

The Difference Scheme of Energy Conservation for the Third Order Linear Equation

Yu Tian, Yanfen Cui

College of Sciences, Shanghai University, Shanghai
Email: tianyu27@shu.edu.cn

Received: Feb. 5th, 2020; accepted: Feb. 20th, 2020; published: Feb. 27th, 2020

Abstract

Based on the third-order linear conservation equation's many conservation laws, this paper designed a conservation numerical scheme which can satisfy the first two conservation laws of the equation. The numerical examples show the scheme's effectiveness and the good stability and structure preservation in long-term numerical simulation.

Keywords

Conservation Law, Stability, Structure Preservation

三阶线性方程满足能量守恒的差分格式

田雨, 崔艳芬

上海大学理学院, 上海
Email: tianyu27@shu.edu.cn

收稿日期: 2020年2月5日; 录用日期: 2020年2月20日; 发布日期: 2020年2月27日

摘要

三阶线性守恒型方程具有多个守恒律, 本文对该方程设计了一种守恒型数值格式。该格式能满足方程的前两个守恒律。通过数值算例验证了格式有效性, 数值结果表明, 该格式在长时间的数值模拟中具有很好的稳定性和保结构性。

关键词

守恒律, 稳定性, 保结构

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Open Access

1. 引言

本文对三阶线性守恒方程

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

进行数值模拟, 其中 u 是方程的解。方程(1)对应的守恒形式为

$$u_t + (u + u_{xx})_x = 0 \quad (2)$$

流函数记为

$$f = u + u_{xx} \quad (3)$$

方程(1)在物理上, 其解满足无穷多个守恒律。本文根据这一物理性质, 对这个方程设计一种满足两个守恒律的数值方法。第二个守恒律为

$$(u^2)_t + (u^2 - u_x^2 + 2uu_{xx})_x = 0 \quad (4)$$

其中记 $U(u) = u^2$ 为能量, 能量流函数为

$$F = u^2 - u_x^2 + 2uu_{xx} \quad (5)$$

在对守恒方程进行数值模拟时, 本文采用有限体积法[1], 数值解是对精确解网格平均的逼近, 但是与传统有限体积法不同的是, 本文设计的数值格式能够满足两个守恒律, 格式要求数值解是守恒的, 同时要求数值能量也守恒。传统的守恒型数值格式[2], 一般来说只能保持一个守恒律, 即使有些格式可以保持多个守恒律, 那些守恒律也是被动守恒。本文所设计的格式(见[3]-[7])与传统守恒格式不同, 该格式同时满足两个守恒律, 并且第二个守恒律中的数值实体不是被动守恒, 在格式设计中参与计算, 即使对线性方程而言, 本文的格式也是非线性的。

本文的结构如下, 第一节是引言, 第二节详细描述了我们的格式, 第三节是数值算例, 最后是结论。

2. 格式的描述

数值解的定义

本文格式采用均匀网格剖分, 网格 $I_j = \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right]$, $j = 1, \dots, N$, 其中 $x_j = jh$, $x_{j\pm\frac{1}{2}} = j\pm\frac{1}{2}h$, $t_n = n\tau$, 在这儿 h 为空间步长, τ 为时间步长。 $\lambda = \tau/h^3$ 为网格步长比。

格式同时计算了两个数值实体, 即数值解和数值能量。其中数值解 u_j^n 是对 t_n 时刻精确解 $u(x, t)$ 网格平均的近似

$$u_j^n \approx \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx, \quad (6)$$

数值能量 U_j^n 是对 t_n 时刻精确能量 $U(u(x, t)) = u^2(x, t)$ 网格平均的近似

$$U_j^n \approx \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(u(x, t_n)) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u^2(x, t_n) dx. \quad (7)$$

如同 Godunov 型格式一样(见[1]), 格式分为重构、发展和网格平均三步进行。

第一步重构: 在 t_n 层上对数值解进行重构。由于方程为三阶方程, 则重构函数用三次函数重构, 重构函数 $R(x; u^n, U^n)$ 为

$$R(x; u^n, U^n) = p_j^{n,0} + p_j^{n,1}(x - x_j) + p_j^{n,2}(x - x_j)^2 + s_j^n(x - x_j)^3, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}, \quad (8)$$

其中 $p_j^{n,0}, p_j^{n,1}, p_j^{n,2}$ 由传统插值方法可得, 在这里要求重构函数的网格平均和数值解相等,

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} R(x; u^n, U^n) dx = u_j^n. \quad (9)$$

即重构函数(8)中的系数在满足(9)式的前提下, 由插值可得

$$p_j^{n,0} = u_j^n - \frac{1}{24}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (10)$$

$$p_j^{n,1} = \frac{1}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2h}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{5}{24h}(u_{j+2}^n - 3u_{j+1}^n + 3u_j^n - u_{j-1}^n), \quad (11)$$

$$p_j^{n,2} = \frac{1}{2h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (12)$$

$$p_j^{n,3} = \frac{1}{6h^3}(u_{j+2}^n - 3u_{j+1}^n + 3u_j^n - u_{j-1}^n), \quad (13)$$

与通常插值不同, 在重构函数中的三次项系数 s_j^n 作为自由变量, 要求重构函数能量的网格平均和数值能量相等,

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(R(x; u^n, U^n)) dx = U_j^n \quad (14)$$

由此可见第二个数值实体, 即数值能量确实参与格式的计算, 因此对于能量来说不是被动守恒。

重构函数三次项系数 s_j^n 由(14)式可得

$$a(s_j^n)^2 + bs_j^n + c = 0 \quad (15)$$

其中

$$a = \frac{h^6}{448}, b = \frac{p_j^{n,1}h^4}{40}, c = (p_j^{n,0})^2 + \frac{(p_j^{n,1})^2h^2}{12} + \frac{(p_j^{n,2})^2h^4}{80} + \frac{p_j^{n,0}p_j^{n,2}h^2}{6} - U_j^n$$

当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时

$$s_j^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (16)$$

其中 s_j^n 取与 $p_j^{n,3}$ 距离近的值。

当 $b^2 - 4ac < 0$ 时

$$s_j^n = \frac{-b}{2a} \quad (17)$$

第二步发展, 以重构函数 $R(x; u^n, U^n)$ 作为 t_n 层的初值, 求解三阶线性方程

$$\begin{cases} v_t + f(v)_x = 0, -\infty < x < \infty, t_n < t \leq t_{n+1}, \\ v(x, t_n) = R(x; u^n, U^n), -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (18)$$

得到精确解 $v(x, t)$ 。

第三步网格平均, 在 t_{n+1} 时刻的数值解和数值能量分别为

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(x, t_{n+1}) dx \quad (19)$$

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v^2(x, t_{n+1}) dx \quad (20)$$

对三阶线性方程在 $(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}) \times (t_n, t_{n+1})$ 上求二重积分, 并应用 Green 公式可得数值格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (21)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda \left(\hat{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (22)$$

其中 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 是网格步长比。数值流函数和数值能量流函数分别为

$$\hat{f}_{j\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(v \left(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t \right) + v_{xx} \left(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t \right) \right) dt. \quad (23)$$

$$\hat{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(v \left(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t \right)^2 - v_x \left(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t \right)^2 + 2 \left(v \left(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t \right) v_{xx} \left(x_{j\pm\frac{1}{2}}, t \right) \right) \right) dt. \quad (24)$$

在格式中, 数值流函数采用左矩形公式数值离散,

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} & \left\{ \left(f \left(R \left(x_{j+\frac{1}{2}} - 0; u^n, U^n \right), R_{xx} \left(x_{j+\frac{1}{2}} - 0; u^n, U^n \right) \right) \right) \right. \\ & \left. + \left(f \left(R \left(x_{j+\frac{1}{2}} + 0; u^n, U^n \right), R_{xx} \left(x_{j+\frac{1}{2}} = 0; u^n, U^n \right) \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

数值能量流函数为

$$\begin{aligned} \hat{F}_{j\pm\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} & \left\{ \left(f \left(R \left(x_{j+\frac{1}{2}} - 0; u^n, U^n \right), R_x \left(x_{j+\frac{1}{2}} - 0; u^n, U^n \right), R_{xx} \left(x_{j+\frac{1}{2}} - 0; u^n, U^n \right) \right) \right) \right. \\ & \left. + \left(f \left(R \left(x_{j+\frac{1}{2}} + 0; u^n, U^n \right), R_{xx} \left(x_{j+\frac{1}{2}} + 0; u^n, U^n \right), R_{xx} \left(x_{j+\frac{1}{2}} + 0; u^n, U^n \right) \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

3. 数值算例

算例 3.1: 考虑方程(1), 精确解为

$$u(x, t) = \sin(2x + 6t), \quad (27)$$

在数值模拟中网格步长比 $\lambda = \frac{\tau}{h^3} = 0.2$, 实线表示精确解, *表示数值解, 数值结果如图 1 所示, 其中图 a 是初值图像, 图 b、图 c、图 d 分别为计算一个周期、十个周期和五十个周期后的结果。

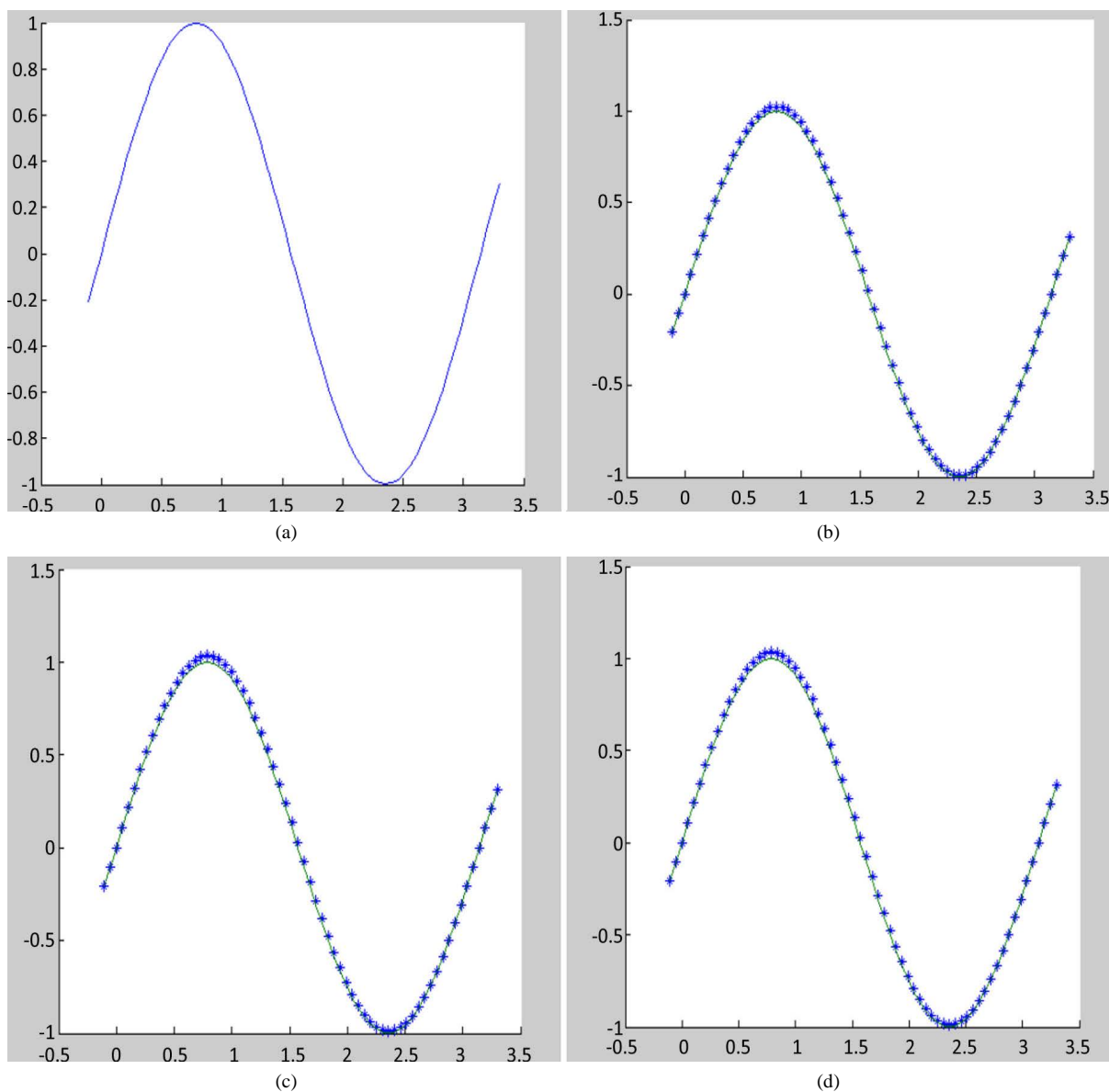


Figure 1. Numerical results at different times

图 1. 不同时刻的数值结果

由此可看出, 数值解在 50 个周期也保持了很好的数值模拟效果, 这是因为我们的数值格式满足两个守恒律, 所以数值结果在长时间的数值模拟中能保持很好的效果。

算例 3.2: 考虑方程(1)的双波解

$$u(x, 0) = \sin(3x + 24t) + \cos(2x + 6t), \quad (28)$$

在本算例中, 考虑两个波为初值, 从而可以看出波的干涉的情况, 数值结果显示了两个波的干涉过程。

在数值模拟中网格步长比 $\lambda = \frac{\tau}{h^3} = 0.2$, 结果如图 2 所示, 其中实线代表精确解, *代表数值解, 图 a 表示初始图像。图 b、图 c、图 d 分别代表 $t=1$, $t=3$, $t=4$ 时刻的数值解。可以看出, 在波的干涉过程中, 数值解能很好的保持解得结构。

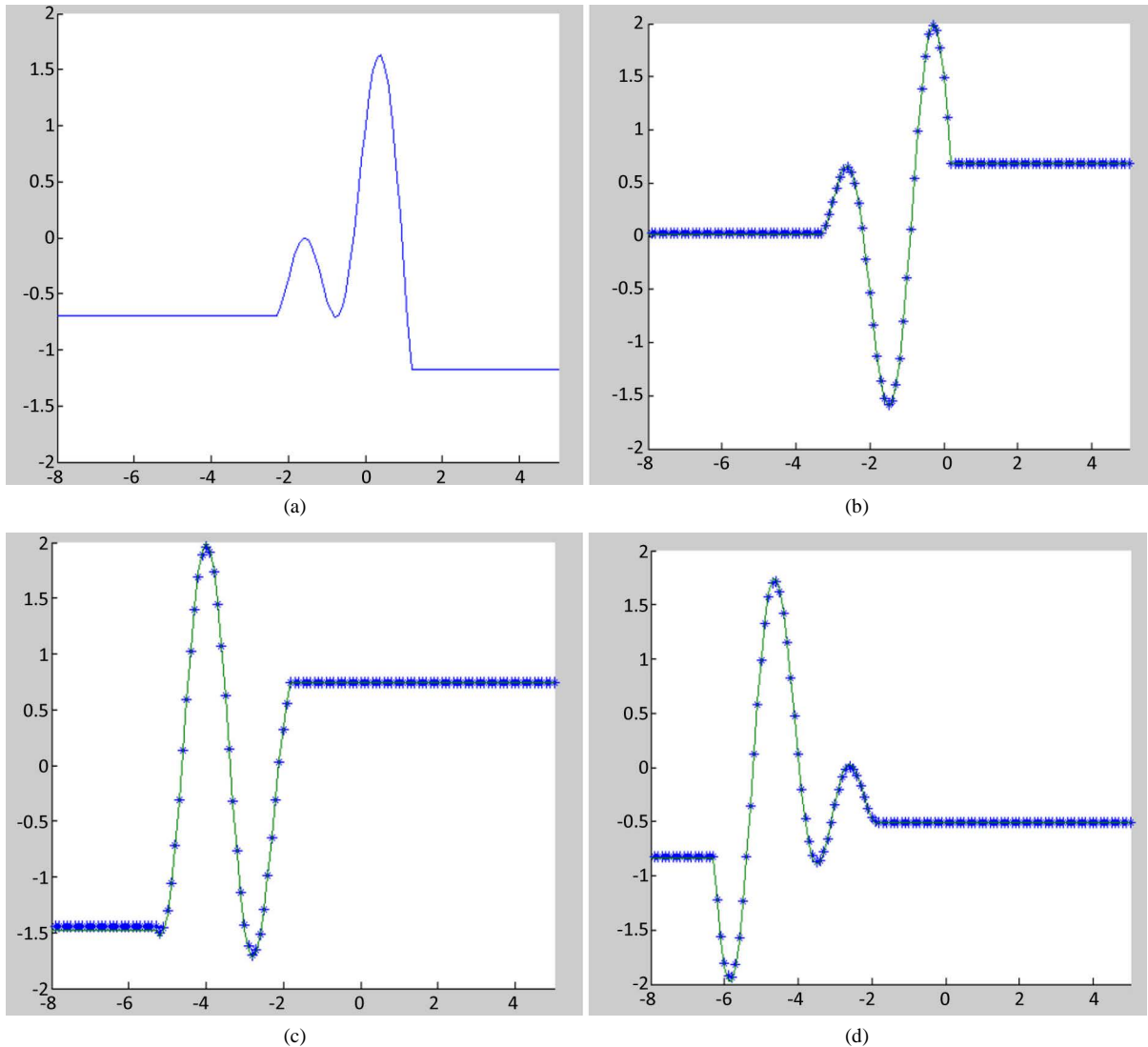


Figure 2. Numerical results at different times

图 2. 不同时刻的数值结果

4. 结论

对于三阶线性守恒型方程, 本文设计了同时满足两个守恒律的差分格式, 该格式是通过满足方程物理上的守恒性质得到的, 这样的格式具有很好的保结构性质。这种守恒型格式可推广到非线性的守恒方程和高维的方程。

参考文献

- [1] LeVeque, R. J. (2002) Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>

-
- [2] Harten, A., Osher, S., Engquist, B. and Chakravarthy, S.R. (1986) Some Results on Uniformly High-Order Accurate Essentially Nonoscillatory Schemes. *Applied Numerical Mathematics*, **2**, 347-377. [https://doi.org/10.1016/0168-9274\(86\)90039-5](https://doi.org/10.1016/0168-9274(86)90039-5)
- [3] Cui, Y. and Mao, D. (2007) Numerical Method Satisfying the First Two Conservation Laws for the Korteweg-De Vries Equation. *Journal of Computational Physics*, **227**, 376-399. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.07.031>
- [4] 李红霞, 茅德康. 单个守恒型方程熵耗散格式中熵耗散函数的构造[J]. 计算物理, 2004, 21(3): 319-331.
- [5] 李红霞. 一维守恒型方程(组)的熵耗散格式[D]: [博士学位论文]. 上海: 上海大学, 2005.
- [6] 王志刚. 线性传输方程的满足多个守恒律的差分格式[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海大学, 2006.
- [7] 王志刚, 茅德康. 线性传输方程满足 3 个守恒律的差分格式[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2006, 12(6): 588-592+598.