Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(11), 1996-2003
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.911231

图的 i-森林分解

方旭倩

浙江师范大学数学与计算机科学学院, 浙江 金华
Email: 2529431786@qq.com

收稿日期：2020年11月1日；录用日期：2020年11月18日；发布日期：2020年11月25日

摘 要

一个图 G 的分数荫度定义为 $\gamma_f(G) = \max_{H\subseteq G, v(H)>1} \frac{e(H)}{v(H)-1}$，著名的 **Nash-Williams** 定理指出：当且仅当 $\gamma_f(G) \leq k$ 时，图 G 最多能边分解为 k 个森林。对此，强九龙树猜想断言，对于任意非负整数 k 和 d，任何分数荫度至多为 $k + \frac{d}{k+d+1}$ 的图都能边分解为 $k+1$ 个森林，并且存在其中一个森林，它的每个连通分支最多包含 d 条边。在本文中，我们将 $\tau_i(G)$ 定义为 $\tau_i(G) = max_{H\subseteq G,|H|>i} \frac{e(H)}{|H|-i}$，当然，$\tau_1(G) = \gamma_f(G)$。对于整数 $i \geq 1$，图 G 的 i-森林是图 G 的支撑森林，其至少包含了 i 个连通分支。而一个 i-树是指 一个 i-森林恰好有 i 个连通分支。我们证明了，当 $k = 1, d = 2$ 时，分数 i-荫度至多为 $1 + \frac{1}{2}$ 的图 G 能边分解成 2 个 i -森林并且其中一个 i -森林，它的每个连通分支最多包含 2 条边。

关键词

Nash-Williams 定理，强九龙树猜想， i-森林，图的边分解

Decomposition of Graphs into i-Forest

Xuqian Fang

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 2529431786@qq.com

Received: Nov. 1^{st}, 2020; accepted: Nov. 18^{th}, 2020; published: Nov. 25^{th}, 2020

文章引用: 方旭倩. 图的 i-森林分解[J]. 应用数学进展, 2020, 9(11): 1996-2003.
DOI: 10.12677/aam.2020.911231

Abstract

The fractional arboricity of a loopless graph G is defined as $\gamma_f(G) = \max_{H \subseteq G, v(H)>1} \frac{e(H)}{v(H)-1}$. The famous Nash-Williams theorem states that that a graph G can be decomposed into at most k forests if and only if $\gamma_f(G) \leq k$. The Strong Nine Dragon Tree Conjecture asserts that for any non-negative integer k and d, any graph with fractional arboricity at most $k + \frac{d}{k+d+1}$ decomposes into $k+1$ forests with one of them consisting of trees of sizes at most d. In this paper, we define $\tau_i(G)$ as $\tau_i(G) = max_{H \subseteq G, |H|>i} \frac{e(H)}{|H|-i}$, here, $\tau_1(G) = \gamma_f(G)$. For the integer $i \geq 1$, an i-forest of a graph G is a spanning forest of G that has at least i connected components of. An i-tree means an i-forest that there are exactly i connected components. We prove that when $k = 1, d = 2$, a graph G with $\tau_i(G) \leq 1 + \frac{1}{2}$, then the graph G can be decomposed into 2 i-forests such that for one of them, each connected component contains at most 2 edges.

Keywords

Nash-Williams Theorem, Strong Nine Dragon Tree Conjecture, i-Forest, Edge-Decomposition of Graphs

1. 引言

贯穿全文，我们所讨论的图都是有限的，不定向的。图可能有平行边，但没有环。给定一个图 G，$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的点集和边集。令 $v(G) := |V(G)|$，$e(G) := |E(G)|$，其分别表示图 G 的点数和边数。如果 $X \subseteq V(G)$，那么 $G[X]$ 是图 G 由点集 X 导出的子图；$G - X$ 图 G 通过删减 X 中的点和与 X 相关联的边获得的图。为了方便起见，我们令 $e(X) := e(G[X])$。如果 S 是 $E(G)$ 的边集，那么 $G[S]$ 就是由边集 S 导出的 G 子图，其点集是边集 S 中所有边的端点。假设 σ 是图 G 的一个定向（给边定向），图 G 的一条定向边 e 的两个端点分别为 a 和 b，且边 e 的方向是由 a 指向 b，则我们可以用 (a, b) 表示边 e，当然，在没有定向的时候，边 e 可以用 ab 来表示。另外，对于任意的 $v \in V(G)$，我们用 $d^+_G(v)$ 表示 v 点在定向图 G 中的出度，即从 v 点出边

的条数。给定一个图 G，它的支撑树 T 是一个连通且无圈的子图，即，无圈且只有一个连通分支（$V(T)=V(G)$），而森林是无圈且至少有一个连通分支的子图。现在，我们定义：对于整数 $i\geq 1$，图 G 的 i-森林是图 G 的支撑森林，其至少包含了 i 个连通分支。而一个 i-树是指 一个 i-森林恰好有 i 个连通分支。图 G 的边分解是由边不相交的 G 的子图组成。图 G 的荫度是指 G 边分解成森林的最小数，由 $\gamma(G)$ 表示。图 G 的分数荫度参数定义为$\gamma_f(G)=max_{H\subseteq G,v(H)>1}\frac{e(H)}{v(H)-1}$。Payan [1] 在1986年介绍了这个概念. 而著名的 Nash-Williams 定理给出了 G 的荫度最多是 k 的充要条件:

定理 1 (Nash-Williams, 1964, [2]) 一个图 G 最多能分解成 k 个边不相交的森林当且仅当 $\gamma_f(G)\leq k$。

强九龙树猜想 [3] ：对于任意非负整数 k 和 d，假设图 G 的分数荫度至多为 $k+\frac{d}{k+d+1}$，那么图 G 能边分解成 $k+1$ 个森林，并且存在其中一个森林，它的每个连通分支最多包含 d 条边。

2013年， [4] 中的定理 7.1 证明了当 $k=1$，$d=2$ 时的强九龙树猜想是正确的，在本文中，我们将这个结果在 i-森林上进行了推广。首先先定义图 G 的分数 i-荫度，用 $\gamma_i(G)$ 表示，其递归定义如下：

$$\gamma_1(G)=\max_{H\subseteq G,v(H)>1}\frac{e(H)}{v(H)-1}.$$

$$\gamma_2(G)=\max\begin{cases}\frac{e(H)}{v(H)-2}, & H\subseteq G,\ 2<v(H)=v(G);\\ \gamma_1(H), & H\subseteq G,\ v(H)=v(G)-1.\end{cases}$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\gamma_i(G)=\max\begin{cases}\frac{e(H)}{v(H)-i}, & H\subseteq G,\ i<v(H)=v(G);\\ \gamma_{(i-1)}(H), & H\subseteq G,\ v(H)=v(G)-1.\end{cases}$$

等价地，由 $\gamma_i(G)$ 表示的图 G 的分数 i-荫度，如下定义为：

$$\gamma_i(G)=\max\begin{cases}\frac{e(H)}{v(H)-i}, & H\subseteq G,\ i<v(H)=v(G);\\ \frac{e(H)}{v(H)-i+1}, & H\subseteq G,\ i-1<v(H)=v(G)-1;\\ \cdots\cdots, & \\ \frac{e(H)}{v(H)-2}, & H\subseteq G,\ 2<v(H)=v(G)-i+2;\\ \frac{e(H)}{v(H)-1}, & H\subseteq G,\ 1<v(H)\leq v(G)-i+1.\end{cases}$$

我们将 $\tau_i(G)$ 定义为

$$\tau_i(G)=max_{H\subseteq G,|H|>i}\frac{e(H)}{|H|-i}$$

在此，$\tau_1(G)=\gamma_f(G)$。因此，本文的主要目的是证明 **定理 2**：

定理 2　当 $k=1, d=2$ 时，假设图 G 满足 $\tau_i(G) \le 1+\frac{1}{2}$，那么图 G 能边分解成 2 个 i -森林，并且其中一个 i -森林，它的每个连通分支最多包含 2 条边。

2. 定理 2 的证明

当 $i \ge 1$ 时，如果 $\tau_i(G)=0$，那么这不难发现定理 2 是成立的。因此假设定理 2 不成立，证明方法借鉴于 [5] [6]。令图 G 是满足定理 2 不成立的一个点数极小反例，即满足 $\tau_i(G) \le 1+\frac{1}{2}$，但图 G 不能边分解成 2 个 i -森林，并且其中一个 i -森林，它的每个连通分支最多包含 2 条边。根据以上条件，令 i 是图 G 作为定理 2 的反例的最小整数。由于 $i=1$ 时，根据 [4] 中的定理 7.1，定理 2 成立，因此，这里的 $i \ge 2$。

假设 $\mathcal{F}=\{F_1, F_2\}$ 是图 G 分解成 2 个 i -森林的边分解(i 是整数)。将 F_1 的边染成蓝色，F_2 的边染成红色(为了方便起见，之后我们会将边被染成红色的连通分支称作红色连通分支)。令 s 是 $V(G)$ 的一个点，固定这个点，给 F_1 的边定向，使得 $d^+_{F_1}(s)=0$，$d^+_{F_1}(x) \le 1$，$x \ne s$。这样的定向叫做关于 s 的可行定向。此类分解(包括方向和颜色)被称作以 s 为根的图 G 的边分解。

假设 $\mathcal{F}$ 是以 s 为根的图 G 的边分解。对于每个顶点 v，用 F^v 表示包含 v 的 F_2 的连通分支。从根 s 开始，通过递归选择 F_2 的某些连通分支，我们定义 $\mathcal{F}$ 的 s 族　如下：

最初，$F^s \in$。当有一个条蓝色的有向边 (x,y)，使得 $F^x \in$，$F^y \notin$，将 F^y 加到。因为图 G 是有限的，所以我们有了一个 $\mathcal{F}$ 的 s 族。

令 $V_{\mathcal{F},s} = \bigcup_{F^x \in} V(F^x)$。从定义可以得出，如果 $x \in V_{\mathcal{F},s}$，则任何有向的蓝色边 (x,y)，$y \in V_{\mathcal{F},s}$，我们得到以下结果。

引理 1　如果 i -森林 F_1 有 t 个连通分支，$t \ge i$，那么 $e(F_1[V_{\mathcal{F},s}]) \ge |V_{\mathcal{F},s}| - t$。

证明　我们需要证明图 $F_1[V_{\mathcal{F},s}]$ 最多具有 t 个连通分支。证明运用反证法，假设图 $F_1[V_{\mathcal{F},s}]$ 具有 $t+1$ 个连通分支分量 $C_1, C_2, \cdots, C_t, C_t+1$。由于 F_1 是具有 t 个连通分支的 i -森林，因此有两个顶点集(假设是 $V(C_1)$ 和 $V(C_2)$)属于 F_1 的一个连通分支。然后有 F_1 从 C_1 到 C_2 的有向路径P(或从 C_2 到 C_1)，且 $V(P) \backslash V_{\mathcal{F},s} \ne \emptyset$。因此，$P$ 中存在有向边 $e=(a,b)$，使得 $a \in V_{\mathcal{F},s}$，但 $b \notin V_{\mathcal{F},s}$。矛盾。

因为 $\tau_{(i-1)}(G) \le \tau_i(G) \le 1+\frac{1}{2}$，那么通过 $i(i \ge 2)$的最小性，图 G 被划分成 2 个 $(i-1)$ -森林，并且其中一个 $(i-1)$ -森林，它的每个连通分支最多包含 2 条边。我们称这样的图 G 的边分解为 $D^*_{i-1}-$ 边分解，如果：

(1) F_2 是一个极大的 $(i-1)$-森林，但 F_2 不是一个 $(i-1)$-树，即 F_2 是一个极大的 i-森林。

(2) 根据 (1)，分解的 $(i-1)$-树的数量最少。

$D^*_{i-1}-$ 边分解是正确的，因为如果 F_2 是 $(i-1)$-树，则 $e(F_2)=v(G)-i+1$。由于 $e(G) < 2(v(G)-i)$，因此 F_1 至少有 i 个连通分支。然后，必有 F_1 的两个连通分支之间存在 F_2 的边 e (e 的端点分别在这两个连通分支中)。用 F_1+e 替换 F_1 并用 F_2-e替换 F_2 ，那么 F_1 也是图 G 的 $(i-1)$-森林，而 F_2 不是 $(i-1)$-树。特别是，F_2 的每个连接分支最多包含 2 个边。

因为图 G 是定理 2 的一个点数极小反例，所以图 G 的任意 $D^*_{i-1}-$ 边分解至少有一个 $(i-1)$-树。

假设 $=\{F_1, F_2\}$ 是图 G 的一个 $D^*_{i-1}-$ 边分解，将其分解成两个 $(i-1)$-森林，我们为 F_1 的边染蓝色，F_2 的边染为红色。给定一个图 G 的子图 C，则 $e_r(C)$ 和 $e_b(C)$ 分别表示子图 C 的红边边数和蓝边边数。如果 F_2 具有两个连通分支 C_1，C_2，使得 $a \in V(C_1)$，$b \in V(C_2)$ ），则边 $e=(a,b)$ 位于 F_2 的两个连通分支之间。

引理 2 假设 $=\{F_1, F_2\}$ 是图 G 的一个 $D^*_{i-1}-$ 边分解(F_2 的每个连通分支的边数最多为 2 条)，那么我们就有：

1. F_1 是 $(i-1)$-树
2. F_2 不是 i-树

证明 如果 F_1 是 i-树或者 i-森林，而 F_2 的每个连通分支的边数最多为 2 条，这与图 G 是极小反例矛盾。因此 F_1 是 $(i-1)$-树。

根据 1.，F_1 的边数至少是 $(v(G)-i)+1$，由于 $e(G) < 2(v(G)-i)$，则 $e(F_2) < v(G)-i$，F_2 不是 i-树。得证。

断言 1 假设 $=\{F_1, F_2\}$ 是图 G 的一个 $D^*_{i-1}-$ 边分解，在 F_2 的两个连通分支 C_i 和 C_j 之间，有一条蓝边（F_1 的边），那么 $e(C_i)+e(C_j) \geq 2$。

证明 假设 $e=(x,y)$ 是跨在 C_i 和 C_j 之间的边，$e \in F_1$，但是 $e(C_i)+e(C_j) < 2$。令 $F_1' = F_1 - e$，$F_2' = F_2 + e$，那么 F_2 的每个连通分支最多包含 2 条边。可以发现，边分解 $=\{F_1', F_2'\}$ 满足 $e(F_1') \geq (|G|-i)$，$e(F_2') < |G|-i$，F_2' 是一个 i-森林，且 F_2' 的每个连通分支的边数最多为 2 条。但是 $e(F_2') = e(F_2)+1$，这与 (1)矛盾。得证。

因为 $=\{F_1, F_2\}$ 是图 G 的一个 $D^*_{i-1}-$ 边分解，F_1 是 $(i-1)$-树，那么在 F_2 的两个连通分支 C_i 和 C_j 之间，肯定有一条蓝边(F_1 的边)。如果 F_2 不存在边数等于 2 的连通分支，根据断言 1，F_2 的每个红色连通分支的边数都只能为 1，则 F_2 的边数为 $\frac{1}{2}|V|$，那么我们有 $e(G[V]) \geq (|V|-i+1)+\frac{1}{2}|V|$，与 $\tau_{(i-1)}(G) \leq 1+\frac{1}{2}$ 矛盾。令 R 是 F_2 的一个红色连通分支，其边数等于 2，s 为 R 中任意的点。我们将 R 称为 F_1 的根部，F_1 的定向边满足 $d^+_{F_1}(s)=0$，$d^+_{F_1}(x) \leq 1$，$x \neq s$。那么 (包括方向和颜色)被称作以 s 为根的图 G 的边分解。

因为有很多不同的 G 的 $D^*_{i-1}-$ 边分解，对于一个 $D^*_{i-1}-$ 边分解 ，也有很多不同的根部 R，此外，对于顶点 s ，G 有许多可行的定向(相对于 s)。另外，关于 的 s 族 ，现在我们选择一个图 G 的 $D^*_{i-1}-$ 边分解，$V(R)$ 的一个点 s，一个相对于 s 可行的定向，使得这样的 是以 s 为根的图 G 的边分解(包括方向和颜色)，且 $||$ 是最大的。那么我们有以下结论：

断言 2 $|| \geq i+1$。

此证明在 [7] 中已给出，本文不再重复。

因为 $|| \geq i+1$，根据引理 1 和引理 2，我们有

$$e(F_1[V_{\mathcal{F},s}]) \geq (|V_{\mathcal{F},s}| - i) + 1$$

我们将证明对于 的 s 族，$F[V]$ 至少包括 $\frac{1}{2}|V|$ 条红边。这意味着

$$e(G[V]) \geq (|V| - i) + 1 + \frac{1}{2}|V|$$

与 $\tau_i(G) \leq 1 + \frac{1}{2}$ 矛盾。因此我们就证明了定理 2。

引理 3 $F[V]$ 包含超过 $\frac{1}{2}|V|$ 条红边。

定义 1 一个子图 K 如果满足

$$\frac{e_r(K)}{v(K)} < \frac{1}{2}$$

则称它是小的子图。

定义 2 令 C 是一个红色连通分支，对于任意的点 $x, y \in V(C)$，用 $P_{x,y}$ 表示在 C 从 x 到 y 的蓝路。

观察到当 K 是连通时，一个小的连通分支满足 $\frac{e_r(K)}{v(K)} < \frac{1}{2}$，则 K 是一个孤立点（对于红边来说 K 是一个孤立点)。

观察 1 令 C 是一个边数为 2 的红色连通分支，K_1，K_2 为 C 的两个小的子图。令 (x, x') 和 (y, y') 是 F_1 的两条定向边，满足 $x, y \in V(C)$，$x' \in V(K_1), y' \in V(K_2)$。如果 F_1 加上 C 的两条边都能产生圈，则一定存在一条边，其产生的圈要么包含 (x, x')，要么包含 (y, y')。

证明 假设 xy 和 yz 是 C 的两条边，$F_1 + xy$ 和 $F_1 + yz$ 产生的圈都不包含 (x, x')，那么在这两个圈中分别存在从 y 到 x 和 z 到 x 的定向蓝路。若这两个圈也不包含 (y, y')，则 $d^+_{F_1}(y) > 1$，矛盾。

推论 1 令 C 是一个红色连通分支，则 C 最多有 1 个小的子图，即最多连接一个孤立点。

证明 根据引理 2，我们可以知道 $e(C) = 2$。假设 C 连接着两个孤立点(见图 1)，则有两个点 $x, y \in V(C)$，使得 $e_1 = (x, x')$ 和 $e_2 = (y, y')$ 属于 F_1 的边，而 x' 与 y' 便是 C 连接着的两个孤立点。如果存在一条边 $e \in E(P_{x,y})$，使得 $F_1 \cup \{e\}$ 不产生圈，那么用 $F_1 - e_1 - e_2 + e$ 替换 F_1，因为 x' 与 y' 是 C 连接着的两个孤立点，$F_2 + e_1 + e_2$ 不产生圈，因此用 $F_2 - e + e_1 + e_2$ 替换 F_2。这样我们很容易就能得到 $F_1 - e_1 - e_2 + e$ 和 $F_2 - e + e_1 + e_2$ 都是不包含圈的。否则，根据观察 1，存在边 $e \in E(P_{x,y})$，使得 $F_1 \cup \{e\}$ 产生一个圈，且这个圈要么包含 $e_1 = (x, x')$，要么包含 $e_2 = (y, y')$。现在用 $F_1 - e_1 - e_2 + e$ 替换 F_1，用 $F_2 - e + e_1 + e_2$ 替换 F_2，同样我们很容易就能得到 $F_1 - e_1 - e_2 + e$ 和 $F_2 - e + e_1 + e_2$ 都是不包含圈的。

因此 $F_1 - e_1 - e_2 + e$ 是一个 i 森林(因为 F_1 是一个 $(i-1)$ 树)，$F_2 - e + e_1 + e_2$ 是比 F_2 边数多 1 的 i-森林，且其每个连通分支的边数都是小于等于 2。但这与图 G 的 $D^*_{i-1}-$ 边分解的定义矛

DOI: 10.12677/aam.2020.911231

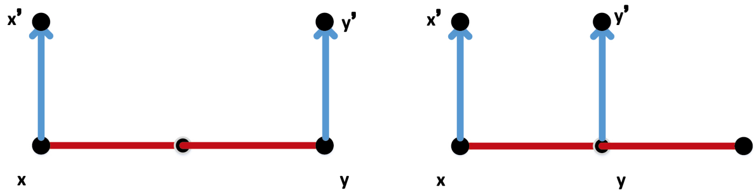

Figure 1. $P_{x,y}$ has the above two situations
图 1. $P_{x,y}$ 有以上两种情况

盾。得证。

根据引理 2和推论 1，现在我们知道了每个边数为 2 的红色连通分支最多连接 1 个小的子图(即孤立点)，且小的子图之间没有蓝边连接。令 C 是一个红色连通分支，K 是 C 连接的小的子图。然后让 C_K 为顶点集由 $V(K) \cup V(C)$ 组成且包含该顶点集上的所有红色边的子图。那么我们可以得到 $\frac{e(C_K)}{v(C_K)} \geq \frac{1}{2}$。令 $\mathcal{R}$ 表示不是小的红色连通分支的集合，则我们有

$$V = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} V(C_K),$$

$$E_r(G[V]) = \bigcup_{C \in \mathcal{R}} E(C_K)$$

因此引理 3 得证，$\tau_i(G)$ 至少是 $1 + \frac{1}{2}$，定理 2 得证。

参考文献

[1] Payan, C. (1986) Graphes Équilibrés et Arboricité Rationnelle. *European Journal of Combinatorics*, **7**, 263-270. https://doi.org/10.1016/S0195-6698(86)80032-4

[2] Nash-Williams, C.St.J.A. (1964) Decompositions of Finite Graphs into Forests. *Journal of the London Mathematical Society*, **s1-39**, 12. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-39.1.12

[3] Montassier, M., Ossona de Mendez, P., Raspaud, A. and Zhu, X. (2012) Decomposing a Graph into Forests. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **102**, 38-52. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2011.04.001

[4] Kim, S.-J., Kostochka, A.V., West, D.B., Wu, H.H. and Zhu, X.D. (2013) Decomposition of Sparse Graphs into Forests and a Graph with Bounded Degree. *Journal of Graph Theory*, **74**, 369-391. https://doi.org/10.1002/jgt.21711

[5] Jiang, H.B. and Yang, D.Q. (2017) Decomposing a Graph into Forests: The Nine Dragon Tree Conjecture Is True. *Combinatorica*, **37**, 1125-1137. https://doi.org/10.1007/s00493-016-3390-1

[6] Grout, L. and Moore, B. (2019) The Pseudoforest Analogue for the Strong Nine Dragon Tree Conjecture Is True. arXiv e-prints, arXiv:1905.02600

[7] Li, P. (2017) Generalizations on Decomposing a Graph into Forests or Pseudoforests. Master Thesis, Fuzhou University, Fuzhou.