撤稿声明

撤稿文章名: 含Pell与Pell-Lucas数之积的斜循环矩阵的行列式及其性质
作者: 李笑丽，何承源，雷林

* 通讯作者. 邮箱: lxl1970217218@163.com

期刊名: 应用数学进展 (AAM)
年份: 2020
卷数: 9
期数: 12
页码 (从X页到X页): 2129-2138
DOI (to PDF): https://doi.org/10.12677/AAM.2020.912247
文章ID: 2621388
文章页面: http://www.hanspub.org/journal/PaperInformation.aspx?paperID=39154

撤稿日期: 2021-4-13

撤稿原因 (可多选):
□ 所有作者
□ 部分作者:
□ 编辑收到通知来自于
○ 出版商
○ 科研机构:
○ 读者:
☑ 其他:
撤稿生效日期: 2021-4-13

撤稿类型 (可多选):
□ 结果不实
○ 实验错误 ○ 数据不一致 ○ 分析错误 ○ 内容有失偏颇
○ 其他:
□ 结果不可再得
□ 未揭示可能会影响理解与结论的主要利益冲突
□ 不符合道德

□ 欺诈
○ 编造数据 ○ 虚假出版 ○ 其他:
□ 抄袭 □ 自我抄袭 □ 重复抄袭 □ 重复发表 *
□ 侵权 □ 其他法律相关:

□ 编辑错误
○操作错误 ○ 无效评审 ○ 决策错误 ○ 其他:

☑ 其他原因:

出版结果 (只可单选)
□ 仍然有效.
☑ 完全无效.

作者行为 失误(只可单选):
□ 诚信问题
□ 学术不端
□ 无 (不适用此条，如编辑错误)

* 重复发表: "出版或试图出版同一篇文章于不同期刊."

历史
作者回应:
□ 是，日期: yyyy-mm-dd
☑ 否

信息改正:
□ 是, 日期: yyyy-mm-dd
☑ 否

说明:

“含 Pell 与 Pell-Lucas 数之积的斜循环矩阵的行列式及其性质”一文刊登在 2020 年 12 月出版的《应用数学进展》2020 年第 9 卷第 12 期第 2129-2138 页上。因该文研究内容另作他用，作者主动申请撤稿。根据国际出版流程，编委会现决定撤除此稿件，保留原出版出处：

李笑丽, 何承源, 雷林. 含 Pell 与 Pell-Lucas 数之积的斜循环矩阵的行列式及其性质[J]. 应用数学进展, 2020, 9(12): 2129-2138. https://doi.org/10.12677/AAM.2020.912247

指导编委: `Firstname Lastname`
`(function e.g. EiC, journal abbreviation)`

所有作者签名：

李笑丽 雷林 何承源

Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(12), 2129-2138
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.912247

含Pell与Pell-Lucas数之积的斜循环矩阵的行列式及其性质

李笑丽，何承源，雷　林

西华大学理学院，四川 成都
Email: lxl1970217218@163.com

收稿日期：2020年11月23日；录用日期：2020年12月8日；发布日期：2020年12月15日

摘　要

首先定义**n**阶斜循环矩阵 $A_n = SCirc(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n)$，以及**n**阶左斜循环矩阵 $A_n'' = SCirc(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n)$，其中 ζ_n 是第**n**个**Pell**数和第**n**个**Pell-Lucas**数之积。该文章通过构造变换矩阵的方法研究了 A_n 的行列式，并通过引理**[4]**中的范数公式、行最大范数公式和列最大范数公式求得 A_n 的上述三种范数，以及通过引理**[5]**和引理**[6]**中的公式得到 A_n 的扩展式的上、下界。并利用循环量和左循环量之间的关系，将以上这些结论推广到 A_n'' 中，求得 A_n'' 的行列式、范数、行最大范数、列最大范数及其扩展式的上、下界。文章的最后，通过两个数值例子进一步说明上述所得结论的正确性。

关键词

行列式，范数，**Pell**数列，**Pell-Lucas**数列，斜循环矩阵

Determinants and Properties of Skew Circulant Matrices Involving the Product of Pell Numbers and Pell-Lucas Numbers

Xiaoli Li, Chengyuan He, Lin Lei

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: lxl1970217218@163.com

Received: Nov. 23rd, 2020; accepted: Dec. 8th, 2020; published: Dec. 15th, 2020

文章引用：李笑丽，何承源，雷林．含 Pell 与 Pell-Lucas 数之积的斜循环矩阵的行列式及其性质[J]．应用数学进展，2020, 9(12): 2129-2138. DOI: 10.12677/aam.2020.912247

Abstract

First defining the *n*-th order skew circulant matrix $A_n = SCirc(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n)$ and the *n*-th order left skew circulant matrix $A_n'' = SCirc(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n)$, where ζ_n is the product of the *n*-th Pell number and the *n*-th Pell-Lucas number, this article studies the determinant of $A_n = SCirc(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n)$ through the method of constructing a transformation matrix, and obtains the norm, row maximum norm and column maximum norm of A_n through the formula in Lemma [4], and through the formula in Lemma [5] and Lemma [6] gives the upper and lower bounds of the expansion of A. And using the relationship between the amount of circulation and the amount of left circulation, the above conclusions are extended to A_n'', and the determinant, norm, row maximum norm, column maximum norm, and upper and lower bounds of A_n'' expansion are obtained. At the end of the article, two numerical examples are used to further illustrate the correctness of the above conclusions.

Keywords

Determinant, Norm, Pell Number, Pell-Lucas Number, Skew Circulant Matrix

1. 引言

循环矩阵在编码、预处理器、通信、信号处理、图像处理、解决 Toeplitz 矩阵问题等领域中起着重要的作用[1] [2] [3]。近年来，矩阵理论工作者对包含著名数列的循环矩阵进行了一系列的研究，如循环矩阵的行列式、范数、逆矩阵及扩展式等。如[4]中通过构造变换矩阵给出具有 Fibonacci 和 Lucas 数的斜循环的行列式，以及利用左斜循环矩阵和斜循环矩阵之间的关系求得左斜循环矩阵的行列式；[5]中使用多项式的逆因式分解给出涉及 Perrin，Padovan，Tribonacci 和广义 Lucas 数的这些矩阵的确切行列式；[6]是由获得的新公式来计算 H 矩阵的行列式。文献[7]利用 Pell 和 Pell-Lucas 数的一些性质来获得斜循环量和左斜循环量矩阵的行列式；[8]是关于求 Fibonacci 数和 Lucas 数的循环矩阵的范数；[9] [10] [11]均是先证明矩阵的可逆性，求出矩阵的行列式进一步写出其逆矩阵；[12]用 Tribonacci 数和广义 Lucas 数来表示循环矩阵和左循环矩阵的扩展式的上下界。文献[13]给出了以 Fibonacci 数和 Lucas 数之积为元素的斜循环矩阵的行列式、逆矩阵和范数等；郑和顺[10]研究了广义 Lucas 斜循环矩阵的精确行列式和逆矩阵；Bozkurt [11]给出了带有 Pell 和 Pell-Lucas 数列的经典循环矩阵的行列式和逆矩阵。[14]研究了包含 Pell 和 Pell-Lucas 数之和的斜循环矩阵行列式、范数等。受上述研究的启发，本文将对以 Pell 与 Pell-Lucas 数之积为元素的斜循环矩阵、左斜循环矩阵的行列式、范数及扩展式的上下界进行研究。

2. 定义和引理

定义 1 [15]已知 Pell 数列$\{P_n\}$：$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$，其中$P_0 = 0$，$P_1 = 1$，$P_2 = 2$，$n \ge 0$；

Pell-Lucas 数列$\{Q_n\}$：$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n$，其中$Q_0 = 2$，$Q_1 = 2$，$Q_2 = 6$，$n \ge 0$。定义新数列$\{\zeta_n\}$满足以下递推关系：

$$\zeta_{n+2}=6\zeta_{n+1}-\zeta_n\text{，其中}\zeta_1=2\text{，}\zeta_2=12\text{，}n\ge 1\text{，} \tag{1}$$

其中 ζ_n 是第 n 个 Pell 数和第 n 个 Pell-Lucas 数之积。新数列 $\{\zeta_n\}$ 的前几个值如下表：

n	1	2	3	4	5
ζ_n	2	12	70	408	2378

新数列 $\{\zeta_n\}$ 的 Binet 公式如下：

$$\zeta_n=\frac{2\alpha^n-2\beta^n}{\alpha-\beta}, \tag{2}$$

其中 α 和 β 是特征方程 $x^2-6x+1=0$ 的两个不同的根。

定义 2 **[16]**以数列 $\{\zeta_n\}$ 为元素的 n 阶斜循环矩阵

$$A_n=SCirc\left(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n\right)=\begin{pmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_n\\ -\zeta_n & \zeta_1 & \cdots & \zeta_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\zeta_3 & -\zeta_4 & \cdots & \zeta_2\\ -\zeta_2 & -\zeta_3 & \cdots & \zeta_1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

定义 3 **[16]**以数列 $\{\zeta_n\}$ 为元素的 n 阶左斜循环矩阵

$$A_n''=SLCirc\left(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n\right)=\begin{pmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_n\\ \zeta_2 & \zeta_3 & \cdots & -\zeta_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \zeta_{n-1} & \zeta_n & \cdots & -\zeta_{n-2}\\ \zeta_n & -\zeta_1 & \cdots & -\zeta_{n-1}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

引理 1 **[6]**设每个矩阵 $X_n=\left(H_{k,n-1},H_{k,n},H_{k,n},H_{k,n+1}\right)$ 的项为广义 k-horadam 数。当 $n\ge 1$ 时有

$$\left|X_{\mathrm{n}}\right|=\left(-g\left(k\right)\right)^{n-1}\left(a^2g\left(k\right)+abf\left(k\right)-b^2\right).$$

引理 2

i) $$\sum_{k=1}^{n}\zeta_k=\frac{\zeta_{n+1}-\zeta_n-2}{4}, \tag{5}$$

ii) $$\sum_{k=1}^{n}k\zeta_k=\frac{\left(5n-1\right)\zeta_n-n\zeta_{n-1}}{4}, \tag{6}$$

iii) $$\sum_{k=1}^{n}\zeta_k^2=\frac{\zeta_{n+1}^2-\zeta_n^2-8n-4}{32}, \tag{7}$$

iv) $$\sum_{i=1}^{n}\zeta_i a^i=\frac{\zeta_n a^{n+2}-\zeta_{n+1}a^{n+1}+2a}{a^2-6a+1}. \tag{8}$$

证明：

i) 由(1)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k &= \zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\cdots+\zeta_n \\ &= \zeta_1+\left(6\zeta_1-\zeta_0\right)+\left(6\zeta_2-\zeta_1\right)+\cdots+\left(6\zeta_{n-1}-\zeta_{n-2}\right) \quad \left(a\neq 3\pm 2\sqrt{2}\right) \\ &= 5\sum_{k=1}^{n}\zeta_k-5\zeta_{n\text{-}1}-5\zeta_n+6\zeta_{n\text{-}1}-\zeta_0+\zeta_1\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\zeta_k=\frac{\zeta_{n+1}-\zeta_n-2}{4}. \tag{9}$$

ii) 由(1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\zeta_k &= \zeta_1+2\zeta_2+3\zeta_3+\cdots+n\zeta_n \\ &= \zeta_1+2\left(6\zeta_1-\zeta_0\right)+3\left(6\zeta_2-\zeta_1\right)+\cdots+n\left(6\zeta_{n-1}-\zeta_{n-2}\right). \\ &= 5\sum_{k=1}^{n}k\zeta_k+4\sum_{k=1}^{n}\zeta_k-\left(5n+4\right)\zeta_n+\left(n+1\right)\zeta_{n-1}-2\zeta_0+\zeta_1\end{aligned} \tag{10}$$

于是，由(9)和(10)得

$$\sum_{k=1}^{n}k\zeta_k=\frac{\left(5n-1\right)\zeta_n-n\zeta_{n-1}}{4}.$$

iii) 令 $\chi_i=\begin{pmatrix}\zeta_{i-1} & \zeta_i \\ \zeta_i & \zeta_{i+1}\end{pmatrix}$。由[6]引理 1 知当 $i\geq 1$ 时，有 $\left|\chi_i\right|=\zeta_{i-1}\zeta_{i+1}-\zeta_i^2=-4$。

对 $\{\zeta_n\}$ 有

$$\zeta_n=\frac{\zeta_{n+1}+\zeta_{n-1}}{6}. \tag{11}$$

因此，从(11)式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\zeta_{k+1}+\zeta_{k-1}}{6}\right]^2=\frac{\sum_{k=1}^{n}\zeta_{k+1}^2+\sum_{k=1}^{n}\zeta_{k-1}^2+2\sum_{k=1}^{n}\zeta_{k+1}\zeta_{k-1}}{36} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n}\zeta_{k+1}^2+\sum_{k=1}^{n}\zeta_{k-1}^2+2\sum_{k=1}^{n}\zeta_k^2-8n}{36} \\ &= \frac{4\sum_{k=1}^{n}\zeta_k^2+\zeta_{k+1}^2-\zeta_k^2+\zeta_0^2-\zeta_1^2-8n}{36}\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\zeta_k^2=\frac{\zeta_{n+1}^2-\zeta_n^2-8n-4}{32}.$$

iv) 令

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i a^i=\zeta_1 a+\zeta_2 a^2+\cdots+\zeta_n a^n. \tag{12}$$

由(1)和(12)以及下面给出的公式

$$a^2S_n=\zeta_1a^3+\zeta_2a^4+\cdots+\zeta_na^{n+2},$$

$$6aS_n=6\zeta_1a^2+6\zeta_2a^3+\cdots+6\zeta_na^{n+1}.$$

可得

$$\left(a^2-6a+1\right)S_n=\zeta_na^{n+2}-\zeta_{n+1}a^{n+1}+2a.$$

因此

$$S_n=\frac{\zeta_na^{n+2}-\zeta_{n+1}a^{n+1}+2a}{a^2-6a+1},\left(a\neq3\pm2\sqrt{2}\right).$$

引理 3 [4]斜循环矩阵和左斜循环矩阵满足下列关系式

$$SCirc\left(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\right)=\Delta SLCirc\left(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\right).$$

这里 $\Delta=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&-1\\0&0&\cdots&-1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&-1&\cdots&0&0\end{pmatrix}_{n\times n}$.

引理 4 [12]若矩阵 $A_n=SCirc\left(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n\right)$，定义 A_n 的最大列和范数 $\|A_n\|_1$ 、最大行和范数 $\|A_n\|_\infty$ 和 Frobenius 范数 $\|A_n\|_F$ 如下：

$$\|A_n\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|,\quad\|A_n\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|,\quad\|A_n\|_F=\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

引理 5 [17]设 $\lambda_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 是 n 阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 的特征值，定义 A 的扩展式 $s\left(A\right)=\max_{i,j}\left|\lambda_i-\lambda_j\right|$，则 A 的扩展式 $s\left(A\right)$ 的上界满足

$$s\left(A\right)\le\sqrt{a\|A\|_F^2-\frac{2}{n}|trA|^2},$$

这里 $\|A\|_F$ 是 Frobenius 范数，trA 是 A 的迹。

引理 6 [18] 1) 若 $A=\left(a_{ij}\right)$ 是 n 阶矩阵，当 A 是正规实循环矩阵，则有

$$s\left(A\right)\ge\left(1/\left(n-1\right)\right)\left|\sum\nolimits_{i\neq j}a_{ij}\right|,$$

2) 若 A 是 Hermitian 矩阵，则 $s\left(A\right)\ge2\max_{i\neq j}\left|a_{ij}\right|$。

3. 以 Pell 数和 Pell-Lucas 数之积为元素的斜循环矩阵的行列式、范数及其扩展式的上下界

定理 1 若 $A_n=SCirc\left(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n\right)$，则

$$\det A_n=\frac{4\zeta_n^n+4\left(2+\zeta_{n+1}\right)^n}{\left(2+\zeta_{n+1}\right)^2-6\zeta_n\left(2+\zeta_{n+1}\right)+\zeta_n^2},\tag{13}$$

这里 ζ_n 表示第 n 个 Pell 数和第 n 个 Pell-Lucas 数之积。

证明 由已知的矩阵 A_n，可得 $\det A_1=1$，$\det A_2=148$ 以及 $\det A_3=346320$。

当 $n>3$ 时，构造矩阵 $\Sigma=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -6 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$，

和

$$\Omega_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\zeta_n}{2+\zeta_{n+1}}\right)^{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \left(\frac{\zeta_n}{2+\zeta_{n+1}}\right)^{n-3} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \left(\frac{\zeta_n}{2+\zeta_{n+1}}\right)^{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\zeta_n}{2+\zeta_{n+1}} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

则

$$\Sigma A_n\Omega_1=\begin{pmatrix} \zeta_1 & l_n' & \zeta_{n-1} & \zeta_{n-2} & \cdots & \zeta_3 & \zeta_2 \\ 0 & l_n & \zeta_{n-2} & \zeta_{n-3} & \cdots & \zeta_2 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & \zeta_1+\zeta_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta_n & \zeta_1+\zeta_{n+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \zeta_1+\zeta_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\zeta_n & \zeta_1+\zeta_{n+1} \end{pmatrix}_{n\times n}, \tag{14}$$

其中 $l_n'=\sum_{k=1}^{n-1}\zeta_{k+1}\left(\frac{\zeta_n}{2+\zeta_{n+1}}\right)^{n-1-k}$，$l_n=\sum_{k=1}^{n-2}\zeta_k\left(\frac{\zeta_n}{2+\zeta_{n+1}}\right)^{n-1-k}+6\zeta_n+2$。

由(8)进一步简化 l_n' 及 l_n 可得：

$$l_n'=\frac{2\zeta_n\left(2+\zeta_{n+1}\right)^{n-1}-2\zeta_n^{n-1}\left(2+6\zeta_n+\zeta_{n+1}\right)}{\left(2+\zeta_{n+1}\right)^{n-2}\left[\left(2+\zeta_{n+1}\right)^2-6\zeta_n\left(2+\zeta_{n+1}\right)+\zeta_n^2\right]}, \tag{15}$$

$$l_n=\frac{2\zeta_n^n+2\left(2+\zeta_{n+1}\right)^n}{\left(2+\zeta_{n+1}\right)^{n-2}\left[\left(2+\zeta_{n+1}\right)^2-6\zeta_n\left(2+\zeta_{n+1}\right)+\zeta_n^2\right]}. \tag{16}$$

对(14)式两端取行列式，有

$$\left|\Sigma A_n\Omega_1\right|=2l_n\left(2+\zeta_{n+1}\right)^{n-2}=\frac{4\zeta_n^n+4\left(2+\zeta_{n+1}\right)^n}{\left(2+\zeta_{n+1}\right)^2-6\zeta_n\left(2+\zeta_{n+1}\right)+\zeta_n^2}$$

其中 $|\Sigma| = |\Omega_1| = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$，所以

$$\det A_n = \frac{4\zeta_n^n + 4\left(2+\zeta_{n+1}\right)^n}{\left(2+\zeta_{n+1}\right)^2 - 6\zeta_n\left(2+\zeta_{n+1}\right) + \zeta_n^2}.$$

推论 1 若 $A_n = SCirc\left(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n\right)$，则矩阵 A_n 可逆。

证明由定理 1 可知 $|A_n| \neq 0$，则所证成立。

定理 2 若 $A_n = SCirc\left(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n\right)$，则

$$\|A_n\|_1 = \|A_n\|_\infty = \frac{\zeta_{n+1} - \zeta_n - 2}{4}, \tag{17}$$

$$\|A_n\|_F = \sqrt{\frac{n\left(\zeta_{n+1}^2 - \zeta_n^2 - 8n - 4\right)}{32}}, \tag{18}$$

这里 ζ_n 是第 n 个 Pell 数与第 n 个 Pell-Lucas 数之积。

证明 由引理 4，(5)以及(7)可得

$$\|A_n\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i| = \frac{\zeta_{n+1} - \zeta_n - 2}{4}, \quad \|A_n\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} |\zeta_i| = \frac{\zeta_{n+1} - \zeta_n - 2}{4},$$

$$\|A_n\|_F = \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} |\zeta_i|^2} = \sqrt{\frac{n\left(\zeta_{n+1}^2 - \zeta_n^2 - 8n - 4\right)}{32}}.$$

定理 3 若 $A_n = SCirc\left(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n\right)$，则其扩展式 $s(A_n)$ 的上下界满足

$$\frac{\left|-1 - \frac{5}{2}n + \frac{n}{4}\zeta_n + \frac{2-n}{4}\zeta_{n+1}\right|}{n-1} \leq s(A_n) \leq \sqrt{\frac{n\left(\zeta_{n+1}^2 - \zeta_n^2 - 8n - 4\right)}{16} - 8n}, \tag{19}$$

这里 ζ_n 是第 n 个 Pell 数与第 n 个 Pell-Lucas 数之积。

证明 已知 A_n 的迹 $trA_n = n\zeta_1 = 2n$，A_n 的非对角线元素之和

$$l(A_n) = \sum_{k=2}^{n} (n-k+1)\zeta_k - \sum_{k=2}^{n} (k-1)\zeta_k = (n+2)\sum_{k=2}^{n} \zeta_k - 2\sum_{k=2}^{n} k\zeta_k.$$

由(5)和(6)得

$$l(A_n) = -1 - \frac{5}{2}n + \frac{n}{4}\zeta_n + \frac{2-n}{4}\zeta_{n+1}.$$

斜循环矩阵 A_n 满足 $A_n^H A_n = A_n A_n^H$ （A_n^H 是 A_n 的共轭转置)，所以 A_n 是正规矩阵。又因为 A_n 是正规实循环矩阵，由引理 5 和引理 6 及(18)得

$$\frac{\left|-1 - \frac{5}{2}n + \frac{n}{4}\zeta_n + \frac{2-n}{4}\zeta_{n+1}\right|}{n-1} \leq s(A_n) \leq \sqrt{\frac{n\left(\zeta_{n+1}^2 - \zeta_n^2 - 8n - 4\right)}{16} - 8n}.$$

4. 以 Pell 数和 Pell-Lucas 数之积为元素的左斜循环矩阵的行列式、范数和其扩展式的上下界

定理 4 若 $A_n'' = SLCirc\left(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots, \zeta_n\right)$，则

$$\det A_n''=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{4\zeta_n^n+4\left(2+\zeta_{n+1}\right)^n}{\left(2+\zeta_{n+1}\right)^2-6\zeta_n\left(2+\zeta_{n+1}\right)+\zeta_n^2}, \tag{20}$$

这里 ζ_n 表示第 n 个 Pell 数与第 n 个 Pell-Lucas 数之积。

证明 由引理 3 可知 $SCirc\left(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\right)=\Delta SLCirc\left(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\right)$，则 $\det A_n''=\det\Delta^{-1}\cdot\det A_n$。其中 $\det\Delta^{-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，即证得

$$\det A_n''=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{4\zeta_n^n+4\left(2+\zeta_{n+1}\right)^n}{\left(2+\zeta_{n+1}\right)^2-6\zeta_n\left(2+\zeta_{n+1}\right)+\zeta_n^2}.$$

推论 2 若 $A_n''=SLCirc\left(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n\right)$，则 A_n'' 可逆。

定理 5 若 $A_n''=SLCirc\left(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n\right)$，则

$$\left\|A_n''\right\|_1=\left\|A_n''\right\|_\infty=\frac{\zeta_{n+1}-\zeta_n-2}{4}, \tag{21}$$

$$\left\|A_n''\right\|_F=\sqrt{\frac{n\left(\zeta_{n+1}^2-\zeta_n^2-8n-4\right)}{32}}, \tag{22}$$

这里 ζ_n 是第 n 个 Pell 数和第 n 个 Pell-Lucas 数之积。

证明 利用与定理 2 相同的证明方法，即可得结论。

定理 6 若 $A_n''=SLCirc\left(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\cdots,\zeta_n\right)$，则其扩展式 $s\left(A_n''\right)$ 的上下界

$$2\zeta_n\le s\left(A_n\right)\le\begin{cases}\sqrt{\frac{n}{16}\left(\zeta_{n+1}^2-\zeta_n^2-8n-4\right)-\frac{1}{32n}\left(7\zeta_n-\zeta_n+2\right)^2}, & n\text{是奇数}\\ \sqrt{\frac{n}{16}\left(\zeta_{n+1}^2-\zeta_n^2-8n-4\right)}, & n\text{是偶数}\end{cases}$$

这里 ζ_n 是第 n 个 Pell 数与第 n 个 Pell-Lucas 数之积。

证明 因矩阵 A_n'' 是对称矩阵，所以由引理 5 和引理 6 可知

$$2\max\left|A_i''\right|\le s\left(A_n''\right)\le\sqrt{2\left\|A_n''\right\|_F^2-\frac{2}{n}\left|trA_n''\right|^2}.$$

对 A_n'' 有 $2\max\left|A_i''\right|=2\zeta_n$。由定理 5 可得

$$\left\|A_n''\right\|_F=\sqrt{\frac{n\left(\zeta_{n+1}^2-\zeta_n^2-8n-4\right)}{32}}.$$

当 n 为奇数时，有

$$tr\left(A_n''\right)=\zeta_1-\zeta_2+\zeta_3-\cdots+\zeta_n=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\zeta_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\zeta_{2i}.$$

又 $\zeta_{n+2}=6\zeta_{n+1}-\zeta_n$，其中 $\zeta_1=2,\zeta_2=12$，所以

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\zeta_{2i+1}-\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\zeta_{2i}=5\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\zeta_{2i}-\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\zeta_{2i+1}+\zeta_1+\zeta_n,\quad\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\zeta_{2i}=6\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\zeta_{2i+1}-6\zeta_1-6\zeta_n-\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\zeta_{2i}+\zeta_2+\zeta_{n-1}.$$

化简得 $tr\left(A_n''\right)=\frac{1}{8}\left(7\zeta_n-\zeta_{n-1}+2\right)$。若 n 是偶数，则

$$tr\left(A_n''\right)=\zeta_1-\zeta_1+\zeta_3-\zeta_3+\cdots+\zeta_{n-1}-\zeta_{n-1}=0.$$

综上所述

$$2\zeta_n \le s\left(A_n''\right) \le \begin{cases} \sqrt{\dfrac{n}{16}\left(\zeta_{n+1}^2-\zeta_n^2-8n-4\right)-\dfrac{1}{32n}\left(7\zeta_n-\zeta_{n-1}+2\right)^2}, & n\text{是奇数} \\ \sqrt{\dfrac{n}{16}\left(\zeta_{n+1}^2-\zeta_n^2-8n-4\right)}, & n\text{是偶数} \end{cases}.$$

5. 数值例子

例 1. 设矩阵 $A_5=\begin{bmatrix} 2 & 12 & 70 & 408 & 2378 \\ -2378 & 2 & 12 & 70 & 408 \\ -408 & -2378 & 2 & 12 & 70 \\ -70 & -408 & -2378 & 2 & 12 \\ -12 & -70 & -408 & -2378 & 2 \end{bmatrix}$，求 A_5 的行列式、范数及其扩展式的上和下界。

解 由 MATLAB 中求矩阵的行列式公式，计算得 $\det A_5=7.6087\mathrm{e}+016$，根据(13)可得 $\det A_5=7.6087\mathrm{e}+016$。有引理 4 可得

$$\left\|A_5\right\|_1=\left\|A_5\right\|_\infty=2870，\left\|A_5\right\|_F=\sqrt{29131980}$$

又可根据(17)以及(18)分别得 A_5 的三种范数

$$\left\|A_5\right\|_1=\left\|A_5\right\|_\infty=2870，\left\|A_5\right\|_F=\sqrt{29131980}.$$

从引理 5 及引理 6 可得 $\dfrac{14419}{2}\le s\left(A_5\right)\le\sqrt{58263920}$，以及由(19)可得 A_5 扩展式的上、下界为 $\dfrac{14419}{2}\le s\left(A_5\right)\le\sqrt{58263920}$。

例 2. 设矩阵 $A_5''=\begin{bmatrix} 2 & 12 & 70 & 408 & 2378 \\ 12 & 70 & 408 & 2378 & -2 \\ 70 & 408 & 2378 & -2 & -12 \\ 408 & 2378 & -2 & -12 & -70 \\ 2378 & -2 & -12 & -70 & -408 \end{bmatrix}$，求 A_5'' 的行列式、范数及其扩展式的上下界。

解 在 MATLAB 中输入矩阵，再用求矩阵行列式的公式，求得 $\det A_5''=7.6087\mathrm{e}+016$，又因(20)可得 $\det A_5''=7.6087\mathrm{e}+016$。因引理 4 可得

$$\left\|A_5''\right\|_1=\left\|A_5''\right\|_\infty=2870，\left\|A_5\right\|_F=\sqrt{29131980},$$

再由(21)和(22)得

$$\left\|A_5''\right\|_1=\left\|A_5''\right\|_\infty=2870，\left\|A_5\right\|_F=\sqrt{29131980}.$$

从引理 5 及引理 6 可求得 $4756\le s\left(A_5''\right)\le\sqrt{56615560}$，由定理 6 得 $4756\le s\left(A_5''\right)\le\sqrt{56615560}$。

致　谢

对提供帮助的老师同学以及那些为提高论文质量做出贡献的审稿人表示衷心的感谢。

参考文献

[1] Hellings, C. and Utschick, W. (2015) Block-Skew-Circulant Matrices in Complex-Valued Signal Processing. *IEEE Transactions on Signal Process*, **63**, 2093-2107. https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2395992

[2] Huckle, T. (1992) Circulant and Skewcirculant Matrices for Solving Toeplitz Matrix Problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis & Applications*, **13**, 767-777. https://doi.org/10.1137/0613048

[3] Fu, D.Q., Jiang, Z.L., Cui, Y.F. and Jhang, S.T. (2014) New Fast Algorithm for Optimal Design of Block Digital Filters by Skew-Cyclic Convolution. *IET Signal Processing*, **8**, 633-638. https://doi.org/10.1049/iet-spr.2013.0384

[4] Gao, Y., Jiang, Z.L. and Gong, Y.P. (2013) On the Determinants and Inverses of Skew Circulant and Skew Left Circulant Matrices with Fibonacci and Lucas Numbers. *WSEAS Transactions on Mathematics*, **12**, 472-481.

[5] Jiang, X. and Hong, K. (2014) Exact Determinants of Some Special Circulant Matrices Involving Four Kinds of Famous Numbers. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 273680. https://doi.org/10.1155/2014/273680

[6] Yazlik, Y. and Taskara, N. (2013) On the Norms of an *r*-Circulant Matrix with the Generalized *k*-Horadam Numbers. *Journal of Inequalities & Applications*, **2013**, Article No. 394. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-394

[7] Yao, J.J. and Sun, J.X. (2018) Explicit Determinants and Inverses of Skew Circulant and Skew Left Circulant Matrices with the Pell-Lucas Numbers. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, **26**, 1-16. https://doi.org/10.9734/JAMCS/2018/38768

[8] Solak, S. (2005) On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas Numbers. *Applied Mathematics and Computation*, **160**, 125-132. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.08.126

[9] Shen, S.Q., Cen, J.M. and Hao, Y. (2011) On the Determinants and Inverses of Circulant Matrices with Fibonacci and Lucas Numbers. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 9790-9797. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.04.072

[10] Zheng, Y.P. and Shon, S. (2015) Exact Determinants and Inverses of Generalized Lucas Skew Circulant Type Matrices. *Applied Mathematics and Computation*, **270**, 105-113. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.021

[11] Bozkurt, D. and Yılmaz, F. (2012) On the Determinants and Inverses of Circulant Matrices with Pell and Pell-Lucas Numbers. *Mathematics*: *Numerical Analysis*. arXiv:1201.6061.

[12] Li, J., Jiang, Z.L. and Lu, F.L. (2014) Determinants, Norms, and the Spread of Circulant Matrices with Tribonacci and Generalized Lucas Numbers. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 381829. https://doi.org/10.1155/2014/381829

[13] Wei, Y.L., Zheng, Y.P., Jiang, Z.L. and Shon, S. (2020) Determinants, Inverses, Norms, and Spreads of Skew Circulant Matrices Involving the Product of Fibonacci and Lucas Numbers. *Journal of Mathematics and Computer Science*, **20**, 64-78. https://doi.org/10.22436/jmcs.020.01.08

[14] Wei, Y.L., Zheng, Y.P., Jiang, Z.L. and Shon, S. (2020) Determinants, Norms and Spreads of Skew Circulant Matrices Involving the Sum of Pell and Pell-Lucas Numbers. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, **23**, 13-24. https://doi.org/10.17654/DM023010013

[15] Lu, F. and Jiang, Z. (1994) The Sum and Product of Fibonacci Numbers and Lucas Numbers, Pell Numbers and Pell-Lucas Numbers Representation by Matrix Method. *WSEAS Transactions on Mathematics*, **12**, 449-458.

[16] Karner, H., Schneid, J. and Ueberhuber, C.W. (2003) Spectral Decomposition of Real Circulant Matrices. *Linear Algebra Applications*, **367**, 301-311. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00664-X

[17] Sharma, R. and Kumar, R. (2013) Remark on Upper Bounds for the Spread of a Matrix. *Linear Algebra and its Applications*, **438**, 4359-4362. https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.01.018

[18] Johnson, C.R., Kumar, R. and Wolkowicz, H. (1985) Lower Bounds for the Spread of a Matrix. *Linear Algebra and its Applications*, **71**, 161-173. https://doi.org/10.1016/0024-3795(85)90244-7