂缝时的受力分析

由 Saliger 的粘结滑移理论, 裂缝宽度

$$w = v(s_l) + v(s_r) \tag{2}$$

我们从长度为 l 的拉杆上取出两条相邻裂缝的一段(图 2), 令其长度为 S , 以中点处为原点, 取距原点距离为 r 处的横截面(图 3), 从钢筋和混凝土层面分别考察受力情况。

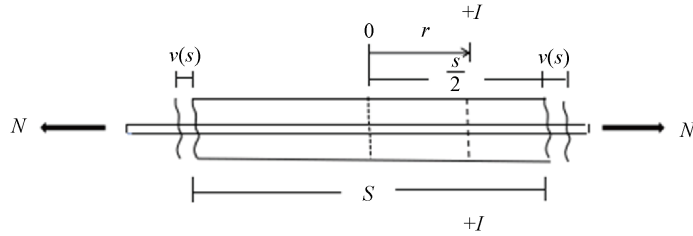


Figure 2. Slippage of the crack
图 2. 裂缝的滑移

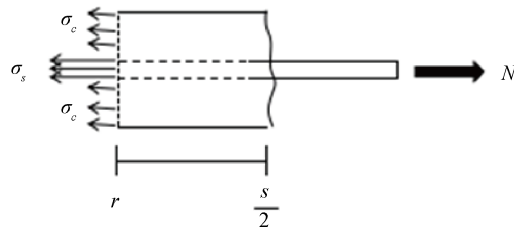


Figure 3. Force analysis of cross section at r
图 3. r 处横截面受力分析

在 r 处, 钢筋的力平衡公式为

$$N = \sigma_s A_s + \int_r^{s/2} \tau(t) \cdot \pi d_s dt$$

混凝土的力平衡公式为

$$\sigma_c A_c - \int_r^{s/2} \tau(t) \cdot \pi d_s dt = 0$$

其中 $\int_r^{s/2} \tau(t) \cdot \pi d_s dt$ 为钢筋与混凝土之间的粘结力(图 4),

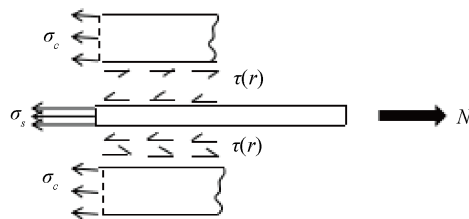


Figure 4. Force analysis between steel bar and concrete
图 4. 钢筋与混凝土之间的受力分析

钢筋受粘结力作用下的应变:

$$\varepsilon_{\tau,s}(r) = \frac{1}{A_s E_s} \int_r^{s/2} \tau(t) \cdot \pi d_s dt$$

混凝土受粘结力作用下的应变:

$$\varepsilon_{\tau,c}(r) = \frac{1}{A_c E_c} \int_r^{s/2} \tau(t) \cdot \pi d_s dt$$

在混凝土的端头(裂缝一侧), 钢筋单独受拉力 N 作用下的变形:

$$v_N = \int_0^{s/2} \frac{N}{A_s E_s} dr = \frac{N \cdot s}{2 A_s E_s}$$

钢筋受粘结力作用下的变形:

$$v_{\tau,s} = \int_0^{s/2} \varepsilon_{\tau,s}(r) dr$$

混凝土受粘结力作用下的变形:

$$v_{\tau,c} = \int_0^{s/2} \varepsilon_{\tau,c}(r) dr$$

因此, 钢筋和混凝土变形的叠加:

$$\begin{aligned} v(s) &= v_N - (v_{\tau,s} + v_{\tau,c}) = \frac{N \cdot s}{2 A_s E_s} - \int_0^{s/2} [\varepsilon_{\tau,s}(r) + \varepsilon_{\tau,c}(r)] dr \\ &= \frac{N \cdot s}{2 A_s E_s} - \left(\frac{1}{A_s E_s} + \frac{1}{A_c E_c} \right) \int_0^{s/2} \int_r^{s/2} \tau(t) \cdot \pi d_s dt dr \end{aligned}$$

由于 $A_s = \pi \left(\frac{d_s}{2} \right)^2$, 故

$$v(s) = c_N s - c_0 \int_0^{s/2} \int_r^{s/2} \tau(t) dt dr \quad (3)$$

其中, $c_N = \frac{N}{2 A_s E_s}$, $c_0 = \frac{4(1+n\mu)}{d_s E_s}$, $n = \frac{E_s}{E_c}$, $\mu = \frac{A_s}{A_c}$ 。

3. 钢筋混凝土裂缝分布的随机过程

本文假设裂缝间距、滑移 v 和裂缝宽度 w 均为随机变量。为得出裂缝的分布, 我们假设:

- ① 构件长度 $l > 2l_e$;
- ② 裂缝在区间 $(l_e, l-l_e)$ 内服从均匀分布;
- ③ 一个裂缝将构件被分成长度分别为 t 和 $l-t$ 的两部分, 可视为两个独立构件;
- ④ 当两条相邻裂缝的间距 s 满足

$$l_e \leq s \leq 2l_e \quad (4)$$

在其之间不再出现新的裂缝。

由于对称性, 我们只需考虑构件左侧裂缝间距 s , 令 $h(\bar{s}), l_e \leq \bar{s} \leq 2l_e$ 为满足条件

$$\int_{l_e}^{2l_e} h(\bar{s}) d\bar{s} < \infty \quad (5)$$

的非负函数, 定义 $H(l), l \geq l_e$ 为 $h(s)$ 的均值, 由假设①知:

$$H(l) = h(l), l_e \leq l \leq 2l_e \quad (6)$$

当 $l > 2l_e$ 时,

$$H(l) = E[h(s)] = \int_{l_e}^{l-l_e} h(s) p(s) ds$$

其中, $p(s)$ 为 s 的密度函数, 由假设②知, $p(s) = \frac{1}{l-2l_e}$, 故

$$H(l) = \frac{1}{l-2l_e} \int_{l_e}^{l-l_e} h(s) ds$$

而

$$\begin{aligned} \int_{l_e}^{l-l_e} h(s) ds &= \int_{l_e}^{2l_e} h(s) ds + \int_{2l_e}^{3l_e} h(s) ds + \cdots + \int_{kl_e}^{kl_e+\varepsilon} h(s) ds \quad (kl_e + \varepsilon = l - l_e) \\ &= \int_{l_e}^{2l_e} h(l) dl + \int_{2l_e}^{3l_e} h(l) dl + \cdots + \int_{kl_e}^{kl_e+\varepsilon} h(l) dl \quad (\text{由假设③独立性可得}) \\ &= \int_{l_e}^{2l_e} H(l) dl + \int_{2l_e}^{3l_e} H(l) dl + \cdots + \int_{kl_e}^{kl_e+\varepsilon} H(l) dl \\ &= \int_{l_e}^{l-l_e} H(l) dl \end{aligned}$$

因此

$$H(l) = \frac{1}{l-2l_e} \int_{l_e}^{l-l_e} H(l) dl, l > 2l_e \quad (7)$$

显然, $H(l), l \geq l_e$ 由积分式(7)和条件(6)一起决定, 但是, 对于一般的 $h(\bar{s})$, 不能给出式(6)和式(7)的解, 因此我们将(7)改写为:

$$\begin{aligned} H(l+\Delta l) &= \frac{1}{l+\Delta l-2l_e} \int_{l_e}^{l+\Delta l-l_e} H(l+\Delta l) dl \\ &= \frac{1}{l+\Delta l-2l_e} \left[\int_{l_e}^{l-l_e} H(l) dl + \int_{l-l_e}^{l+\Delta l-l_e} H(l) dl \right] \\ &= \frac{1}{l+\Delta l-2l_e} \left[(l-2l_e)H(l) + \int_{l-l_e}^{l+\Delta l-l_e} H(l) dl \right] \end{aligned} \quad (8)$$

将积分用梯形法则近似, 得到

$$\int_{l-l_e}^{l+\Delta l-l_e} H(l) dl = \frac{\Delta l}{2} [H(l-l_e) + H(l+\Delta l-l_e)] \quad (9)$$

这样就得到了计算 $H(l), l > 2l_e$ 的简单递推公式:

$$H(l+\Delta l) = \frac{1}{l+\Delta l-2l_e} \left\{ (l-2l_e)H(l) + \frac{\Delta l}{2} [H(l-l_e) + H(l+\Delta l-l_e)] \right\}$$

4. 裂缝分布的密度函数与分布函数

首先确定裂缝间距 s 的密度函数 $f(s, l), l_e \leq s \leq 2l_e$ 。令 $h(\bar{s}) = \delta_s(\bar{s})$ (δ_s 为 Dirac 函数), 则

$$\begin{aligned} H(l) &= E[h(s)] = \int_{l_e}^{2l_e} h(\bar{s}) f(\bar{s}, l) d\bar{s} = \int_{l_e}^{2l_e} \delta_s(\bar{s}) f(\bar{s}, l) d\bar{s} \\ &= \int_{l_e}^{2l_e} \delta(\bar{s}-s) f(\bar{s}, l) d\bar{s} = f(s, l) \end{aligned} \quad (10)$$

当 $l \rightarrow \infty$ 时, $f(s, l)$ 收敛, 且极限在 $l = 5l_e$ 即可得到, 所以式(6)和(7)的解都存在极限 $H = \lim_{l \rightarrow \infty} H(l)$,

当 $l \geq 5l_e$ 时, $H = H(l)$, 说明 $l \geq 5l_e$ 时裂缝间距分布独立于 l 。选取

$$h(\bar{s}) = \begin{cases} 1 & \bar{s} \leq s \\ 0 & \bar{s} > s \end{cases} \quad (11)$$

可以得到 s 处裂缝间距的分布函数 $F(s)$ ，即

$$\begin{aligned} H(l) &= E[h(s)] = \int_{l_e}^{l-l_e} h(\bar{s}) f(\bar{s}) d\bar{s} \\ &= \int_{l_e}^s h(\bar{s}) f(\bar{s}) d\bar{s} + \int_s^{l-l_e} h(\bar{s}) f(\bar{s}) d\bar{s} \\ &= \int_{l_e}^s f(\bar{s}) d\bar{s} = F(s) \end{aligned}$$

即为式(6)和(7)的解。图 5 中给出了 $f(s)$ 和 $F(s)$ 的图像，可以知道

$$f_a\left(\frac{s}{l_e}\right) = 0.57\left(\frac{s}{l_e}-1\right)^{-0.43}, F\left(\frac{s}{l_e}\right) = \left(\frac{s}{l_e}-1\right)^{0.57} \quad (12)$$

这与 Krips [12] 的结论相对照，上式是近似可接受的。

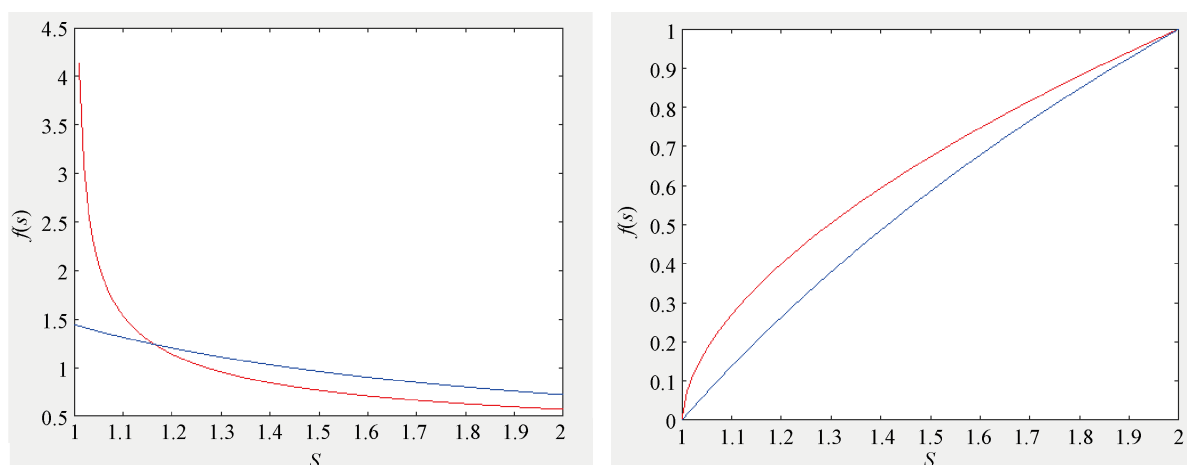


Figure 5. Density function (left) and distribution function of crack spacing (right)

图 5. 裂缝间距的密度函数(左)和分布函数(右)

我们可以计算出裂缝间距的均值

$$s_m = E(s) = \int s f\left(\frac{s}{l_e}\right) d\frac{s}{l_e} = \int_1^2 l_e \cdot \frac{s}{l_e} \cdot 0.57\left(\frac{s}{l_e}-1\right)^{-0.43} d\frac{s}{l_e}$$

令 $x = \frac{s}{l_e} - 1$ ，故

$$s_m = 0.57l_e \int_0^1 (x+1)x^{-0.43} dx = 0.57l_e \int_0^1 (x^{0.57} + x^{-0.43}) dx = 0.57l_e \left[\frac{x^{1.57}}{1.57} + \frac{x^{0.57}}{0.57} \right]_0^1 = 1.36l_e$$

选取

$$h(\bar{s}) = \frac{1}{v'(s(v))} \delta_{s(v)}(\bar{s}) \quad (13)$$

可以得到 v 处滑移的密度函数 $g(v)$ ，即

$$\begin{aligned}
 H(l) &= \int_{l_e}^{l-l_e} h(\bar{s}) f(\bar{s}) d\bar{s} = \int_{l_e}^{l-l_e} \frac{1}{v'(s(v))} \delta_{s(v)}(\bar{s}) f(\bar{s}) d\bar{s} \\
 &= \int_{l_e}^{l-l_e} \delta[\bar{s} - s(v)] \frac{f(\bar{s})}{v'[s(v)]} d\bar{s} = \frac{f[s(v)]}{v'[s(v)]} = g(v)
 \end{aligned} \tag{14}$$

同理, 选取

$$h(\bar{s}) = \begin{cases} 1 & \bar{s} \leq s(v) \\ 0 & \bar{s} > s(v) \end{cases} \tag{15}$$

可以得到它的分布函数 $G(v)$, 即

$$\begin{aligned}
 H(l) &= \int_{l_e}^{l-l_e} h(\bar{s}) f(\bar{s}) d\bar{s} = \int_{l_e}^{s(v)} h(\bar{s}) f(\bar{s}) d\bar{s} + \int_{s(v)}^{l-l_e} h(\bar{s}) f(\bar{s}) d\bar{s} \\
 &= \int_{l_e}^{s(v)} f(\bar{s}) d\bar{s} = G(v)
 \end{aligned} \tag{16}$$

这里我们考虑粘结应力的两个近似:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \tau(r) = \tau_0 & N = N_{cr} \\ \text{(ii)} & \tau(r) = 0 & N \gg N_{cr} \end{cases}$$

其中 $N_{cr} = (1+n\mu)A_c f_t$ 。

情形(i): $\tau(t) = \tau_0$, 应用式(3), 得

$$\begin{aligned}
 v(s) &= c_N s - c_0 \int_0^{s/2} \int_r^{s/2} \tau_0 dt dr = c_N s - c_0 \tau_0 \int_0^{s/2} \left(\frac{s}{2} - r \right) dr \\
 &= c_N s - \frac{1}{8} c_0 \tau_0 s^2 = c_N l_e \left[\frac{s}{l_e} - \frac{1}{4} \left(\frac{s}{l_e} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{17}$$

而 $1 \leq \frac{s}{l_e} \leq 2$, 故 $v_{\min} = \frac{3}{4} c_N l_e, v_{\max} = \frac{4}{3} v_{\min}$, 均值

$$v_m = E[v(s)] = \int v(s) f\left(\frac{s}{l_e}\right) d\frac{s}{l_e} = \int_1^2 c_N l_e \left[\frac{s}{l_e} - \frac{1}{4} \left(\frac{s}{l_e} \right)^2 \right] \cdot 0.57 \left(\frac{s}{l_e} - 1 \right)^{-0.43} d\frac{s}{l_e}$$

令 $x = \frac{s}{l_e} - 1$, 故

$$\begin{aligned}
 v_m &= 0.57 c_N l_e \int_0^1 \left[(x+1) - \frac{1}{4} (x+1)^2 \right] x^{-0.43} dx \\
 &= 0.57 c_N l_e \int_0^1 \left[-\frac{1}{4} x^{1.57} + \frac{1}{2} x^{0.57} + \frac{3}{4} x^{-0.43} \right] dx \\
 &= 0.876 c_N l_e = 1.168 v_{\min}
 \end{aligned}$$

情形(ii): $\tau(r) = 0$, 同理可得

$$v(s) = c_N s, v_{\min} = c_N l_e, v_{\max} = 2v_{\min}, v_m = 1.363 v_{\min} \tag{18}$$

最后, 我们来决定裂缝宽度 w 的密度函数和分布函数, 由假设③及上面得出的事实: $l \geq 5l_e$ 时, 裂缝间距与构件长度无关, 可以得出: 两个相邻的裂缝其间距是相互独立的, 所以 $w = v(s_l) + v(s_r)$ 的分布

是两个滑移分布的卷积:

$$q(w) = \int_{v_{\min}}^w g(v)g(w-v)dv \quad (19)$$

$$Q(w) = \int_{v_{\min}}^w G(v)G(w-v)dv \quad (20)$$

$w_{\min} \leq w \leq w_{\max}$, $w_{\min} = 2v_{\min}$, $w_{\max} = 2v_{\max}$, 在情形(i) (ii)中, 裂缝宽度的均值分别为 $w_m = 1.18w_{\min}$, $w_m = 1.38w_{\min}$ 。

5. 结论

本文首先通过对钢筋混凝土裂缝产生的基本原理进行分析, 导出钢筋混凝土滑移距离的基本公式。利用该公式, 结合随机变量的概率分布方法, 在假设拉杆裂缝间距服从均匀分布的前提下, 得到了滑移的分布函数和密度函数, 证明了裂缝宽度为左右滑移之和, 裂缝宽度的分布函数和密度函数分别为滑移的分布函数和密度函数的卷积。

参考文献

- [1] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [2] 魏津昌. 基于寿命期的混凝土梁桥管养策略研究[D]: [硕士学位论文]. 福州: 福州大学, 2017.
- [3] 沈照伟. 基于可靠度的海洋工程随机荷载组合及设计方法研究[D]: [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2004.
- [4] 陈肇元, 崔京浩, 朱金铨, 安明品, 俞哲夫. 钢筋混凝土裂缝分析与控制[J]. 工程力学, 2001(增刊): 5784.
- [5] 刘庆宽, 王楠, 王海龙. 钢筋混凝土结构耐久性 & 裂缝问题研究的现状[J]. 石家庄铁道大学学报(自然科学版), 2002, 15(3): 9-13.
- [6] 黄棠, 王效通. 结构设计原理[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1997: 51-52.
- [7] Bazant, Z.P. 钢筋混凝土有限元分析[M]. 周氏, 译. 南京: 河海大学出版社, 1988: 12-13.
- [8] 王震波. 钢筋混凝土受弯构件的断裂有限元分析[J]. 大连理工大学学报, 1997, 37(1): 53-56.
- [9] 卢云峰. 高层建筑地下室钢筋混凝土裂缝的成因和控制[J]. 中国科技博览, 2009(32): 316.
- [10] Emborg, M. and Berander, S. (1994) Assessment of Risk of Thermal Cracking in Hardening Concrete. *Journal of Structural Engineering*, **120**, 2893-2912. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1994\)120:10\(2893\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:10(2893))
- [11] Saliger, R. (1936) High Grade Steel in Reinforced Concrete. *Second Congress of the IABSE*, Preliminary Publication, Berlin-Munchen.
- [12] Krips, M. (1985) Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton. Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt.