Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(12), 2222-2227
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.912259

高维传染病模型的Lyapunov函数构造

栾培译，李　静

临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
Email: slyphna@163.com

收稿日期：2020年11月21日；录用日期：2020年12月20日；发布日期：2020年12月28日

摘　要

本文主要研究几类传染病模型如SIR，SIRS，SIS和SEIR模型的Lypunov函数构造方法，从而获得传染病模型全局稳定性的结论。

关键词

Lypunov函数，传染病模型，地方病平衡点，全局稳定性

Lyapunov Functions for Higher-Dimensional Epidemiological Models

Peiyi Luan, Jing Li

College of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: slyphna@163.com

Received: Nov. 21st, 2020; accepted: Dec. 20th, 2020; published: Dec. 28th, 2020

Abstract

Lypunov functions for classical epidemiological models are introduced such as SIR, SIRS, SIS and SEIR. Global stability of some epidemiological models is also established.

Keywords

Lypunov Function, Epidemiological Models, Endemic Equilibrium State, Global Stability

文章引用: 栾培译，李静. 高维传染病模型的 Lyapunov 函数构造[J]. 应用数学进展, 2020, 9(12): 2222-2227.
DOI: 10.12677/aam.2020.912259

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

动力系统的全局稳定性判断并不容易，最常用的方法就是直接构造函数[1]。但是，构造过程中需要具有特殊性质的辅助函数，也就是说，Lypunov 函数并不容易寻找，本文我们将集中探讨几类传染病模型的 Lypunov 函数构造。

2. SIR 模型

借助古典假设[2] [3]，我们将总人扣 N 分为以下几类：易感者类，染病者类和移除者类，分别用字母 S，I 和 R 表示，即 $N=S+I+R$。当个体被感染后，将从易感者类变为染病者类，随着个人的康复，从而转变为移除者类。当然也有可能因疾病而死亡。不妨假设总人口 N 为常数，即使出生率等于死亡率。若存在垂直传染即母婴等传染，假设 p 为传染水平，同时水平传染率记为 $\frac{\beta SI}{N}$。因此就产生了 $p\gamma I$，进去染病者类与此同时 $\gamma N-p\gamma I$，进入易感者类。

于是便产生了如下模型：

$$\begin{cases}\dot{S}=\gamma N-\beta\frac{SI}{N}-p\gamma I\\ \dot{I}=\beta\frac{SI}{N}-(\delta-p\gamma)I\end{cases} \tag{1}$$

系统(1)有两个平衡点：疾病消除平衡点 $E_0=\left(\frac{\delta-p\gamma}{\beta}N,0\right)=(S_0,I_0)$ 和地方病平衡点 $E^*=\left(\frac{\delta-p\gamma}{\beta}N,\frac{\gamma}{\delta}N\right)=(S^*,I^*)$。

定理 1 系统(1)的地方病平衡点 E^* 为全局稳定的。

证明：

由微分等式可得：

$$\beta\frac{S^*I^*}{N}=\gamma N-p\gamma I^*=(\delta-p\gamma)I^*$$

和

$$\beta\frac{S^*}{N}=(\delta-p\gamma),\quad I^*=\frac{\gamma}{\delta}N.$$

构造 Lyapunov 函数如下

$$V(S,I)=S^*\left(\frac{S}{S^*}-\ln\frac{S}{S^*}\right)+\frac{\delta}{\delta-p\gamma}I^*\left(\frac{I}{I^*}-\ln\frac{I}{I^*}\right)$$

满足

$$\frac{\partial V}{\partial S}=1-\frac{S^*}{S},\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=\frac{S^*}{S^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial I}=\frac{\delta}{\delta-p\gamma}\left(1-\frac{I^*}{I}\right),\frac{\partial^2 V}{\partial I^2}=\frac{\delta}{\delta-p\gamma}\frac{I^*}{I^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial I}=0$$

以及

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial I}\\ \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial I} & \frac{\partial^2 V}{\partial I^2}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\frac{\partial^2 V}{\partial I^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial I}\right)=\frac{1}{S^2I^2}\frac{N\gamma}{\beta}>0$$

很容易看出 E^* 为唯一极值状态且为函数 $V(S,I)$ 在 R_+^2 内的最小值。

于是

$$\begin{aligned}\dot V(S,I)&=\left(1-\frac{S^*}{S}\right)\left(\gamma N-\beta\frac{SI}{N}-p\gamma I\right)+\left(1-\frac{I^*}{I}\right)\left(\beta\frac{SI}{N}-(\delta-p\gamma)I\right)\\&=\gamma N-\beta\frac{SI}{N}-p\gamma I-\gamma N\frac{S^*}{S}+\beta\frac{S^*I}{N}+p\gamma I\frac{S^*}{S}+\left(I-I^*\right)\left(\beta\frac{S}{N}-\beta\frac{S^*}{N}\right)\delta\frac{N}{\beta S^*}\\&=\gamma N-\beta\frac{SI}{N}-p\gamma I-\gamma N\frac{S^*}{S}+\beta\frac{S^*I}{N}+p\gamma I\frac{S^*}{S}+\left(I-I^*\right)\left(S-S^*\right)\frac{\delta}{S^*}\\&=\gamma N\left(2-\frac{S}{S^*}-\frac{S^*}{S}\right)-p\gamma I\left(2-\frac{S}{S^*}-\frac{S^*}{S}\right)\\&=\left(2-\frac{S}{S^*}-\frac{S^*}{S}\right)(\gamma N-p\gamma I)\end{aligned}$$

由于 $2-\left(\frac{S}{S^*}+\frac{S^*}{S}\right)\le 0$，故等式 $\dot V(S,I)\le 0$，$\dot V(S,I)=0$ 仅在 $S=S^*$ 时才成立。由渐近稳定定理，系统(1)的地方病平衡点 E^* 为全局稳定的。

3. SEIR 模型

具有非线性传染率的 SEIR 模型描述如下：

$$\begin{aligned}S'&=-\lambda I^pS^q+b-\mu S\\E'&=\lambda I^pS^q-(\varepsilon+\mu)E\\I'&=\varepsilon E-(\gamma+\mu)I\\R'&=\gamma I-\mu R\end{aligned}\tag{2}$$

其中参数 $p,q,\varepsilon,\mu,\lambda,\gamma,b$ 为正数，总人口 N 分为以下几类：易感者类，潜伏者类，染病者类和移除者类，分别用字母 S，E，I 和 R 表示，即 $N=S+E+I+R$。非负常数 μ 表示死亡率，b 为出生率(假设出生率与死亡率相等)，ε 表示潜伏者类到染病者类的转化率，γ 为康复率。

当 $p=1$ 时，参数 $\sigma=\frac{\lambda\varepsilon}{(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)}$ 表示接触数。

定理 2 [4] 如果 $0<p<1$ 或 $p=1$ 且 $\sigma>1$，地方病平衡点在区域 T 内是全局渐近稳定的。($T=\{(S,E,I):0\le S,E,I\le 1,S+E+I\le 1\}$)

当 $p>1$ 时，令 $p=2,q=1,\tau=(\gamma+\mu)t,\alpha=\dfrac{\mu}{\gamma+\mu},\beta=\dfrac{\varepsilon}{\gamma+\mu},a=\dfrac{\lambda}{\gamma+\mu}$

系统(2)可化为

$$\begin{aligned}&S'=-aI^2S+\alpha-\alpha S\\&E'=aI^2S-(\alpha+\beta)E\\&I'=\beta E-I\end{aligned}\tag{3}$$

定理 3 如果 $p=2,q=1$ 且 $\bar{\sigma}=\dfrac{a\alpha\beta^2}{4(\alpha+\beta)^2}<1$，$t$ 则只有唯一疾病消除平衡点 $P_0(1,0,0)$ 且在区域 T 内全局渐近稳定($T=\{(S,E,I):0\le S,E,I\le 1,S+E+I\le 1\}$)。

证明：构造 Lyapunov 函数如下

$$V(S,E,I)=\left(S-S^*-S^*\ln\frac{S}{S^*}\right)+\frac{\alpha+\beta}{\beta}I\left(1+\frac{1}{p-1}\left(\frac{I^*}{I}\right)^p\right)+\left(E-E^*\ln E\right)$$

则

$$V(S,E,I)=\left(S-S^*-S^*\ln\frac{S}{S^*}\right)+\frac{\alpha+\beta}{\beta}I+E$$

满足 $V(S^*,E^*,I^*)=0$ 当 $S,E,I>0$ 时，$(S^*,E^*,I^*)=(1,0,0)$

通过计算可得

$$\frac{\partial V}{\partial S}=1-\frac{1}{S},\ \frac{\partial V}{\partial E}=1,\ \frac{\partial V}{\partial I}=\frac{\alpha+\beta}{\beta}$$

以及

$$\begin{aligned}V'&=\left(1-\frac{1}{S}\right)\left(-aI^2S+\alpha-\alpha S\right)+\left[aI^2S-(\alpha+\beta)E\right]+\frac{\alpha+\beta}{\beta}(\beta E-I)\\&=aI^2-\frac{\alpha+\beta}{\beta}I+\alpha(1-S)\left(1-\frac{1}{S}\right)\le 0\end{aligned}$$

可得 $(1-S)\left(1-\dfrac{1}{S}\right)\le 0$ 仅当 $S=1$ 时；

令 $R_0=\dfrac{\lambda\varepsilon}{(\gamma+\mu)(\varepsilon+\mu)}=\dfrac{a\beta}{\alpha+\beta}$， $f(I)=aI^2-\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}I$，可得当 $I\in\left(0,\dfrac{1}{R_0}\right)$ 时，$R_0<1$ 且 $f(I)=aI^2-\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}I<0$。

由渐近稳定定理可得，疾病消除平衡点 $P_0(1,0,0)$ 在区域 T 内全局稳定。

定理 4 如果 $\bar{\sigma}=\dfrac{a\alpha\beta^2}{4(\alpha+\beta)^2}=1$，系统产生周期轨道。

定理 5 系统(3)的非常数周期解的轨迹，如果存在，则必为渐近相轨道渐近稳定。

证. 系统(2)的解 $(S(t),E(t),I(t))$ 的线性系统为

$$\begin{aligned}&X'=-\left(aI^2+2\alpha+\beta\right)X+2aIS(Y+Z)\\&Y'=\beta X-\left(aI^2+\alpha+1\right)Y\\&Z'=aI^2Y-(\alpha+\beta+1)Z\end{aligned}\tag{4}$$

想要讨论系统(4)的稳定性，需要构造下列函数

$$V(X,Y,Z;S,E,I)=\sup\left\{|X|,\frac{E}{I}(|Y|+|Z|)\right\}$$

假定解 $(S(t),E(t),I(t))$ 具有最小周期 $\omega>0$，轨道 γ 与 T 的边界始终有正数的距离，那么会存在常数 c 使得

$$V(X,Y,Z;S,E,I)\ge c\sup\{|X|,|Y|,|Z|\}$$

对 $(X,Y,Z)\in R_+^3$ 和 $(S,E,I)\in\gamma$。

通过计算可得 $V(t)$ 的右导数

$$\begin{aligned}D_+|X(t)|&\le-(aI^2+2\alpha+\beta)|X|+2aIS(|Y|+|Z|)\\&=-(aI^2+2\alpha+\beta)|X|+\frac{2aI^2S}{E}\left\{\frac{E}{I}(|Y|+|Z|)\right\}\end{aligned}\tag{5}$$

和

$$D_+|Y(t)|\le\beta|X|-(aI^2+\alpha+1)|Y|,$$

$$D_+|Z(t)|\le aI^2|Y|-(\alpha+\beta+1)|Z|,$$

这样便有

$$\begin{aligned}D_+\frac{E}{I}(|Y|+|Z|)&=\left(\frac{E'}{I}-\frac{I'}{E}\right)\frac{E}{I}(|Y|+|Z|)+\frac{E}{I}D_+(|Y|+|Z|)\\&\le\left(\frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}\right)\frac{E}{I}(|Y|+|Z|)+\frac{E}{I}(\beta|X|-(\alpha+1)|Y|+(\alpha+\beta+1)|Z|)\\&\le\frac{\beta E}{I}|X|+\left(\frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-\alpha-1\right)\frac{E}{I}(|Y|+|Z|)\end{aligned}\tag{6}$$

联立(5) (6)可得

$$D_+V(t)\le\sup\{g_1(t),g_2(t)\}V(t)$$

其中 $g_1(t)=-(aI^2+2\alpha+\beta)+\dfrac{2aI^2S}{E}$， $g_2(t)=\dfrac{\beta E}{I}+\dfrac{E'}{E}-\dfrac{I'}{I}-\alpha-1$

结合(3)，会有

$$\frac{I'}{I}+1=\frac{\beta E}{I},\quad\frac{E'}{E}+\alpha+\beta=\frac{aI^2S}{E}$$

便可得到

$$D_+V(t)\le\sup\left\{\frac{E'}{E}-\alpha,\frac{2E'}{E}+\beta-aI^2\right\}V(t)$$

因为 $(S(0),E(0),I(0))\in\overset{0}{T}$，则存在 β，a 使得 $\beta-aI^2<0$ 以及

$$\int_0^\omega\sup\{g_1(t),g_2(t)\}\mathrm{d}t<0$$

即揭示了 $V(t)\to0$ 当 $t\to\infty$ 时，进而得到 $(X(t),Y(t),Z(t))\to0$ 当 $t\to\infty$ 事。因此，系统(4)渐近稳定，周期解 $(S(t),E(t),I(t))$ 以渐近相轨道渐近稳定。

定理 6 如果 $\bar{\sigma}=\dfrac{a\alpha\beta^{2}}{4\left(\alpha+\beta\right)^{2}}>1$，系统(2.1)会产生 hopf 分支为稳定开关想象。

4. 结论

Lyapunov 函数的构造方法同样也适用于竞争捕食系统[5] [6]。本文考虑了具有非线性传染率的 SIR 和 SEIR 传染病模型，此外，具有非线性传染率的 SIRS，SEIRS 模型，也可以用同样的构造方法来解决全局稳定性。

致　谢

作者对同行评阅人的意见和建议表示深深的感谢。

基金项目

本文由 2020 大学生创新创业训练项目(X202010452127)支持。

参考文献

[1] Lyapunov, A.M. (1992) The General Problem of the Stability of Motion. Taylor &Francis, London.

[2] Busenberg, S. and Cooke, K. (1993) Vetically Transmitted Diseases in Humans: Models and Dynamics. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-75301-5

[3] Anderson, R.M. and May, R.M. (1991) Infectious Diseases in Humans: Dynamics and Control. Oxford University Press, Oxford.

[4] Li, M.Y. and Muldowney, J.S. (1995) Global Stability for the SEIR Model in Epidemiology. *Mathematical Biosciences*, **125**, 155-164. https://doi.org/10.1016/0025-5564(95)92756-5

[5] Goh, B.S. (1980) Management and Analysis of Biological Populations. Elsevier Science, Amsterdam.

[6] Cluskey, M. and Connell, C. (2009) Global Stability for an SEIR Epidemiological Model with Varying Infectivity and Infinite Delay. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **6**, 603-610. https://doi.org/10.3934/mbe.2009.6.603