

The Forcing Number of Maximum Matching in Spiro Hexagonal Para-Chain

Jingjing Li¹, Hong Bian¹, Haizheng Yu²

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

²College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Email: bh1218@163.com

Received: Feb. 5th, 2020; accepted: Feb. 20th, 2020; published: Feb. 27th, 2020

Abstract

Let G be a graph with a maximum matching M . A subset $S \subseteq M$ is called a forcing set of M if S is contained in only one maximum matching M of G . A forcing set of M with minimum cardinality is the minimum forcing set of M and its cardinality is called the forcing number of M , denoted by $f_m(G, M)$. The minimum forcing number of all maximum matchings in G is called the forcing number of G , denoted by $f_m(G)$. In this paper, we obtain the forcing number of maximum matching in spiro hexagonal para-chain.

Keywords

Maximum Matching, Forcing Set, Forcing Number, Spiro Hexagonal Para-Chain

螺旋六角para-链的最大匹配的强迫数

李晶晶¹, 边红¹, 于海征²

¹新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

Email: bh1218@163.com

收稿日期: 2020年2月5日; 录用日期: 2020年2月20日; 发布日期: 2020年2月27日

摘要

令 M 是图 G 的一个最大匹配, S 是 M 的一个子集。如果 S 除了被 M 包含而不被 G 的其它最大匹配所包含, 那么称 S 是 M 的一个强迫集(forcing set)。 M 的最小强迫集所包含的边数称作是 M 的强迫数(forcing number), 记为 $f_m(G, M)$ 。图 G 的所有最大匹配的强迫数的最小值称为 G 的最小强迫数(Minimum forcing number), 记

作 $f_m(G)$ 。在本文中,我们给出了螺旋六角para-链的最大匹配的强迫数的确切值。

关键词

最大匹配, 强迫集, 强迫数, 螺旋六角para-链

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑的图是简单、连通图。令 G 是一个图,我们用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图的顶点集和边集。

匹配(matching)理论在图论中有着丰富的应用背景,许多问题或它们的子问题都可归结为匹配问题来解决。而图论中的完美匹配的概念起源于统计物理中的 dimer 计数问题,在化学分子骨架图中的完美匹配相当于有机化学分子的凯库勒结构。凯库勒结构及其相关性质的研究引起了化学家和图论学者的广泛关注,这是因为研究化学分子的凯库勒结构有助于研究化学分子的结构稳定性和芳香性等化学性质。在1985年的化学著作中,Randić和Klein [1]针对凯库勒结构提出了“内度自由度”的概念。之后Harary [2]等人在1991年针对图的完美匹配也提出了类似的强迫数的概念。因此,匹配的强迫数的概念来源于化学上凯库勒结构的内度自由度(innate degree of freedom)。在图论和组合数学中,有很多问题的研究都体现了“强迫”的思想。如:拉丁方、区组设计、Steiner系统等。近几年来关于完美匹配的强迫数的概念也出现了不同形式的推广,相继提出了全局强迫数、反凯库勒数、反强迫数和强迫六边形等概念。匹配强迫数问题有着丰富的物理、化学背景,也存在着很多未解决的公开问题。

图 G 中的一个匹配是一个边子集 $M \subseteq E(G)$,它使得 G 中的每个点最多和 M 中的一条边相关联, M 中包含的边的个数称为 M 的阶数。 M 称为 G 的一个最大匹配,如果 G 中不包含阶数比 M 更大的匹配。图 G 中的任何一个最大匹配的阶数,称为 G 的匹配数,记为 $\nu(G)$ 。我们称匹配 M 是极大的,如果图 G 中没有匹配 M' ,使得 $M' \supset M$ 。显然,每一个最大匹配都是极大匹配,但是反之不然。 M 中边的端点称为 M 饱和点,否则称为 M 非饱和点。 G 的一个完美匹配(或者1-因子,在化学上称作凯库勒结构(Kekulé Structure))是 G 的一个边不交的子集 M ,且 M 饱和 G 的所有顶点。图 G 中的一条边称为允许边,如果它包含在图 G 的某个完美匹配中;否则称为禁止边。图 G 中的一条边称为固定允许边,如果它包含在图 G 的每一个完美匹配中。很显然,偶数个点的图才可能有完美匹配,如果图 G 有奇数个点,并且 $\nu(G) = \lfloor |V(G)|/2 \rfloor$,我们就说 G 有几乎完美匹配。

图 G 的一个完美匹配 M 的强迫集 S 是 M 的一个子集,使得这个子集不包含在图 G 的其它任何完美匹配中。完美匹配 M 的最小强迫集所包含的边数称作 M 的强迫数,记 $f(G, M)$ 。一个图的完美匹配的强迫集和强迫数的概念是用“局部”的方法来定义的,它是针对该图的某一个特定的完美匹配而言的。2004年,Vukičević和Sedlar [3]首次引入了“全局强迫”这一概念,即考虑的是图 G 的所有完美匹配而不只是一个特定的完美匹配。图 G 的全局强迫集定义为 G 的一个边子集 S ,且满足图 G 的关于完美匹配的特征函数限制到 S 上是单射。图 G 的最小全局强迫集所包含的边数称为图 G 的全局强迫数,记为 $gf(G)$ 。2015年徐守军等人[4]结合“强迫”和“全局强迫”的概念,提出了另外一个关于图 G 的所有完美匹配的全局性的概念,称作完全强迫数,并针对六角系统得到了一些基础性的结果。图 G 的完全强迫集,指的是 G 的一个边子集 S ,该边子集限制在图 G 的任何一个完美匹配上都是该完美匹配的一个强迫集。图 G

的最小完全强迫集所包含的边数称为该图的完全强迫数, 记作 $cf(G)$ 。以上这些定义都是针对于图的完美匹配而言的, 而最大匹配是非常有用并且有趣的一类匹配, Lovász 和 Plummer [5] 曾给出了图 G 的最大匹配的 Gallai-Edmonds 结构定理, 但是目前有关最大匹配的研究还相对较少。最近 Damir Vukićević 等人 [6] 对极大匹配的全局强迫数进行了研究, 它们将全局强迫集和全局强迫数的概念从完美匹配推广到极大匹配, 并给出了一些图类的极大匹配的全局强迫数的上、下界。

本文在上述研究基础上, 将强迫集的概念从完美匹配推广到最大匹配。设 M 是图 G 的一个最大匹配, S 是 M 的一个子集, 如果 S 除了 M 以外, 不被 G 的其它最大匹配所包含, 那么称 S 是最大匹配 M 的一个强迫集。最大匹配 M 的最小强迫集的阶数称作是 M 的强迫数, 记为 $f_M(G, M)$ 。图 G 的所有最大匹配的强迫数的最小值称为图 G 的最小强迫数(minimum forcing number), 记作 $f_M(G)$ 。

螺环烃是环烷烃中的一个重要子集类。而螺环烃是一个任意两个碳环仅有一个公共碳原子的环烷烃, 也就是说, 螺环烃是一个任意两个圈仅有一个公共点(该点被称为螺旋点 [7], 是一个 4-度点)的连通图。螺旋六角系统(或六角仙人掌图 [8])是一个仅含有六边形并且任意两个六边形仅有一个螺旋点的连通图, 并且该螺旋点仅连接两个六边形。一个螺旋六角链是指图中任意一个六边形至多含有两个螺旋点的螺旋六角系统。我们给出了螺旋六角 para-链(偶数个六边形)中最大匹配的强迫数的确切值。

2. 螺旋六角 para-链的最大匹配的强迫数

一个螺旋六角链简记为 $G_n = H_1 H_2 H_3 \dots H_n$, 其中 H_i 是 G_n 中第 i 个六边形, 两个六边形共用的点(是一个 4 度点)为图 G_n 的螺旋点, 即一个螺旋点当且仅当被两个六边形占用。任意两个螺旋点 $u \in V(H_i)$, $v \in V(H_j)$, 若 u, v 在 H_i 中是相邻的, 称它们是 ortho-连接; 若 u, v 的距离为 2, 则称它们是 meta-连接; 若 u, v 的距离为 3, 则称它们是 para-连接。只含有一个螺旋点的六边形称为端六边形, 即 H_1 和 H_n 。其余的六边形称为内部六边形。若一个螺旋六角链的一个内部六边形的螺旋点以 para-(或 meta-或 ortho-)相衔接, 则这个内部六边形被称作 para-六边形(或 meta-六边形或 ortho-六边形)。若这个螺旋六角链 G_n 的内部六边形都是 para-六边形(或 meta-六边形或 ortho-六边形), 则这个螺旋六角链被称为螺旋六角 para-链, 记为 P_n (或螺旋六角 meta-链, 记为 M_n , 或螺旋六角 ortho-链, 记为 O_n)。

本文我们只考虑螺旋六角 para-链, 很显然螺旋六角 para-链 P_n 有 $5n + 1$ 个点和 $6n$ 条边。如果 n 是偶数, 那么 P_n 的点数为奇数, 易知 P_n 不存在完美匹配, 此时我们考虑螺旋六角 para-链 P_n 的最大匹配。

若图 G 的顶点集能划分为两个非空子集 A 和 B , 使得 A 中任何两个顶点之间无边相连, 并且 B 中任何两点之间也没有边相连, 则称该图是二部图(bipartite graph), $\{A, B\}$ 称为其二部划分, 记为 $G = (A, B)$ 。如果对 A 的任意非空子集 X , 都有 $|N_G(X)| > |X|$ 则称二部图 G 关于 A 有正赢量, 简称 G 有正赢量。设 M 是图 G 的一个最大匹配, M 非饱和点的个数称为图 G 的亏量, 记为 $def(G)$ 。

令 G 是一个图。若 $D(G)$ 是 G 中至少不被某个最大匹配所覆盖的顶点所构成的集合, 而 $A(G)$ 是 $V(G) - D(G)$ 中与 $D(G)$ 中至少一个顶点相邻的点所构成的集合, $C(G) = V(G) - A(G) - D(G)$ 。根据 Gallai-Edmonds 分解定理, $G[D(G)]$ 的每一个分支是因子临界图, $G[C(G)]$ 是具有完美匹配的图; 令 $U(G)$ 表示 $D(G)$ 的每个分支收缩成的点所构成的集合, 则以 $U(G)$ 和 $D(G)$ 为二部划分的二部图是一个具有正赢量的二部图。显然, 若 G 有完美匹配, 则 $C(G) = V(G)$ 。

引理 1 [5]: 令图 $G = (A, B)$ 是一个二部图, 若 G 关于 A 有正赢量, 则 $C(G) = \emptyset$, $A(G) = A$, $D(G) = B$ 且 $def(G) = |B| - |A|$ 。

引理 2 [9]: 设 G 是有完美匹配 M 的平面二部图, 则 M 的匹配强迫数等于不交的 M -交错圈的最大数目, 即有, $f(G, M) = c(M)$ 。

定理 3: 令 G 是含有 $2n$ 个六边形的螺旋六角 para-链, 则 G 存在几乎完美匹配。

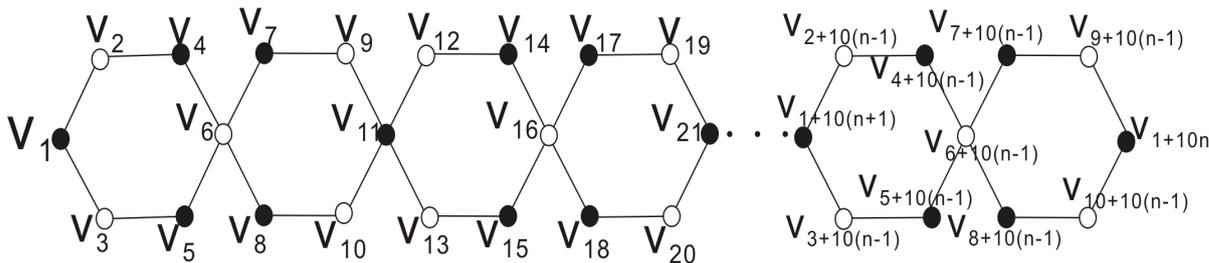


Figure 1. The spiro hexagonal para-chain graph G with $2n$ hexagons

图 1. 有 $2n$ 个六边形的螺旋六角 para-链图 G

证明: 假设 G 是含有 $2n$ 个六边形的螺旋六角 para-链。给图 G 的顶点进行如图 1 所示的标号, 用 $v_i (i=1,2,3,\dots,10n+1)$ 分别表示 G 中所有的点, $e_j (j=1,2,3,\dots,12n)$ 分别表示 G 中所有的边。

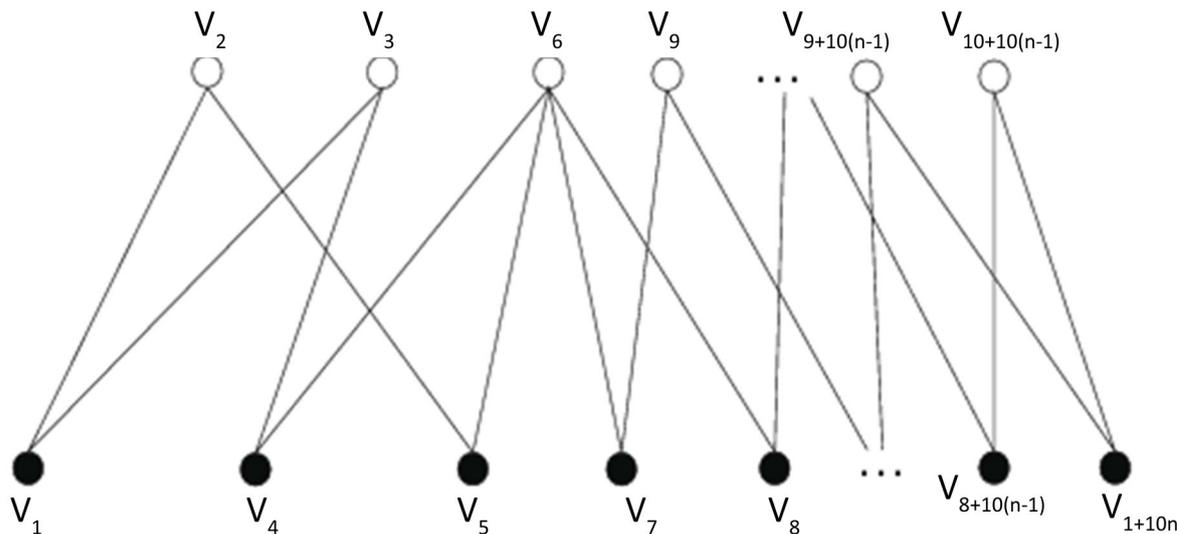


Figure 2. Bipartite graph $G = (A, B)$

图 2. 二部图 $G = (A, B)$

显然图 G 也是一个平面二部图, 其二部图 $G = (A, B)$ 的二部划分为 $\{A, B\}$, 其中 A 部分的点集记为:

$$A = \{v_2, v_3, v_6, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{2+10(n-1)}, v_{3+10(n-1)}, v_{6+10(n-1)}, v_{9+10(n-1)}, v_{10+10(n-1)}\};$$

B 部分的点集记为:

$$B = \{v_1, v_4, v_5, v_7, v_8, v_{11}, v_{14}, \dots, v_{1+10(n-1)}, v_{4+10(n-1)}, v_{5+10(n-1)}, v_{7+10(n-1)}, v_{8+10(n-1)}, v_{1+10n}\},$$

如图 2 所示, 显然 G 关于 A 有正赢量。根据引理 1, $C(G) = \emptyset$, $A(G) = A$, $D(G) = B$ 且 $def(G) = |B| - |A| = 1$, 即图 G 存在几乎完美匹配。

定理 4: 令 G 是含有 $2n$ 个六边形的螺旋六角 para-链, 则图 G 含有 $(5n+1) \cdot 2^n$ 个最大匹配。

证明: 假设 G 是含有 $2n$ 个六边形的螺旋 para-链。根据定理 3, 图 G 存在几乎完美匹配。则该图去掉 B 中任意一点, 得到的新图存在完美匹配。我们将 B 中的点分成三部分。即 $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 。其中:

$$B_1 = \{v_1, v_{1+10n}\};$$

$$B_2 = \{v_4, v_5, v_7, v_8, v_{14}, v_{15}, v_{17}, v_{18}, \dots, v_{4+10(n-1)}, v_{5+10(n-1)}, v_{7+10(n-1)}, v_{8+10(n-1)}\};$$

$$B_3 = \{v_{11}, v_{21}, \dots, v_{1+10(n-1)}\}。$$

情形 1: 最大匹配 M 不饱和 B_1 中一个顶点, 图 G 删去 B_1 中任意一点, 得到的图 G' 恰好有一个一度点, 并且 G' 存在完美匹配, 且这两个一度点相关联的两条边一定是固定允许边。继续删去 G' 中这两条固定允许边相关联的点, 得到图 G'' 是含有 $2n-1$ 个六边形的螺旋 para-链, 且具有完美匹配。把 G'' 中的六边形用阿拉伯数字进行标记, 对于 G'' 的任意一个完美匹配 M , G'' 中所有被标记为奇数的六边形一定为 M -交错六边形, G'' 中所有被标记为偶数的六边形中的两条平行边(边的端点都是二度点)是 G'' 中固定允许边。 G'' 中每一个 M -交错六边形有两个完美匹配, G'' 中每一个 M -交错六边形的一个完美匹配的并, 加上 G'' 中所有被标记为偶数的六边形的两条固定允许边, 以及 G' 的两个一度点相关联的两条固定允许边构成 G' 的一个完美匹配, 从而是 G 的一个最大匹配, 可得 G 的最大匹配的个数为 2^n 个。

情形 2: 最大匹配 M 不饱和 B_2 中一个顶点, 图 G 删去 B_2 中任意一点, 得到的图 G' 恰好有一个一度点, 且 G' 存在完美匹配, 故这个一度点相关联的边一定是固定允许边, 继续删去 G' 中这条固定允许边相关联的点, 得到的图 G'' 有两种子情况。子情形一: G'' 存在一个一度点, 则这个一度点相关联的边也必是固定允许边, 再删去其相关联的点, 得到图 G''' 是含有 $2n-1$ 个六边形的螺旋 para-链。与情形 1 类似可得 G' 有 2^n 个完美匹配, 从而 G 有 2^n 个最大匹配。子情形二: G'' 存在三个一度点, 这三个一度点相关联的三条边必是固定允许边, 再删去这三条固定允许边相关联的点, 得到 G''' 包含两个分支, 分别是两个含有奇数个六边形的螺旋 para-链。其不交的 M -交错六边形共有 n 个 G''' 中每一个 M -交错六边形有两个完美匹配, G''' 中每一个 M -交错六边形的一个完美匹配的并, 加上 G''' 中所有剩下的六边形的两条固定允许边, 以及 G'' 的三个一度点相关联的固定允许边, 以及 G' 的一度点相关联的边构成 G' 的一个完美匹配, 从而是 G 的一个最大匹配, 最大匹配的个数为 2^n 个。

情形 3: 最大匹配 M 不饱和 B_3 中一个顶点, 图 G 删去 B_3 中任意一点, 得到的图 G' 含有四个一度点, 它们相关联的边也一定是固定允许边, 继续删去这四条固定允许边覆盖的点, 得到的图 G'' 是两个分支, 分别是含有奇数个六边形的螺旋六角 para-链。其 M -交错六边形的个数共 n 个, G'' 中每一个 M -交错六边形有两个完美匹配, G'' 中每一个 M -交错六边形的一个完美匹配的并, 加上 G'' 中所有剩下的六边形的两条固定允许边, 以及 G' 的四个一度点相关联的固定允许边, 构成 G' 的一个完美匹配, 从而是 G 的一个最大匹配, 最大匹配的个数为 2^n 个。

综上所述, 去掉 B 中任意一点, 得到的新图都有 2^n 个完美匹配, 故原图都有 2^n 个最大匹配, 又有 $|B|=5n+1$, 则图 G 含有 $(5n+1) \cdot 2^n$ 个最大匹配。

定理 5: 令 G 是含有 $2n$ 个六边形的螺旋六角 para-链, M 是 G 的一个最大匹配, 则 $f_M(G, M) = n+1$ 或 $n+2$ 或 $n+4$ 。

证明: 由定理 3 和定理 4 可知, 图 G 也是一个平面二部图, 图 $G = (A, B)$ 的二部划分为 $\{A, B\}$, 其中 A 部分的点集记为: $A = \{v_2, v_3, v_6, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{2+10(n-1)}, v_{3+10(n-1)}, v_{6+10(n-1)}, v_{9+10(n-1)}, v_{10+10(n-1)}\}$; B 部分的点集记为: $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, 其中 $B_1 = \{v_1, v_{1+10n}\}$; $B_2 = \{v_4, v_5, v_7, v_8, v_{14}, v_{15}, v_{17}, v_{18}, \dots, v_{4+10(n-1)}, v_{5+10(n-1)}, v_{7+10(n-1)}, v_{8+10(n-1)}\}$; $B_3 = \{v_{11}, v_{21}, \dots, v_{1+10(n-1)}\}$ 。根据图 G 的最大匹配不饱和的点所在的位置分为以下三种情形:

情形 1: 若 G 的最大匹配 M 是不饱和 B_1 中任意一点的最大匹配, 则这个最大匹配 M 是由 G' (G 删去 B_1 中任意一点, 得到的图 G') 的两个一度点相关联的固定允许边, 并上 G'' (是删去 G' 中这两条匹配边相关联的点, 而得到的含有 $2n-1$ 个六边形的螺旋 para-链) 的一个完美匹配所构成的。已知 G'' 含有最大边不交的 M -交错圈的个数为 n 个。根据引理 2, 可知 G'' 的完美匹配的强迫数是 n , 又已知 G 的最大匹配是不饱和 B_1 中任意一点的最大匹配, 那么 G'' 两个一度点相关联的边一定是固定允许边, 否则就不满足 G 的最大匹配是不饱和 B_1 中任意一点的最大匹配。因此, 不饱和 B_1 中任意一点的最大匹配的强迫数是 $n+2$ 。

情形 2: 若 G 的最大匹配 M 是不饱和 B_2 中任意一点的最大匹配, 则这个最大匹配 M 有两种子情形。

子情形 1: 最大匹配 M 是由 G' (G 删去 B_2 中任意一点, 得到的图 G') 的一个一度点相关联的边, 加上 G'' (删去 G' 中一度点关联的这条匹配边饱和的点, 得到的图 G'') 的一个一度点相关联的边, 以及 G''' (删去 G'' 中这一个一度点关联的匹配边所覆盖的点, 是含有 $2n - 1$ 个六边形的螺旋 para-链) 的一个完美匹配所构成的。根据引理 2, 可知 G''' 的完美匹配的强迫数是 n 。**子情形 2:** 最大匹配 M 是由 G' (G 删去 B_1 中任意一点, 得到的图 G') 的一个一度点相关联的边, 加上 G'' (删去 G' 中一度点关联的这条匹配边饱和的点而得到的图 G'') 的三个一度点相关联的固定允许边, 以及 G''' (删去 G'' 中这三个一度点关联的匹配边所饱和的点后是两个分支, 分别是含有奇数个六边形的螺旋 para-链) 的一个完美匹配所构成的。 G''' 的完美匹配是这两个分支各自的完美匹配的并。设其中一个分支含有 x 个不交的 M -交错圈, 那么另一个分支含有 $n - x$ 个不交的交错圈。根据引理 2, 可知 G''' 的完美匹配的强迫数是 n 。又由已知 G 的最大匹配是不饱和 B_2 中任意一点的最大匹配, 那么 G' 的这个一度点相关联的边一定是固定允许边, 否则就不满足 G 的最大匹配是不饱和 B_2 中任意一点的最大匹配, 故不饱和 B_2 中任意一点的最大匹配的强迫数是 $n + 1$ 。

情形 3: 若 G 的最大匹配 M 是不饱和 B_3 中任意一点的最大匹配, 则 M 是由 G' (G 删去 B_3 中任意一点, 得到的图 G') 四个一度点相关联的边, 并上 G'' (删去 G' 中这四个一度点关联的这条匹配边饱和的点后是两个分支, 分别是两个含有奇数个六边形的螺旋六角 para-链) 的一个完美匹配所构成的。 G'' 的完美匹配是这两个分支各自的完美匹配的并。设其中一个分支含有 x 个不交的 M -交错圈, 那么另一个分支含有 $n - x$ 个不交的 M -交错圈。同理可知 G'' 的完美匹配的强迫数是 n 。又由已知 G 的最大匹配是不饱和 B_3 中任意一点的最大匹配, 那么 G' 的这四个一度点相关联的边一定是固定允许边, 否则就不满足 G 的最大匹配是不饱和 B_3 中任意一点的最大匹配, 故不饱和 B_3 中任意一点的最大匹配的强迫数是 $n + 4$ 。

推论 6: 令 G 是含有 $2n$ 个六边形的螺旋六角 para-链, 则 $f_M(G) = n + 1$ 。

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 2020 年新疆维吾尔自治区研究生创新基金项目; 新疆师范大学实验室开放课题(XJNUSYS082017A02)。

参考文献

- [1] Randić, M. and Klein, D.J. (1985) Kekulé Valence Structures Revisited, Innate Degrees of Freedom of π -Electron Couplings. In: Trinajstić N., Eds., *Mathematical and Computational Concepts in Chemistry*, Wiley, New York, 274-282.
- [2] Harary, F., Klein, D.J. and Živković, T.P. (1991) Graphical Properties of Polyhexes: Perfect Matching Vector and Forcing. *Journal of Mathematical Chemistry*, **6**, 295-306. <https://doi.org/10.1007/BF01192587>
- [3] Vukičević, D. and Sedlar, J. (2004) Total Forcing Number of the Triangular Grid. *Mathematical Communications*, **9**, 169-179.
- [4] Xu, S.-J., Zhang, H.-P. and Cai, J.-Z. (2015) Complete Forcing Numbers of Catacondensed Hexagonal Systems. *Journal of Combinatorial Optimization*, **29**, 803-814. <https://doi.org/10.1007/s10878-013-9624-x>
- [5] Lovász, L. and Plummer, M.D. (1986) *Matching Theory*. Akademiai Kiado, Amsterdam, North-Holland.
- [6] Vukičević, D., Zhao, S., Sedlar, J., Xu, S.-J. and Došlić, T. (2018) Global Forcing Number for Maximal Matchings. *Discrete Mathematics*, **341**, 801-809. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.12.002>
- [7] Zhong, L. (2012) The Harmonic Index on Unicyclic Graphs. *Ars Combinatoria*, **104**, 261-269.
- [8] Yarahmadi, Z., Došlić, T. and Moadi, S. (2013) Chain Hexagonal Cacti: Extremal with Respect to the Eccentric Connectivity Index. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, **4**, 123-126.
- [9] 王洪伟. 二部图的匹配强迫数[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2008.