Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(11), 1990-1995
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.911230

关于小阶数非交换群的简化幂图

仪钰婷，吴玥雯，安佳薇

西安石油大学理学院，陕西 西安
Email: 1137315911@qq.com

收稿日期：2020年11月1日；录用日期：2020年11月18日；发布日期：2020年11月25日

摘 要

给定一个有限群G，群G上的简化幂图是以G的所有元素为顶点集合的一个简单图，其中两个不同的顶点x和y相邻当且仅当$\langle x\rangle\subset\langle y\rangle$或$\langle y\rangle\subset\langle x\rangle$。本文将给出14阶以内的非交换群的简化幂图的结构。此外本文也求了这些群简化幂图的独立数、团数以及彩虹连通数。

关键词

简化幂图，独立数，有限群，团数，彩虹连通数

On the Reduced Power Graphs of Non-Abelian Groups of Small Order

Yuting Yi, Yuewen Wu, Jiawei An

School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an Shaanxi
Email: 1137315911@qq.com

Received: Nov. 1st, 2020; accepted: Nov. 18th, 2020; published: Nov. 25th, 2020

Abstract

Given a finite group G, the reduced power graph of G is an undirected graph with vertex set G, and two distinct vertices x and y are adjacent if and only if $\langle x\rangle\subset\langle y\rangle$ or $\langle y\rangle\subset\langle x\rangle$. This paper characterizes the structures of the reduced power graphs of non-abelian groups of order at most 14. Moreover, this paper also computes the independence number, clique number, and the rainbow connection number of these graphs.

文章引用: 仪钰婷, 吴玥雯, 安佳薇. 关于小阶数非交换群的简化幂图[J]. 应用数学进展, 2020, 9(11): 1990-1995.
DOI: 10.12677/aam.2020.911230

Keywords

Reduced Power Graph, Independence Number, Finite Group, Clique Number, Rainbow Connection Number

1. 引言

本文所涉及的任一图均为一个简单图，即没有重边和自环的无向图。设Γ是一个图，Γ的顶点集和边集分别用$V(\Gamma)$和$E(\Gamma)$表示。如果$V(\Gamma)$的一个子集U中任意两个顶点在Γ中都不能相连，则称U为Γ的一个独立集。如果向某个独立集中添加任一个在该独立集之外的顶点之后，新构成的集合不再是Γ的独立集，则原独立集称为是图Γ的一个极大独立集。具有最大基数的独立集的基数称为图Γ的独立数。如果$V(\Gamma)$的一个子集C中任意两个顶点在Γ中都相连，则称C为Γ的一团。具有最大基数的团的大小称为Γ的团数。

群上的凯莱图有非常悠久的研究历史，环上的零因子图是近二十年来的一个研究热门课题。研究群或某个代数系统上的图是近些年来的一个新的研究方向。一方面可以根据图的一些性质决定群或代数系统的结构，另一方面，研究这些图在自动化理论的应用。到目前为止，结合图跟环或群然后研究这些图的论文已经不胜枚举，除了前面提到的凯莱图与零因子图以外，如群的共轭类图和素图等，以及环的单位凯莱图等。

本文所涉及的群均为有限群。设G是一个群且$g\in G$，g的阶$o(g)$是最小的正整数n使得$g^n=e$，其中e是G的单位元。给定一个群G，G上幂图是一个以G为顶点集合的简单图，其中两个元素之间有边的充分必要条件是在G中这两个元素一个可以写成另外一个的幂。在2000年，Kelarev和Quinn [1]首次引入了群的有向幂图，在2009年，Chakrabarty、Ghosh和Sen [2]首次引入了群的无向幂图，也简称为群的幂图。近十多年来，学者对幂图的研究非常活跃，看综述文章[3]。为了减少群幂图中的一些边，Rajkumar和Anitha [4]介绍了群G的简化幂图$RP(G)$，该图是以G的所有元素为顶点集合的一个简单图，其中两个不同的元素x,y相连接的充分必要条件是$\langle x\rangle\subset\langle y\rangle$或$\langle y\rangle\subset\langle x\rangle$，其中$\langle x\rangle$表示由元素$x$生成的的循环子群。换句话说，群$G$的简化幂图是从群$G$的幂图中删除所有满足条件$\langle x\rangle=\langle y\rangle$的边$\{x,y\}$。因此$RP(G)$是群$G$的幂图的一个生成子图。在[4]中，这两位学者主要研究了群的简化幂图的图理论性质对群结构的影响。

在图理论中，寻找图的具有最大基数的独立集被称为最大独立集问题。众所周知，计算一个图的独立数问题和计算图的团数问题均是NP-困难的。本文将给出14阶以内的非交换群的简化幂图的结构。此外本文也求了这些群简化幂图的独立数、团数以及彩虹连通数。

2. 小阶数的非交换群的简化幂图

本节将给出14阶以内的非交换群的简化幂图的结构。从有限群的分类可知，所有14阶以内的非交换群有$S_3,D_4,Q_8,D_5,A_4,D_6,Q_{12},D_7$，其中$Q_8,A_4,Q_{12}$分别是8阶的四元数群、4次交错群和12阶双循环群。下面是对14阶以内的非交换群的简化幂图的简短描述。

(i) $S_3=\{e,(12),(13),(23),(123),(132)\}$，其中$(12)^2=(13)^2=(23)^2=e$，$(123)^2=(132)$，$(132)^2=(123)$，

$(123)^3=(132)^3=e$。因此$\{(12),(13),(23)\}$中每个元素的阶是 2，同理(123)和(132)的阶是 3。因此可得出S_3的简化幂图$RP(S_3)$如图 1 所示。

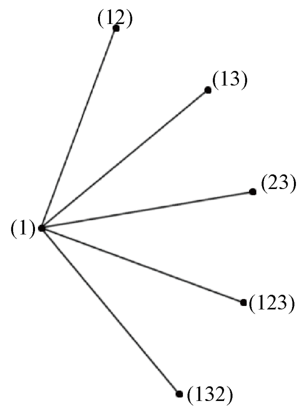

Figure 1. $RP(S_3)$

图 1. $RP(S_3)$

(ii) $D_4=\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$，其中$o(a)=4$，$o(b)=2$，$ba=a^3b$。一个简单的计算表明$o(a^3)=4$，$o(a^2)=o(ab)=o(a^2b)=o(a^3b)=2$。我们可以得出：所有的$\{b,ab,a^2b,a^3b\}$都只与$e$相邻，因此可得出$D_4$的简化幂图$RP(D_4)$如图 2 所示。从图 2 可以求出$D_4$的团数为 3，独立数为 6。

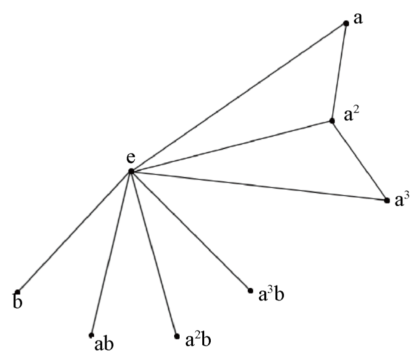

Figure 2. $RP(D_4)$

图 2. $RP(D_4)$

(iii) $Q_8=\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$，式中$o(a)=4$，$a^2=b^2$，$ba=a^3b$。很容易验证，$b^2=(a^3)^2=(ab)^2=(a^2b)^2=(a^3b)^2=a^2$，$o(a^2)=2$。这些结果表明，除了$e$和$a^2$的阶为 2 外，每个元素的阶数都是 4。$\{e,a,a^2,a^3\}$，$\{e,b,a^2,a^2b\}$，$\{e,ab,a^2,a^3b\}$都是$Q_8$的循环子群，阶数为 4。因此可得出$Q_8$的简化幂图$RP(Q_8)$如图 3 所示。从图 3 可以求出$Q_8$的团数为 4，独立数为 6。

(iv) $D_5=\{e,a,a^2,a^3,a^4,b,ab,a^2b,a^3b,a^4b\}$，其中$o(a)=5$，$o(b)=2$，$ba=a^4b$。简单计算表明，$o(a^2)=o(a^3)=o(a^4)=5$，$o(ab)=o(a^2b)=o(a^3b)=o(a^4b)=2$。我们可以得出：所有$\{b,ab,a^2b,a^3b,a^4b\}$只与$e$相邻，因此可得出$D_5$的简化幂图$RP(D_5)$如图 4 所示。从图 4 可以求出$D_5$的团数为 2，独立数为 9。

(v) $A_4=\{e,(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$，其中

$o\left((12)(34)\right)=o\left((13)(24)\right)=o\left((14)(23)\right)=2$，且 $\{e,(123),(132)\}$，$\{e,(124),(142)\}$，$\{e,(134),(143)\}$，$\{e,(234),(243)\}$ 都是 3 阶 A_4 的循环子群。所以可得 A_4 简化幂图 $RP(A_4)$，如图 5 所示。

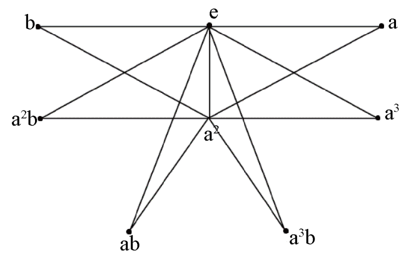

Figure 3. $RP(Q_8)$

图 3. $RP(Q_8)$

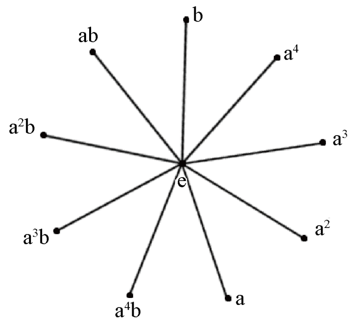

Figure 4. $RP(D_5)$

图 4. $RP(D_5)$

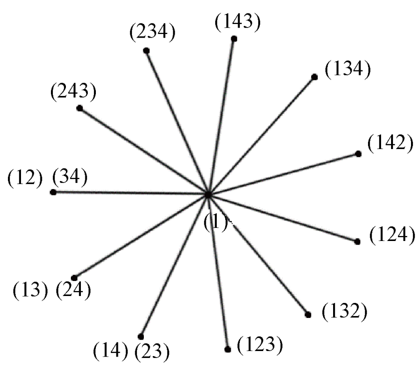

Figure 5. $RP(A_4)$

图 5. $RP(A_4)$

(vi) $D_6=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,b,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b\}$，其中 $o(a)=6$，$o(b)=2$，$ba=a^5b$。简单的计算表明，$o(a^3)=o(ab)=o(a^2b)=o(a^3b)=o(a^5b)=2$，$o(a^2)=o(a^4)=3$，$o(a^5)=6$，$(a^5)^3=a^3$。因此所有的 $\{b,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b\}$ 都只与 e 相邻，a^3 与所有的 $\{e,a,a^5\}$ 相邻。所以可得 D_6 简化幂图 $RP(D_6)$，如图 6 所示。

(vii) $Q_{12}=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,b,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b\}$，其中 $o(a)=6$，$a^3=b^2$，$ba=a^5b$。很容易验证 $o(b)=o(ab)=o(a^2b)=o(a^3b)=o(a^4b)=o(a^5b)=4$，$o(a^2)=3$，$o(a^3)=2$，$o(a^5)=6$，$(a^5)^3=a^3$。所

以可得 Q_{12} 简化幂图 $RP(Q_{12})$，如图 7 所示。

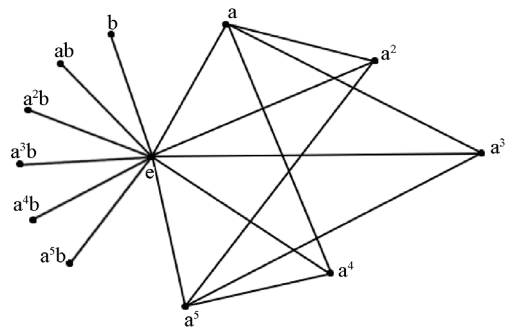

Figure 6. $RP(D_6)$

图 6. $RP(D_6)$

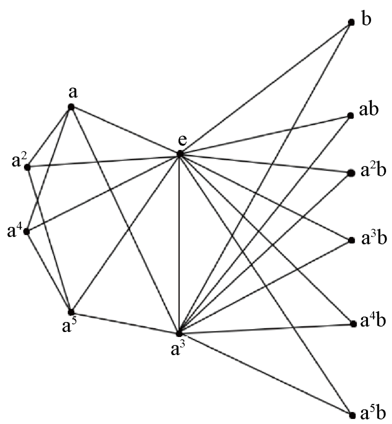

Figure 7. $RP(Q_{12})$

图 7. $RP(Q_{12})$

(viii) $D_7=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,b,ab,a^2b,a^3b,a^4b,a^5b,a^6b\}$，其中 $o(a)=7$，$o(b)=2$，$ba=a^6b$。简单计算表明，$o(a^2)=o(a^3)=o(a^4)=o(a^6)=7$，$o(ab)=o(a^2b)=o(a^3b)=o(a^4b)=o(a^5b)=o(a^6b)=2$。所以可得 D_7 简化幂图 $RP(D_7)$，如图 8 所示。

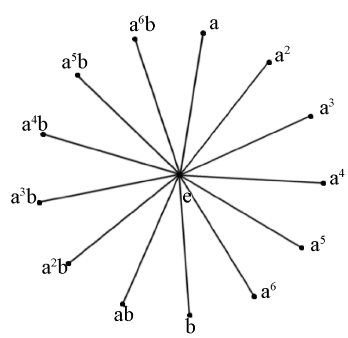

Figure 8. $RP(D_7)$

图 8. $RP(D_7)$

3. 小阶数的非交换群的简化幂图的一些参数

在图 Γ 上定义一个边染色 $\zeta: E(\Gamma)\to\{1,2,\cdots,k\}$，$k\in N$，其中相邻的边可以被染成相同的颜色。如果在该染色 ζ 之下，一条路 P 上的任两条边的颜色都不同，则 P 称为一条彩虹路。如果对于图 Γ 的任两个不同的顶点 u 和 v，均存在一条彩虹路连接这两个顶点，则 Γ 称为一个彩虹连通图，并且 ζ 称为 Γ 的一个彩虹 k-染色。使得 Γ 彩虹连通的最少的颜色数称为 Γ 的彩虹连通数。

本节根据图数、独立数以及彩虹连通数的定义，得到 14 阶以内的非交换群对应的简化幂图的这些参数值(见表 1)。

Table 1. Reduced power graphs corresponding to non-commutative groups of order 14
表 1. 14 阶以内的非交换群对应的简化幂图

幂图	顶点	团数	独立数	彩虹连通数
$RP(S_3)$	$\{e,(12),(13),(23),(123),(132)\}$	2	5	5
$RP(D_4)$	$\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$	3	6	4
$RP(Q_8)$	$\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$	3	6	4
$RP(D_5)$	$\{e,a,a^2,a^3,a^4,b,ab,a^2b,a^3b, a^4b\}$	2	9	9
$RP(A_4)$	$\{e,(123),(132),(124),(142),(134),(143),$ $(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$	2	11	11
$RP(D_6)$	$\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,b,ab,a^2b, a^3b,a^4b,a^5b\}$	3	9	6
$RP(Q_{12})$	$\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,b,ab,a^2b, a^3b,a^4b,a^5b\}$	3	8	4
$RP(D_7)$	$\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,b,ab, a^2b,a^3b,a^4b,a^5b,a^6b\}$	2	13	13

基金项目

本文得到国家级大学生创新创业训练项目(201910705028)的资助。

参考文献

[1] Kelarev, A.V. and Quinn, S.J. (2000) A Combinatorial Property and Power Graphs of Groups. *Contributions to General Algebra*, **12**, 229-235.

[2] Chakrabarty, I., Ghosh, S. and Sen, M.K. (2009) Undirected Power Graphs of Semigroups. *Semigroup Forum*, **78**, 410-426. https://doi.org/10.1007/s00233-008-9132-y

[3] Abawajy, J., Kelarev, A.V. and Chowdhury, M. (2013) Power Graphs: A Survey. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, **1**, 125-147. https://doi.org/10.5614/ejgta.2013.1.2.6

[4] Rajkumar, R. and Anitha, T. (2017) Reduced Power Graph of a Group. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **63**, 69-76. https://doi.org/10.1016/j.endm.2017.10.063