

矩阵代数上的2-局部Lie导子

高永兰*, 安润玲

太原理工大学数学学院, 山西 晋中
Email: *1757908268@qq.com, runlingan@aliyun.com

收稿日期: 2020年11月21日; 录用日期: 2020年12月20日; 发布日期: 2020年12月28日

摘要

设 $M_n(\mathbb{C})$, $T_n(\mathbb{C})$ 分别是矩阵代数和上三角矩阵代数。本文证明若 $L: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ 是2-局部Lie导子, 则存在 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 和映射 $\tau: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{CI}_n$ 使得 $L(A) = TA - AT + \tau(A), \forall A \in M_n(\mathbb{C})$ (*) 其中 $\tau(A+F) = \tau(A), F = [A, B], \forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 。利用该结论证明了 $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_m}(\mathbb{C})$ 到自身的每个2-局部Lie导子具有形式(*)。证明了若 $L: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow T_n(\mathbb{C})$ 是2-局部Lie导子, 且 $L(A+B) - L(A) - L(B) \in \text{CI}_n, \forall A, B \in T_n(\mathbb{C})$, 则L具有形式(*), 并举例说明条件 $L(A+B) - L(A) - L(B) \in \text{CI}_n$ 不可去。本文还刻画了 $T_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus T_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus T_{n_m}(\mathbb{C})$ 到自身的2-局部Lie导子。

关键词

导子, Lie导子, 2-局部Lie导子

2-Local Lie Derivations on Matrix Algebras

Yonglan Gao*, Runling An

Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi
Email: *1757908268@qq.com, runlingan@aliyun.com

Received: Nov. 21st, 2020; accepted: Dec. 20th, 2020; published: Dec. 28th, 2020

Abstract

Let $M_n(\mathbb{C})$ be a matrix algebra, and $T_n(\mathbb{C})$ be an upper triangular matrix algebra. In this paper, we show that, if $L: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ is a 2-local Lie derivation, then there exist a matrix

*通讯作者。

$T \in M_n(\mathbb{C})$ and a map $\tau: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$ such that $L(A) = TA - AT + \tau(A), \forall A \in M_n(\mathbb{C})$ (*) where $\tau(A + F) = \tau(A), F = [A, B], \forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$. As its application, we show every 2-local Lie derivation from $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_m}(\mathbb{C})$ into itself has the form (*). In addition, we show that, if $L: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow T_n(\mathbb{C})$ is a 2-local Lie derivation and satisfies $L(A + B) - L(A) - L(B) \in \mathbb{C}I_n, \forall A, B \in T_n(\mathbb{C})$, then L has the form (*). An example is given to show that the condition $L(A + B) - L(A) - L(B) \in \mathbb{C}I_n$ is necessary. 2-local Lie derivations from $T_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus T_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus T_{n_m}(\mathbb{C})$ into itself are also characterized.

Keywords

Derivations, Lie Derivations, 2-Local Lie Derivations

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 \mathcal{A} 是结合代数, $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 为 \mathcal{A} 的中心。称线性映射 $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 为导子, 若等式 $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B), \forall A, B \in \mathcal{A}$ 成立, 称 $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 为内导子, 若存在 $T \in \mathcal{A}$, 等式 $\delta(A) = TA - AT, \forall A \in \mathcal{A}$ 成立。近年来, 随着不同代数结构上导子理论的丰富和发展, 专家学者开始关注映射的局部性质, 其中有趣的问题是局部映射在什么条件下能够成为全局的映射或者在何种代数上的局部映射是全局映射。关于局部导子的研究, 其奠基者是 R. Kadison [1], D. Larson 和 A. Sourour [2], 称线性映射 $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 为局部导子, 若对 $\forall A \in \mathcal{A}$, 存在依赖于 A 的导子 $\delta_A: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 使得 $\delta(A) = \delta_A(A)$ 。过去十多年里, 局部导子的研究已经取得了很多深刻的结果 [1] [2] [3] [4]。1997 年, P. Semrl 在文献 [5] 中首次研究了代数上的 2-局部导子, 称映射 (无线性或连续假设) $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 为 2-局部导子, 若对 $\forall A, B \in \mathcal{A}$, 存在依赖于 A, B 的导子 $\delta_{A,B}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 使得 $\delta(A) = \delta_{A,B}(A), \delta(B) = \delta_{A,B}(B)$ 。P. Semrl [5] 刻画了无限维可分 Hilbert 空间上的所有有界线性算子构成的代数 $B(H)$ 上的这类映射, 后来, 文献 [6] 用比较短的证明方法刻画了有限维的情况下此类映射的结构, 得到了类似的结果。关于 2-局部导子的结论, 文献 [7] 中作者证明了当 $n \geq 3$ 时, $M_n(\mathcal{A})$ 到 $M_n(\mathcal{M})$ 的 2-局部导子是导子, 其中 \mathcal{A} 是有单位元的 Banach 代数, 满足任意从 \mathcal{A} 到 \mathcal{A} 的双模 \mathcal{M} 的 Jordan 导子是导子。

与代数上的一般积相关的是导子, 而关于代数上的 Lie 积可以定义 Lie 导子。称线性映射 $L: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 为 Lie 导子, 若 $L([A, B]) = [L(A), B] + [A, L(B)], \forall A, B \in \mathcal{A}$, 其中 $[A, B] = AB - BA$ 为 A, B 的 Lie 积。Lie 导子 L 是标准的, 若存在导子 $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 和线性映射 $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 使得 $L(A) = \delta(A) + \tau(A), \forall A \in \mathcal{A}$, 其中 $\tau[A, B] = 0, \forall A, B \in \mathcal{A}$ 。类似于局部导子和 2-局部导子, 自然地可以定义局部 Lie 导子和 2-局部 Lie 导子, 文献 [8] 首次提出了局部 Lie 导子和 2-局部 Lie 导子的概念, 称线性映射 $L: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 为局部 Lie 导子, 若对 $\forall A \in \mathcal{A}$, 存在依赖于 A 的 Lie 导子 $L_A: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 使得 $L(A) = L_A(A)$ 。映射 (无线性或连续假设) $L: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 称为 2-局部 Lie 导子, 若对 $\forall A, B \in \mathcal{A}$, 存在依赖于 A, B 的 Lie 导子 $L_{A,B}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 使得 $L(A) = L_{A,B}(A), L(B) = L_{A,B}(B)$ 。相比于 2-局部导子的研究, 2-局部 Lie 导子的研究还相对较少, 陆芳

言教授[8]研究了维数大于2的Banach空间 X 上的有界线性算子全体构成的代数 $B(X)$ 上的这两类映射, 证明了2-局部Lie导子 $L: B(X) \rightarrow B(X)$ 具有形式

$$L(A) = TA - AT + \tau(A), \quad \forall A \in A, \quad (*)$$

其中 $T \in A$, $\tau: A \rightarrow CI$ 是齐次映射, 满足 $\tau(A+F) = \tau(A)$, $F = [A, B]$, $\forall A, B \in B(X)$, 而其证明方法依赖于 $B(X)$ 上秩一算子的存在性。文献[9]作者运用新的方法证明了维数大于4的半有限因子 von Neumann 代数上的2-局部Lie导子具有类似的结构。

本文刻画矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 和上三角矩阵代数 $T_n(\mathbb{C})$ 上的2-局部Lie导子。证明若 $L: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ 为2-局部Lie导子, 则 L 具有形式(*). 利用该结论刻画了 $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_m}(\mathbb{C})$ 到自身的2-局部Lie导子。证明了若 $L: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow T_n(\mathbb{C})$ 是2-局部Lie导子, 且 $L(A+B) - L(A) - L(B) \in CI_n$, $\forall A, B \in T_n(\mathbb{C})$, 则 L 具有形式(*), 并举例说明条件 $L(A+B) - L(A) - L(B) \in CI_n$ 不可去。本文还刻画了 $T_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus T_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus T_{n_m}(\mathbb{C})$ 到自身的2-局部Lie导子。

2. 主要结果及证明

为方便讨论, 令 $\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ 为 $M_n(\mathbb{C})$ 的矩阵单位, 即 (i,j) 位置为1, 其他位置为0的矩阵, I_n 为 n 阶单位矩阵。设 $U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} E_{i,i}$, $V = \sum_{i=2}^n E_{i-1,i}$, 则若 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 使得 $AU = UA$, 则 A 为对角矩阵。若 $AV = VA$, 则

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

引理 2.1 ([10], Problem 230) 若 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $[A, B] = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则 $\lambda = 0$ 。

引理 2.2 若 $L: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ 为2-局部Lie导子, 则 $L(\alpha A) = \alpha L(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}, A \in M_n(\mathbb{C})$ 。

证明 对 $\forall A, \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, 存在Lie导子 $L_{A, \alpha A}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, 使得

$$L(\alpha A) = L_{A, \alpha A}(\alpha A) = \alpha L_{A, \alpha A}(A) = \alpha L(A). \quad \square$$

定理 2.3 若 $L: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 2$) 为2-局部Lie导子, 则存在 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 和映射 $\tau: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow CI_n$, 使得

$$L(A) = TA - AT + \tau(A), \quad \forall A \in M_n(\mathbb{C}),$$

其中 $\tau(A+F) = \tau(A)$, $F = [A, B]$, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 。

证明 设 $L: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ 为2-局部Lie导子, 则对 $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 存在导子 $\delta_{A,B}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ 及线性映射 $\tau_{A,B}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow CI_n$ 使得

$$L(A) = L_{A,B}(A) = \delta_{A,B}(A) + \tau_{A,B}(A), \quad L(B) = L_{A,B}(B) = \delta_{A,B}(B) + \tau_{A,B}(B),$$

其中 $\tau_{A,B}[C, D] = 0, \forall C, D \in M_n(\mathbb{C})$ 。因为 $M_n(\mathbb{C})$ 上的导子为内导子, 故存在 $T_{A,B} \in M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$L(A) = T_{A,B}A - AT_{A,B} + \tau_{A,B}(A), \quad L(B) = T_{A,B}B - BT_{A,B} + \tau_{A,B}(B), \quad (2)$$

下证(2)中 $\tau_{A,B}(A), \tau_{A,B}(B)$ 是唯一确定的。

若 $L(A) = T_{A,B}A - AT_{A,B} + \tau_{A,B}(A) = S_{A,B}A - AS_{A,B} + f_{A,B}(A)$, 则 $[T_{A,B} - S_{A,B}, A] = f_{A,B}(A) - \tau_{A,B}(A)$, 由

引理 2.1 知 $f_{A,B}(A) - \tau_{A,B}(A) = 0$, $\tau_{A,B}(A) = f_{A,B}(A)$, 所以 $\tau_{A,B}(A), \tau_{A,B}(B)$ 是唯一确定的。

令 $\tau: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$, $\tau(A) = \tau_{A,B}(A)$, $\tau(B) = \tau_{A,B}(B)$, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 则(2)可以重写为

$$L(A) = T_{A,B}A - AT_{A,B} + \tau(A), \quad L(B) = T_{A,B}B - BT_{A,B} + \tau(B), \quad (3)$$

由引理 2.2 和(3)知 $\tau(\alpha A) = \alpha\tau(A), \forall \alpha \in \mathbb{C}, A \in M_n(\mathbb{C})$, 且 $\tau(E_{i,j}) = 0, i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$, 因为 $E_{i,j} = [E_{i,i}, E_{i,j}]$ 。

由(3)知对 $U, V \in M_n(\mathbb{C})$, 存在 $T_{U,V} \in M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$L(U) = T_{U,V}U - UT_{U,V} + \tau(U), \quad L(V) = T_{U,V}V - VT_{U,V} + \tau(V),$$

令 $T = T_{U,V}$, $\delta(A) = TA - AT$, $L'(A) = L(A) - \delta(A)$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 L' 仍是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的 2-局部 Lie 导子。由证明 $\tau_{A,B}(A), \tau_{A,B}(B)$ 的唯一性给出 τ 的定义知 $L'(A)$ 也满足(3), 且 $L'(U) = \tau(U)$, $L'(V) = \tau(V)$ 。

对 $E_{i,i}, i = 1, 2, \dots, n$ 及 U , 存在 $T_{E_{i,i},U} \in M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$L'(U) = T_{E_{i,i},U}U - UT_{E_{i,i},U} + \tau(U), \quad L'(E_{i,i}) = T_{E_{i,i},U}E_{i,i} - E_{i,i}T_{E_{i,i},U} + \tau(E_{i,i}),$$

因为 $L'(U) = \tau(U) \in \mathbb{C}I_n$, 所以由引理 2.1 知 $T_{E_{i,i},U}U = UT_{E_{i,i},U}$, 故 $T_{E_{i,i},U}$ 为对角阵, $T_{E_{i,i},U}E_{i,i} - E_{i,i}T_{E_{i,i},U} = 0$, 故 $L'(E_{i,i}) = \tau(E_{i,i}) \in \mathbb{C}I_n$ 。

对 $E_{i,j}, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ 及 U , 存在 $T_{E_{i,j},U} \in M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$L'(U) = T_{E_{i,j},U}U - UT_{E_{i,j},U} + \tau(U), \quad L'(E_{i,j}) = T_{E_{i,j},U}E_{i,j} - E_{i,j}T_{E_{i,j},U},$$

因为 $L'(U) = \tau(U) \in \mathbb{C}I_n$, 所以由引理 2.1 知 $T_{E_{i,j},U}U = UT_{E_{i,j},U}$, 故 $T_{E_{i,j},U}$ 为对角阵, $L'(E_{i,j}) \in \mathbb{C}E_{i,j}$ 。

对 $E_{i,j}, i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ 及 V 存在 $T_{E_{i,j},V} \in M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$L'(V) = T_{E_{i,j},V}V - VT_{E_{i,j},V} + \tau(V), \quad L'(E_{i,j}) = T_{E_{i,j},V}E_{i,j} - E_{i,j}T_{E_{i,j},V}$$

因为 $L'(V) = \tau(V) \in \mathbb{C}I_n$, 由引理 2.1 知 $T_{E_{i,j},V}V = VT_{E_{i,j},V}$, 故 $T_{E_{i,j},V}$ 形如(1)。由于 $T_{E_{i,j},V}E_{i,j} - E_{i,j}T_{E_{i,j},V}$ 的 (i, j) 位置为 0, 所以 $L'(E_{i,j}) = T_{E_{i,j},V}E_{i,j} - E_{i,j}T_{E_{i,j},V} = T_{E_{i,j},U}E_{i,j} - E_{i,j}T_{E_{i,j},U} = 0$ 。

对 $\forall E_{i,j} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, $A = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}E_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$, 存在内导子 $\delta_{A,E_{i,j}}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$L'(A) = \delta_{A,E_{i,j}}(A) + \tau(A), \quad L'(E_{i,j}) = \delta_{A,E_{i,j}}(E_{i,j}) + \tau(E_{i,j}),$$

由 $L'(E_{i,j}) = \tau(E_{i,j})$ 知 $\delta_{A,E_{i,j}}(E_{i,j}) = 0$ 。因此

$$\begin{aligned} E_{i,j}\delta_{A,E_{i,j}}(A)E_{i,j} &= \delta_{A,E_{i,j}}(E_{i,j}AE_{i,j}) - \delta_{A,E_{i,j}}(E_{i,j})AE_{i,j} - E_{i,j}A\delta_{A,E_{i,j}}(E_{i,j}) \\ &= \delta_{A,E_{i,j}}(a_{j,i}E_{i,j}) - 0 - 0 = a_{j,i}\delta_{A,E_{i,j}}(E_{i,j}) = 0 \end{aligned}$$

即 $\delta_{A,E_{i,j}}(A) = 0$, $L'(A) = \tau(A) \in \mathbb{C}I_n$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ 。故

$$L(A) = \delta(A) + L'(A) = TA - AT + \tau(A), \quad \forall A \in M_n(\mathbb{C}).$$

对 $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 令 $F = [A, B]$, 则存在 $T_{A+F,A} \in M_n(\mathbb{C})$ 及线性映射 $\tau_{A+F,A}: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$, $\tau_{A+F,A}(F) = 0$, 使得

$$\begin{aligned} \tau(A+F) &= L(A+F) - [T, A+F] \\ &= [T_{A+F,A}, A+F] + \tau_{A+F,A}(A+F) - [T, A+F] \\ &= [T_{A+F,A} - T, A+F] + \tau_{A+F,A}(A+F) \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\tau(A) &= L(A) - [T, A] \\ &= [T_{A+F, A}, A] + \tau_{A+F, A}(A) - [T, A] \\ &= [T_{A+F, A} - T, A] + \tau_{A+F, A}(A)\end{aligned}$$

因此

$$\tau(A+F) - \tau(A) = [T_{A+F, A} - T, F] + \tau_{A+F, A}(A+F) - \tau_{A+F, A}(A) = [T_{A+F, A} - T, F] + \tau_{A+F, A}(F) = [T_{A+F, A} - T, F],$$

由引理 2.1 知 $\tau(A+F) = \tau(A)$ 。因此

$$L(A) = TA - AT + \tau(A),$$

其中 $\tau: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$, 且 $\tau(A+F) = \tau(A)$, $F = [A, B]$, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 。 □

下面我们运用类似于定理 2.3 的方法刻画 $T_n(\mathbb{C})$ 上的 2-局部 Lie 导子。

定理 2.4 若 $L: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow T_n(\mathbb{C})$ 为 2-局部 Lie 导子, 则

i) 存在 $T \in T_n(\mathbb{C})$ 及映射 $\tau: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$ 使得 $L(E_{i,j}) = [T, E_{i,j}] (i \neq j)$, $L(E_{i,i}) = [T, E_{i,i}] + \tau(E_{i,i})$,

且 $\sum_{i=1}^n E_{i,i} (L(A) - [T, A]) E_{i,i} = \tau(A)$;

ii) 当 $L(A+B) - L(A) - L(B) \in \mathbb{C}I_n$ 时, 存在 $T \in T_n(\mathbb{C})$ 及映射 $\omega: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$ 使得 $L(A) = TA - AT + \omega(A)$;

特别地, 当 $L(A+B) = L(A) + L(B)$ 时, 存在 $T \in T_n(\mathbb{C})$ 及线性映射 $\omega: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$ 使得 $L(A) = TA - AT + \omega(A)$ 。

证明 i) 由于 $T_n(\mathbb{C})$ 上的 Lie 导子为标准 Lie 导子 [11], 且其上的导子为内导子 ([12], Corollary 2.6), 类似于定理 2.3 的证明, 令 $T = T_{U,V}$, $L'(A) = L(A) - (TA - AT)$, 则 $L'(E_{i,j}) = 0, (i \neq j)$, $L'(E_{i,i}) = \tau(E_{i,i})$, 所以

$$L(E_{i,j}) = [T, E_{i,j}] (i \neq j), \quad L(E_{i,i}) = [T, E_{i,i}] + \tau(E_{i,i}).$$

对 $\forall E_{i,j}$, $A = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} E_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n; i \leq j$, 存在内导子 $\delta_{A, E_{i,j}}: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow T_n(\mathbb{C})$ 及映射 $\tau: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$ 使得 $L'(A) = \delta_{A, E_{i,j}}(A) + \tau(A)$, $L'(E_{i,j}) = \delta_{A, E_{i,j}}(E_{i,j}) + \tau(E_{i,j})$ 。因为 $L'(E_{i,j}) \in \mathbb{C}I_n$, 由引理 2.1 得 $\delta_{A, E_{i,j}}(E_{i,j}) = 0$, 因此

$$E_{i,i} \delta_{A, E_{i,j}}(A) E_{i,i} = \delta_{A, E_{i,j}}(E_{i,i} A E_{i,i}) - E_{i,i} A \delta_{A, E_{i,j}}(E_{i,i}) - \delta_{A, E_{i,j}}(E_{i,i}) A E_{i,i} = a_{i,i} \delta_{A, E_{i,j}}(E_{i,i}) = 0,$$

故 $\sum_{i=1}^n E_{i,i} (L(A) - [T, A]) E_{i,i} = \tau(A)$ 。

ii) 若 $L(A+B) - L(A) - L(B) \in \mathbb{C}I_n$, 则由(i)知 $L(E_{i,j}) = [T, E_{i,j}] (i \neq j)$, $L(E_{i,i}) = [T, E_{i,i}] + \tau(E_{i,i})$ 。对 $\forall A \in T_n(\mathbb{C})$,

记 $\mu(A) = L\left(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} E_{i,j}\right) - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} L(E_{i,j})$, 则

$$\begin{aligned}L(A) &= L\left(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} E_{i,j}\right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} L(E_{i,j}) + \mu(A) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} ([T, E_{i,j}] + \tau(E_{i,j})) + \mu(A) \\ &= \left[T, \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} E_{i,j}\right] + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} \tau(E_{i,j}) + \mu(A) = [T, A] + \omega(A)\end{aligned}$$

其中 $\omega: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$, $\omega(A) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} \tau(E_{i,j}) + \mu(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \tau(E_{i,i}) + \mu(A)$ 。同定理 2.3 中证明

$\tau(A+F) = \tau(A)$ 类似, 可得 $\omega(A+F) = \omega(A)$, $F = [A, B], \forall A, B \in T_n(\mathbb{C})$ 。故

$L(A) = TA - AT + \omega(A), \forall A \in T_n(\mathbb{C})$ 。

当 $L(A+B) = L(A) + L(B)$ 时, $\mu(A) = 0$, $\omega(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \tau(E_{i,i})$ 。由
 $T(A+B) - (A+B)T + \omega(A+B) = L(A+B) = L(A) + L(B) = TA - AT + \omega(A) + TB - BT + \omega(B)$,

知 $\omega(A+B) = \omega(A) + \omega(B), \forall A, B \in T_n(\mathbb{C})$ 。由引理 2.2 知 $\omega(\alpha A) = \alpha \omega(A), \forall \alpha \in \mathbb{C}, A \in T_n(\mathbb{C})$, 因此
 $\omega: T_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_n$ 是线性映射。□

下面的例子表明若上三角矩阵代数 $T_n(\mathbb{C})$ 上的 2-局部 Lie 导子 L 不满足条件
 $L(A+B) - L(A) - L(B) \in \mathbb{C}I_n$, 则 L 不具有定理 2.4 中的形式。

例 2.5 设 $T_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{C} \right\}$ 为 2×2 的上三角矩阵代数, $f: T_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_2$ 为线性映射。对任意的 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{C})$, 定义 $L: T_2(\mathbb{C}) \rightarrow T_2(\mathbb{C}) : L(A) = f(A)$ 若 $a_{11} \neq a_{22}$;

$L(A) = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(A)$ 若 $a_{11} = a_{22}$ 。则 L 为 $T_2(\mathbb{C})$ 上的 2-局部 Lie 导子, 但 L 不满足条件
 $L(A+B) - L(A) - L(B) \in \mathbb{C}I_2$, L 不具有定理 2.4 中的形式。

事实上对 $\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{C})$,

i) 当 $a_{11} \neq a_{22}, b_{11} \neq b_{22}$ 时, 令 $\delta(X) = 0, \forall X \in T_2(\mathbb{C})$, $f: T_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_2$ 为 L 定义中的映射, 则存在 Lie 导子 $L_{A,B}: T_2(\mathbb{C}) \rightarrow T_2(\mathbb{C})$ 为 $L_{A,B}(X) = \delta(X) + f(X), \forall X \in T_2(\mathbb{C})$, 且 $L(A) = f(A) = L_{A,B}(A)$,
 $L(B) = f(B) = L_{A,B}(B)$;

ii) 当 $a_{11} = a_{22}, b_{11} = b_{22}$ 时, 令 $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{C})$, $\delta(X) = TX - XT, \forall X \in T_2(\mathbb{C})$, $f: T_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_2$
 为 L 定义中的映射, 则存在 Lie 导子 $L_{A,B}: T_2(\mathbb{C}) \rightarrow T_2(\mathbb{C})$ 为 $L_{A,B}(X) = \delta(X) + f(X), \forall X \in T_2(\mathbb{C})$, 且
 $L(A) = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(A) = L_{A,B}(A)$, $L(B) = \begin{pmatrix} 0 & -b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(B) = L_{A,B}(B)$;

iii) 当 $a_{11} \neq a_{22}, b_{11} = b_{22}$ 时, 令 $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & a_{12} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\delta(X) = TX - XT, \forall X \in T_2(\mathbb{C})$, $f: T_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_2$

为 L 定义中的映射, 则存在 Lie 导子 $L_{A,B}: T_2(\mathbb{C}) \rightarrow T_2(\mathbb{C})$ 为 $L_{A,B}(X) = \delta(X) + f(X), \forall X \in T_2(\mathbb{C})$, 且
 $L(A) = f(A) = L_{A,B}(A)$, $L(B) = \begin{pmatrix} 0 & -b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(B) = L_{A,B}(B)$ 。类似地若 $a_{11} = a_{22}, b_{11} \neq b_{22}$, 令

$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & b_{12} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\delta(X) = TX - XT$, $L_{A,B}(X) = \delta(X) + f(X), \forall X \in T_2(\mathbb{C})$, 则

$L(A) = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(A) = L_{A,B}(A)$, $L(B) = f(B) = L_{A,B}(B)$ 。

因此 L 为 $T_2(\mathbb{C})$ 上的 2-局部 Lie 导子。当取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{C})$ 时,

$$L(A+B) - L(A) - L(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(A+B) - f(A) - f(B) \notin \mathbb{C}I_2, \quad L \text{ 不满足条件}$$

$$L(A+B) - L(A) - L(B) \in \mathbb{C}I_2.$$

下证 L 不具有形式 $L(A) = TA - AT + f(A)$ 。若 $L(A) = TA - AT + f(A), T \in T_2(\mathbb{C}), f: T_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}I_2$ 。

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$L(A) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix} + f(A) = \begin{pmatrix} 0 & (b-a)t_{12} + c(t_{11}-t_{22}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(A).$$

当 $a \neq b$ 时, 由 L 的定义得 $L(A) = f(A)$, 故 $(b-a)t_{12} + c(t_{11}-t_{22}) = 0$, 取 $a=1, b=2, c=1$ 得 $t_{12} + t_{11} - t_{22} = 0$, 取 $a=2, b=1, c=1$ 得 $-t_{12} + t_{11} - t_{22} = 0$, 所以 $t_{12} = 0, t_{11} = t_{22}$ 。

当 $a = b$ 时, 由 L 的定义得 $L(A) = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(A)$, 另一方面 $L(A) = \begin{pmatrix} 0 & c(t_{11}-t_{22}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(A)$, 因此 $t_{11} - t_{22} = -1$, 矛盾。故 L 不具有形式 $L(A) = TA - AT + f(A)$ 。

定理 2.6 i) 若 $\mathcal{A} = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_m}(\mathbb{C})$, $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 为 \mathcal{A} 的中心, $I = I_{n_1} \oplus I_{n_2} \oplus \cdots \oplus I_{n_m}$ 为 \mathcal{A} 的单位元, $L: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 为 2-局部 Lie 导子, 则存在 $T \in \mathcal{A}$ 及映射 $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 使得 $L(A) = [T, A] + \tau(A), \forall A \in \mathcal{A}$, 其中 $\tau(A+F) = \tau(A), F = [A, B], \forall A, B \in \mathcal{A}$ 。

ii) 若 $\mathcal{A} = T_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus T_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus T_{n_m}(\mathbb{C})$, $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 为 \mathcal{A} 的中心, $I = I_{n_1} \oplus I_{n_2} \oplus \cdots \oplus I_{n_m}$ 为 \mathcal{A} 的单位元, $L: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 为 2-局部 Lie 导子且对 $\forall A, B \in \mathcal{A}, L(A+B) - L(A) - L(B) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, 则存在 $T \in \mathcal{A}$ 及映射 $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 使得 $L(A) = [T, A] + \tau(A), \forall A \in \mathcal{A}$, 其中 $\tau(A+F) = \tau(A), F = [A, B], \forall A, B \in \mathcal{A}$ 。特别地, 当 $L(A+B) = L(A) + L(B)$ 时, τ 为线性映射。

证明 为方便讨论, 令 $P_k = 0 \oplus \cdots \oplus I_{n_k} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0, P_k^\perp = I - P_k$ 。

对 $\forall A, B \in \mathcal{A}$, 存在 Lie 导子 $L_{AP_k^\perp, BP_k}$ 使得

$$L(AP_k^\perp) = L_{AP_k^\perp, BP_k}(AP_k^\perp), \quad L(BP_k) = L_{AP_k^\perp, BP_k}(BP_k),$$

$$\begin{aligned} 0 &= L_{AP_k^\perp, BP_k}[AP_k^\perp, BP_k] \\ &= [L_{AP_k^\perp, BP_k}(AP_k^\perp), BP_k] + [AP_k^\perp, L_{AP_k^\perp, BP_k}(BP_k)], \\ &= [L(AP_k^\perp), BP_k] + [AP_k^\perp, L(BP_k)] \end{aligned}$$

即 $0 = L(AP_k^\perp)BP_k - BP_kL(AP_k^\perp) + AP_k^\perp L(BP_k) - L(BP_k)AP_k^\perp$, 两边同乘以 P_k 得 $P_kL(AP_k^\perp)BP_k = BP_kL(AP_k^\perp)P_k$, 因此存在 $f_k(AP_k^\perp) \in \mathbb{C}P_k$ 使得

$$L(AP_k^\perp)P_k = f_k(AP_k^\perp). \quad (4)$$

根据 2-局部 Lie 导子的定义, 对 $\forall A \in \mathcal{A}$ 和 AP_k , 存在 $T \in \mathcal{A}$ 和线性映射 $g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 使得

$$L(A) = [T, A] + g(A), \quad L(AP_k) = [T, AP_k] + g(AP_k),$$

对 $\forall A \in \mathcal{A}$ 和 AP_k^\perp , 存在 $S \in \mathcal{A}$ 和线性映射 $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 使得

$$L(A) = [S, A] + h(A), \quad L(AP_k^\perp) = [S, AP_k^\perp] + h(AP_k^\perp),$$

则 $[T, A] + g(A) = [S, A] + h(A)$, 即 $\sum_{k=1}^m ([TP_k, AP_k] + g(A)P_k) = \sum_{k=1}^m ([SP_k, AP_k] + h(A)P_k)$, 故

$$\sum_{k=1}^m [TP_k - SP_k, AP_k] = \sum_{k=1}^m (h(A) - g(A))P_k,$$

由于 $(h(A) - g(A))P_k \in \mathbb{C}P_k$, 则由引理 2.1 可得

$$[TP_k - SP_k, AP_k] = 0, \quad g(A)P_k = h(A)P_k, \quad [T - S, A] = 0, \quad g(A) = h(A).$$

故

$$\begin{aligned} L(A) &= [T, A] + g(A) \\ &= [T, AP_k] + g(AP_k) + [T, AP_k^\perp] + g(AP_k^\perp) \\ &= [T, AP_k] + g(AP_k) + [S, AP_k^\perp] + h(AP_k^\perp) + g(AP_k^\perp) - h(AP_k^\perp), \\ &= L(AP_k) + L(AP_k^\perp) + g(AP_k^\perp) - h(AP_k^\perp) \end{aligned}$$

则由此式和(4)得

$$\begin{aligned} L(A)P_k &= L(AP_k)P_k + L(AP_k^\perp)P_k + (g(AP_k^\perp) - h(AP_k^\perp))P_k \\ &= L(AP_k)P_k + f_k(AP_k^\perp) + (g(AP_k^\perp) - h(AP_k^\perp))P_k. \end{aligned} \quad (5)$$

i) 当 $\mathcal{A} = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_m}(\mathbb{C})$ 时, 令 $\mathcal{A}_k = 0 \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus 0$, 由于 L 为 2-局部 Lie 导子, 故 $L(AP_k)P_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_k$ 也是 2-局部 Lie 导子, 由定理 2.3 知, 存在 $T_k \in \mathcal{A}_k$ 及映射 $l_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathbb{C}P_k$ 使得

$$L(AP_k)P_k = [T_k, AP_k] + l_k(AP_k), \quad (6)$$

令 $\tau_k(A)P_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}P_k$ 为 $\tau_k(A)P_k = f_k(AP_k^\perp) + (g(AP_k^\perp) - h(AP_k^\perp))P_k + l_k(AP_k)$, 则由(5)和(6)得

$$L(A)P_k = [T_k, AP_k] + \tau_k(A)P_k. \quad (7)$$

令 $\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \tau(A) = \sum_{k=1}^m \tau_k(A)P_k, T = \sum_{k=1}^m T_k$, 则由(7)得,

$$L(A) = \sum_{k=1}^m L(A)P_k = \sum_{k=1}^m ([T_k, AP_k] + \tau_k(A)P_k) = [T, A] + \tau(A), \forall A \in \mathcal{A}. \quad (8)$$

对 $\forall A, B \in \mathcal{A}$, 令 $F = [A, B]$, 则存在 $T_{A+F, A} \in \mathcal{A}$ 及线性映射 $\omega_{A+F, A} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \omega_{A+F, A}(F) = 0$, 使得

$$\begin{aligned} \tau(A+F) &= L(A+F) - [T, A+F] \\ &= [T_{A+F, A}, A+F] + \omega_{A+F, A}(A+F) - [T, A+F] \\ &= [T_{A+F, A} - T, A+F] + \omega_{A+F, A}(A+F) \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \tau(A) &= L(A) - [T, A] \\ &= [T_{A+F, A}, A] + \omega_{A+F, A}(A) - [T, A] \\ &= [T_{A+F, A} - T, A] + \omega_{A+F, A}(A) \end{aligned}$$

因此

$\tau(A+F) - \tau(A) = [T_{A+F, A} - T, F] + \omega_{A+F, A}(A+F) - \omega_{A+F, A}(A) = [T_{A+F, A} - T, F] + \omega_{A+F, A}(F) = [T_{A+F, A} - T, F]$,
 $(\tau(A+F) - \tau(A))P_k = [T_{A+F, A} - T, F]P_k$. 由引理 2.1 知 $\tau(A+F)P_k = \tau(A)P_k$, $\tau(A+F) = \tau(A)$. 因此
 $L(A) = TA - AT + \tau(A)$, 其中 $\tau(A+F) = \tau(A), F = [A, B], \forall A, B \in \mathcal{A}$.

ii) 当 $\mathcal{A} = T_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus T_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus T_{n_m}(\mathbb{C})$ 时, 若对 $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $L(A+B) - L(A) - L(B) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, 则

$$L(A+B)P_k - L(A)P_k - L(B)P_k \in \mathbb{C}P_k, \quad L((A+B)P_k) - L(AP_k) - L(BP_k) \in \mathbb{C}P_k. \quad (9)$$

不妨设 $g(A) = L(A) - L(AP_k) - L(AP_k^\perp) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, 则由(5)有

$$L(A)P_k = L(AP_k)P_k + L(AP_k^\perp)P_k + g(A)P_k = L(AP_k)P_k + f_k(AP_k^\perp) + g(A)P_k,$$

令 $\mathcal{A}_k = 0 \oplus \cdots \oplus T_{n_k}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus 0$, 因为 L 为 2-局部 Lie 导子, 所以 $L(AP_k)P_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_k$ 也是 2-局部 Lie 导子, 由(9)和定理 2.4 知, 存在 $T_k \in \mathcal{A}_k$ 和映射 $l_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathbb{C}P_k$ 使得(6)成立。同(i)的证明类似, 令 $\tau_k(A)P_k = f_k(AP_k^\perp) + g(A)P_k + l_k(AP_k)$, 则(7)成立。令 $\tau(A) = \sum_{k=1}^m \tau_k(A)P_k$, $T = \sum_{k=1}^m T_k$, 则 $L(A)$ 具有形式(8), 且 $\tau(A+F) = \tau(A)$, $F = [A, B]$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ 。

当 $L(A+B) = L(A) + L(B)$ 时, $L(A) = L(AP_k + AP_k^\perp) = L(AP_k) + L(AP_k^\perp)$,

$$L(A)P_k = L(AP_k)P_k + L(AP_k^\perp)P_k = L(AP_k)P_k + f_k(AP_k^\perp) = [T_k, AP_k] + l_k(AP_k) + f_k(AP_k^\perp),$$

令 $\tau_k(A)P_k = f_k(AP_k^\perp) + l_k(AP_k)$, 则 $L(A)P_k = [T_k, AP_k] + \tau_k(A)P_k$ 。令 $\tau(A) = \sum_{k=1}^m \tau_k(A)P_k$, $T = \sum_{k=1}^m T_k$,

则对 $\forall A \in \mathcal{A}$, $L(A)$ 为形式(8), 且由于 $L(A+B) = L(A) + L(B)$, 故

$T(A+B) - (A+B)T + \tau(A+B) = TA - AT + \tau(A) + TB - BT + \tau(B)$, $\tau(A+B) = \tau(A) + \tau(B)$, 且由引理 2.2, τ 为线性映射。□

致 谢

本文作者衷心感谢审稿人和读者的意见和建议。

参考文献

- [1] Kadison, R.V. (1990) Local Derivation. *Journal of Algebras*, **130**, 494-509. [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(90\)90095-6](https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90095-6)
- [2] Larson, D. and Sourour, A. (1990) Local Derivations and Local Automorphisms. *Proceedings of Symposia in Pure Math*, **51**, 187-194. <https://doi.org/10.1090/pspum/051.2/1077437>
- [3] Johnson, B.E. (2001) Local Derivations on C^* -Algebras Are Derivations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **1**, 313-325. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-00-02688-X>
- [4] Crist, R. (1996) Local Derivations on Operator Algebras. *Journal of Functional Analysis*, **135**, 72-92. <https://doi.org/10.1006/jfan.1996.0004>
- [5] Semrl, P. (1997) Local Automorphisms and Derivations on $B(H)$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**, 2677-2680. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-97-04073-2>
- [6] Kim, S.O. and Kim, J.S. (2004) Local Automorphisms and Derivations on M_n . *Proceedings of the American Mathematical Society*, **132**, 1389-1392. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-03-07171-5>
- [7] Ayupov, S., Kudaybergenov, K. and Alauadinov, A. (2017) 2-Local Derivations on Matrix Algebras and Algebras of Measurable Operators. *Advances in Operator Theory*, **2**, 494-505.
- [8] Chen, L., Lu, F.Y. and Wang, T. (2013) Local and 2-Local Lie Derivations of Operator Algebras on Banach Spaces. *Integral Equation and Operator Theory*, **77**, 109-121. <https://doi.org/10.1007/s00020-013-2074-0>
- [9] Liu, L. (2016) 2-Local Lie Derivations on Semi-Finite Factor von Neumann Algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, **64**, 1679-1686. <https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1112346>
- [10] Halmos, P. (1982) A Hilbert Spaces Problem Book. 2th Edition, Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6>

- [11] Lu, F.Y. (2006) Lie Derivations of Certain CSL Algebras. *Israel Journal of Mathematics*, **155**, 149-156.
<https://doi.org/10.1007/BF02773953>
- [12] Han, D.G. (1993) Additive Derivations of Nest Algebras. *Proceedings of the American Society*, **119**, 1165-1169.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1993-1186986-5>