Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(3), 285-292**
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.93034

Hans汉斯

Volume Inequalities of the Mixed Sine Ellipsoid

Sitao Zhang

School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan
Email: 1352030977@qq.com

Received: Feb. 21st, 2020; accepted: Mar. 4th, 2020; published: Mar. 11th, 2020

Abstract

Associated with the sine ellipsoid and the mixed cone-volume functional, a new ellipsoid is introduced in this paper. Moreover, volume inequality of this ellipsoid is established, and the equality condition is found in this paper.

Keywords

Mixed Sine Ellipsoid, Mixed Legendre Ellipsoid, Duality

关于混合Sine椭球的体积不等式

张思涛

河南理工大学数学与信息科学学院，河南 焦作
Email: 1352030977@qq.com

收稿日期：2020年2月21日；录用日期：2020年3月4日；发布日期：2020年3月11日

摘 要

基于Sine椭球的定义和混合锥体积泛函，引入了一个新椭球。此外，本文进一步得到了新椭球的体积不等式，并得到了等式成立条件。

关键词

混合Sine椭球，混合Legendre椭球，极性

文章引用: 张思涛. 关于混合 Sine 椭球的体积不等式[J]. 应用数学进展, 2020, 9(3): 285-292.
DOI: 10.12677/aam.2020.93034

1. 引言

众所周知，椭球是凸几何分析中一个重要的研究对象，经常出现在等周问题和一些极值问题里。例如，著名的 John 椭球是凸体包含的最大体积的椭球，被广泛的应用于凸几何分析和 Banach 空间几何。近些年来，椭球得到了广泛的关注并产生了大量的深刻结果[1] [2] [3]。本文中所涉及的 n-维欧式空间 R^n 中的凸体和星体分别是包含原点在其内部的非空紧凸集和包含原点在其内部的非空紧星形集。用 ω_n 表示单位球 B 在 R^n 中的体积。我们分别用 K_o^n 和 S_o^n 来表示 R^n 中的凸体和星体组成的集合。在经典力学中，与凸体 K 相关的惯量椭球 $\Gamma_2 K$ 是指在任一方向上他们有相同的转动惯量，这个椭球就是熟知的 Legendre 椭球。对于 $K\in S_o^n$ 和 $u\in S^{n-1}$，它的支撑函数定义为：

$$h_{\Gamma_2 K}^2=(n+2)\int_K |u\cdot x|^2 \mathrm{d}x \Big/ V(K) \tag{1}$$

其中 $V(K)$和 $x\cdot y$ 分别表示在 R^n 中 K 的体积和 x 和 y 的标准内积。在文献[4]中，Lutwak，Yang 和 Zhang 得到了如下体积不等式：

$$V(\Gamma_2 K)\ge V(K) \tag{2}$$

其中等号成立当且仅当 K 是关于原点中心对称的球。

勾股定理陈述为：如果 $x,y\in R^n$，则

$$|x\cdot y|^2+[x,y]^2=|x|^2|y|^2 \tag{3}$$

其中 $|x|$ 表示 x 的 n-维欧式范数，$[x,y]$ 表示由 x 和 y 张成的平行四边形的 2 维体积。受该定理的启发，Li，Huang 和 Xi 在文献[5]中定义了 Sine 椭球：

$$h_{\Lambda_2 K}^2(x)=(n+2)\int_K [x,y]^2 \mathrm{d}y \Big/ V(K) \tag{4}$$

关于 $\Lambda_2 K$ 的不等式(2)的模型被建立：对于 $K\in R^n$，则有

$$V(\Lambda_2 K)\ge (n-1)^{n/2} V(K) \tag{5}$$

其中等号成立当且仅当 $n\ge 3$ 时，K 是关于原点中心对称的球。当 $n=2$ 时，K 是关于原点中心对称的椭球。

作为 Legendre 椭球的对偶形式，Lutwak，Yang 和 Zhang [4]引入了 LYZ 椭球，其径向函数定义为：

$$\rho_{\Gamma_{-2}K}^{-2}=\int_{S^{n-1}} |u\cdot x|^2 \mathrm{d}S_2(K,v) \Big/ V(K) \tag{6}$$

其中 $\mathrm{d}S_2(K,v)$ 表示 K 的 L_2 表面积测度。Hu 和 Xiong [6]中定义了混合 LYZ 椭球，这启发我们定义两个新椭球 $\Gamma_2(K,L)$ 和 $\Lambda_2(K,L)$：对于 $K,L\in S_o^n$ 和 $x\in R^n$，则有

$$h_{\Gamma_2(K,L)}^2=(n+2)\int_K |x\cdot y|^2 \mathrm{d}y \Big/ V_1(K,L) \tag{7}$$

$$h_{\Lambda_2(K,L)}^2(x)=(n+2)\int_K [x,y]^2 \mathrm{d}y \Big/ V_1(K,L) \tag{8}$$

其中 $V_1(K,L)$ 表示 K 和 L 的第一混合体积。对于椭球 $\Gamma_2(K,L)$ 和 $\Lambda_2(K,L)$ 和它们极体有如下关系：

$$\Gamma_2(K,L)+_2\Lambda_2(K,L)=c_1B,\quad \Gamma_2^*(K,L)\tilde{+}_{-2}\Lambda_2^*(K,L)=B/c_1$$

其中

$$c_1^2=(n+2)\int_K|y|^2\mathrm{d}y\Big/V_1(K,L).$$

本文将得到有关椭球$\Lambda_2(K,L)$的以下体积不等式。

定理 1.1： 如果 $K,L\in S_o^n$ 和 L 包含原点在其内部，那么

$$V(\Lambda_2(K,L))\geq(n-1)^{n/2}V(K) \tag{9}$$

其中等号成立当且仅当 K 和 L 是关于原点中心对称的球。

2. 预备知识

我们将列举有关凸体的一些背景知识，可以参考 Schneider 的有关凸体的百科全书[7]。

如果 $K\in K_o^n$ 和 $y\in K$，那么 K 的极体定义为：

$$K^*=\{x\in R^n,x\cdot y\leq 1\}. \tag{10}$$

它的支撑函数定义为：

$$h_K=\max\{x\cdot y:y\in K\} \tag{11}$$

对于 $\phi\in GL(n)$，那么

$$h_{\phi K}(x)=h_K(\phi^t x). \tag{12}$$

如果出 $c>0$，那么

$$h_{cK}(x)=ch_K(x). \tag{13}$$

如果 $K\in S_o^n$，其径向函数为：

$$\rho_K(x)=\max\{\lambda\geq 0:\lambda x\in K\}. \tag{14}$$

通过(10)，(11)和(14)，有

$$h_{K^*}=\rho_K^{-1},\quad \rho_{K^*}=h_K^{-1} \tag{15}$$

对于 $\phi\in GL(n)$，有

$$(\phi K)^*=\phi^{-t}K. \tag{16}$$

对于 $\varepsilon>0$ 和 $K,L\in K_o^n$，那么 K 和 L 的 Lp Minkowski-Firey 组合定义为：

$$h_{K+_p\varepsilon\cdot L}^p=h_K^p+h_L^p. \tag{17}$$

关于 $K,L\in K_o^n$ 的 Lp 混合体积 $V_p(K,L)$ 定义为：

$$V_p(K,L)=\frac{p}{n}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{V(K+_p\varepsilon\cdot L)-V(K)}{\varepsilon},$$

其积分表达式为：

$$V_p(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h_L^p(v)\mathrm{d}S_p(K,v),$$

其中

$$\mathrm{d}S_p(K,\cdot)=h_K(\cdot)^{1-p}\,\mathrm{d}S(K,\cdot),$$

是 K 的 Lp 表面积测度，$S(K,\cdot)$ 是 K 的经典表面积测度。特别地，

$$V_p(K,K)=V(K).$$

Lp Brunn-Minkowski 不等式[8]陈述为：对于 $p\ge 0$ 和 $K,L\in K_o^n$，有

$$V(K+_pL)^{p/n}\ge V(K)^{p/n}+V(L)^{p/n} \tag{18}$$

其中等号成立当且仅当 K 和 L 是膨胀的。

对于 $\varepsilon>0$ 和 $K,L\in S_o^n$，那么 K 和 L 的 Lp 调和径向组合定义为：

$$\rho_{K\tilde{+}_{-p}\varepsilon\cdot L}^{-p}=\rho_K^{-p}+\rho_L^{-p}. \tag{19}$$

关于 $K,L\in S_o^n$ 的对偶 Lp 混合体积 $V_p(K,L)$ 定义为：

$$\tilde{V}_{-p}(K,L)=-\frac{p}{n}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{V(K\tilde{+}_{-p}\varepsilon\cdot L)-V(K)}{\varepsilon},$$

其积分表达式为：

$$\tilde{V}_{-p}(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n+p}(v)\rho_L^{-p}(v)\mathrm{d}v,$$

这个积分是关于球面 Lebesgue 测度的积分。特别地，

$$\tilde{V}_{-p}(K,K)=V(K).$$

对偶 Lp Brunn-Minkowski 不等式陈述为：对于 $p>0$ 和 $K,L\in S_o^n$，有

$$V(K\tilde{+}_{-p}L)^{-p/n}\ge V(K)^{-p/n}+V(L)^{-p/n}$$

其中等号成立当且仅当 K 和 L 是膨胀的。

椭球 Γ_2K 和 $\Gamma_{-2}K$ 有如下体积不等式：对于 $K\in K_o^n$，有

$$V(\Gamma_2K)\ge V(\Gamma_{-2}K) \tag{20}$$

其中等号成立当且仅当 K 和 L 是关于原点中心对称的椭球。由混合 Legendre 椭球的定义，我们有

$$\Gamma_2(\phi K,\phi L)=\phi\Gamma_2(K,L). \tag{21}$$

假设 A 是正定的 $n\times n$ 对称矩阵，椭球 $E(A)=\{y\in R^n: y\cdot Ay\le 1\}$ 的支撑函数和径向函数为：

$$h_{E(A)}^2(x)=x\cdot A^{-1}x,\quad \rho_{E(A)}^{-2}(x)=x\cdot Ax. \tag{22}$$

$[x,y,v_3,\cdots,v_k]$ 表示 $x,y,v_3,\cdots,v_k,k\ge 3$ 张成的超平行体的体积，有如下引理[5]。

引理 2.1：如果 $p>0$ 和 $[x,y]\ne 0$，那么

$$\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}[x,y,v_3,\cdots,v_n]^p\big/[x,y]^p\mathrm{d}v_3\cdots\mathrm{d}v_n, \tag{23}$$

是一个仅仅与 n 和 p 有关的常数，特别地

$$\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}[x,y,v_3,\cdots,v_n]^2\big/[x,y]^2\mathrm{d}v_3\cdots\mathrm{d}v_n=(n-2)!\,\omega_n^{n-2}. \tag{24}$$

文献[7]中的不等式(5.133)表述为：如果$Q_1,\cdots,Q_n$是正定的$n\times n$矩阵，那么

$$D(Q_1,\cdots,Q_n)=(\det Q_1)^{1/n}\cdots(\det Q_n)^{1/n}, \tag{25}$$

其中等号成立当且仅当$Q_i=Q_1,i=2,\cdots,n$对于实数λ_i成立。在S^{n-1}上的Borel测度μ生成半正定的$n\times n$矩阵$[\mu]$定义为：

$$[\mu]=\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}} v\otimes v\mathrm{d}\mu(v) \tag{26}$$

其中$v\otimes v$是在R^n 上的 x 到$(x\cdot v)v$秩为 1 的线性算子。在文献[8]中证明了对于在S^{n-1}上的 Borel 测度$\mu_1,\cdots,\mu_n$，判别式$[\mu_1],\cdots,[\mu_n]$定义为：

$$D([\mu_1],\cdots,[\mu_n])=\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}[v_1,\cdots,v_n]^2\mathrm{d}\mu_1(v_1)\cdots\mathrm{d}\mu_n(v_n), \tag{27}$$

结合(25)式，有

$$D([\mu_1],\cdots,[\mu_n])\ge(\det[\mu_1])^{1/n}\cdots(\det[\mu_n])^{1/n}, \tag{28}$$

其中等号成立当且仅当$[\mu_i]=\lambda_i[\mu_1],i=2,\cdots,n$对于实数$\lambda_i$成立。

3. 体积不等式

对于$u\in S^{n-1}$，通过(17)，(1)，(8)，(7)，(3)和(13)，有

$$h^2_{\Gamma_2(K,L)+_2\Lambda_2(K,L)}(u)=h^2_{\Gamma_2(K,L)}(u)+h^2_{\Lambda_2(K,L)}(u)=(n+2)\int_K|y|^2\mathrm{d}y\Big/V_1(K,L)=h^2_{c_1B}(u)=c_1^2.$$

通过(19)，(15)和(16)，有

$$\rho^{-2}_{\Gamma_2^*(K,L)\tilde{+}_{-2}\Lambda_2^*(K,L)}(u)=\rho^{-2}_{\Gamma_2^*(K,L)}(u)+\rho^{-2}_{\Lambda_2^*(K,L)}(u)=h^2_{\Gamma_2(K,L)}(u)+h^2_{\Lambda_2(K,L)}(u)=h^2_{c_1B}(u)=\rho^{-2}_{c_1^{-1}B}(u),$$

其中

$$c_1^2=(n+2)\int_K|y|^2\mathrm{d}y\Big/V_1(K,L).$$

经典的Blaschke-Santalo不等式陈述为：对于$K\in K_o^n$是原点对称的，那么

$$V(K)V(\Gamma_2^*K)\le\omega_n^2, \tag{29}$$

其中等号成立当且仅当K是原点对称的椭球。Lutwak和Zhang在文献[9]中将(29)式推广到Lp空间。我们将建立椭球$\Lambda_2^*(K,L)$形式的不等式(29)。

定理 3.1：如果$K,L\in S_o^n$和L包含原点在其内部，那么

$$V(K)V(\Lambda_2^*(K,L))\le\omega_n^2\big/(n-1)^{n/2}, \tag{30}$$

其中等号成立当且仅当K和L是原点对称的球。

假设$K_2,\cdots,K_n,L\in S_o^n$和$L$包含原点在其内部，对于$p\ge1$，凸体$T_p(K_2,\cdots,K_n,L)$的支撑函数定义为：

$$h^p_{T_p(K_2,\cdots,K_n,L)}(x)=(n+p)^{n-1}\int_{K_2}\cdots\int_{K_n}[x,x_2,\cdots,x_n]^p\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\Big/V_1(K_2,L)V_1(K_3,B)\cdots V_1(K_n,B). \tag{31}$$

通过极坐标转化为：

$$h^p_{T_p(K_2,\cdots,K_n,L)}(x)=\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}[x,v_2,\cdots v_n]^p\rho^{n+p}_{K_2}(v_2)\cdots\rho^{n+p}_{K_n}(v_n)\mathrm{d}v_2\cdots\mathrm{d}v_n\Big/V_1(K_2,L)V_1(K_3,B)\cdots V_1(K_n,B). \tag{32}$$

易知：凸体 $T_p(K_2,\cdots,K_n,L)$ 是一个椭球。T_p 的仿射性如下：

定理 3.2：如果 $p\ge 1$，$\phi\in GL(n)$ 和 $K_2,\cdots,K_n,L\in S_o^n$，那么

$$T_p(\phi K_2,\cdots,\phi K_n,\phi L)=|\det\phi|^{(p+1)/p}\phi^{-t}T_p(K_2,\cdots,K_n,\phi L).$$

证明：通过(31)，(12)和(13)，有

$$\begin{aligned}
&h^p_{T_p(\phi K_2,\cdots,\phi K_n,\phi L)}(x)\\
&=(n+p)^{n-1}\int_{\phi K_2}\cdots\int_{\phi K_n}[x,x_2,\cdots,\phi x_n]^p\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\Big/V_1(\phi K_2,\phi L)V_1(\phi K_3,B)\cdots V_1(\phi K_n,B)\\
&=(n+p)^{n-1}\int_{K_2}\cdots\int_{K_n}[x,\phi x_2,\cdots,\phi x_n]^p|\det\phi|^{n-1}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\Big/|\det\phi|^{n-2}V_1(K_2,L)V_1(K_3,\phi^{-1}B)\cdots V_1(K_n,\phi^{-1}B)\\
&=(n+p)^{n-1}\int_{K_2}\cdots\int_{K_n}\left[\phi^{-1}x,x_2,\cdots,x_n\right]^p|\det\phi|^{p+1}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\Big/V_1(K_2,L)V_1(K_3,B)\cdots V_1(K_n,B)\\
&=|\det\phi|^{p+1}h^p_{T_p(K_2,\cdots,K_n,L)}(\phi^{-1}x)=h^p_{|\det\phi|^{(p+1)/p}\phi^{-t}T_p(K_2,\cdots,K_n,L)}(\phi^{-1}x).
\end{aligned}$$

对于 $p\ge 1$，$K,L\in S_o^n$ 和 L 包含原点在其内部，凸体 $\Lambda_p(K,L)$ 的支撑函数为：

$$h^p_{\Lambda_p(K,L)}(x)=(n+p)\int_K[x,y]^p\mathrm{d}y\Big/V_1(K,L).$$

当 $p=2$ 时，凸体 $\Lambda_p(K,L)$ 是(8)中定义的椭球。

定理 3.3：如果 $p\ge 1$，$K,L\in S_o^n$ 和 L 包含原点在其内部，那么仅仅存在一个与 n,p 有关的常数 $c_{n,p}>0$，使得

$$T_p(K,B,\cdots,B,L)=c_{n,p}\Lambda_p(K,L).$$

特别地，

$$T_2(K,B,\cdots,B,L)=((n-2)!)^{1/2}\Lambda_2(K,L).\tag{33}$$

证明：假设 $K_2=K$ 和把 $K_3=\cdots=K_n=B$ 代入(32)中，结合引理 2.1，有

$$\begin{aligned}
h^p_{T_p(K,B,\cdots,B,L)}(x)&=\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}[x,v_2,\cdots,v_n]^p\rho_K^{n+p}(v_2)\mathrm{d}v_2\cdots\mathrm{d}v_n\Big/V_1(K,L)\omega_n^{n-2}\\
&=c_{n,p}\int_{S^{n-1}}[x,v_2]^p\rho_K^{n+p}(v_2)\mathrm{d}v_2\Big/V_1(K,L)\\
&=c_{n,p}(n+p)\int_K[x,y]^p\mathrm{d}y\Big/V_1(K,L)\\
&=h^p_{c_{n,p}\Lambda_p(K,L)}(x)
\end{aligned}$$

其中常数

$$c_{n,p}=\left(\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}\left([x,v_2,\cdots,v_n]/[x,v_2]\right)^p\mathrm{d}v_3\cdots\mathrm{d}v_n\Big/\omega_n^{n-2}\right)^{1/p}.$$

特别地 $c_{n,2}=((n-1)!)^{1/2}$，通过(24)，得到(33)。

定理 3.4：如果 $K_2,\cdots,K_n,L\in S_o^n$ 和 L 包含原点在其内部，那么

$$V(\Gamma_2(K_2,L))\cdots V(\Gamma_2(K_n,L))V(T_2^*(K_2,\cdots,K_n,L))\le((n-1)!)^{-n/2}\omega_n^n,\tag{34}$$

其中等号成立当且仅当 $\Gamma_2(K_i,L),i=2,\cdots,n$ 是球。

证明：通过(21)，(16)，不等式(34)的左边是 $GL(n)$ 不变量，那么我们假设

$$T_2(K_2,\cdots,K_n,L)=B, \tag{35}$$

则有

$$1=h^p_{T_2(K_2,\cdots,K_n,L)}(v)=\int_{K_2}\cdots\int_{K_n}[x,v_2,\cdots,v_n]^2\rho_{K_2}^{n+2}\cdots\rho_{K_n}^{n+2}\mathrm{d}v\mathrm{d}v_2\cdots\mathrm{d}v_n \Big/ V_1(K_2,L)V_1(K_3,B)\cdots V_1(K_n,B). \tag{36}$$

关于球面 Legendre 测度积分得

$$n\omega_n=\int_{K_2}\cdots\int_{K_n}[x,v_2,\cdots,v_n]^2\rho_{K_2}^{n+2}\cdots\rho_{K_n}^{n+2}\mathrm{d}v\mathrm{d}v_2\cdots\mathrm{d}v_n \Big/ V_1(K_2,L)V_1(K_3,B)\cdots V_1(K_n,B). \tag{37}$$

通过(26)和(27)，有

$$D([B],[K_2,L],\cdots,[K_n,L])=1/(n-1)!, \tag{38}$$

其中 $D([B],[K_2,L],\cdots,[K_n,L])$ 关于正定的 $n\times n$ 矩阵的判别式定义为

$$[B]=\int_{S^{n-1}}v\otimes v\mathrm{d}v \Big/ \omega_n=I_n, \tag{39}$$

$$[K_2,L]=(n+2)\int_{K_2}y\otimes y\mathrm{d}y \Big/ V_1(K_2,L), \tag{40}$$

$$[K_i,L]=(n+2)\int_{K_i}y\otimes y\mathrm{d}y \Big/ V_1(K_i,B), \tag{41}$$

通过(1)，(22)，(38)，(39)，(28)和(35)，得

$$\begin{aligned}1/(n-1)!&=D([I_n],[K_2,L],\cdots,[K_n,L])\\&\ge\left(V(\Gamma_2(K_2,L))\omega_n^{-1}\right)^{2/n}\cdots\left(V(\Gamma_2(K_n,L))\omega_n^{-1}\right)^{2/n}\\&=V(\Gamma_2(K_2,L))^{2/n}\cdots V(\Gamma_2(K_n,L))^{2/n}V\left(T_2^*(K_2,\cdots,K_n,L)\right)^{2/n},\end{aligned}$$

得到不等式(34)。通过(28)，(39)中的等式成立当且仅当 $[K_i,L]=\lambda_i I_n, i=2,\cdots,n$ 对于实数 λ_i。进而得到 $\Gamma_2(K_i,L), i=2,\cdots,n$ 是球。

定理 3.5：如果 $K_2,\cdots,K_n,L\in S_o^n$ 和 $K_2,\cdots,K_n\subseteq L$，那么

$$V(K_2)\cdots V(K_n)V\left(T_2^*(K_2,\cdots,K_n,L)\right)\le\left((n-1)!\right)^{-n/2}\omega_n^n, \tag{42}$$

其中等号成立当且仅当 $K_i,L,i=1,\cdots,n$ 是关于原点中心对称的球。

证明：通过(2)和(34)，我们有

$$\begin{aligned}\left((n-1)!\right)^{-n/2}\omega_n^n&\ge V(\Gamma_2(K_2,L))\cdots V(\Gamma_2(K_n,L))V\left(T_2^*(K_2,\cdots,K_n,L)\right)\\&\ge V(\Gamma_2K_2)\cdots V(\Gamma_2K_n)V\left(T_2^*(K_2,\cdots,K_n,L)\right)\\&\ge V(K_2)\cdots V(K_n)V\left(T_2^*(K_2,\cdots,K_n,L)\right),\end{aligned}$$

由(34)的等式条件和(2)，不等式(42)等式成立当且仅当 $K_i,L,i=1,\cdots,n$ 是关于原点中心对称的球。

通过定理 3.4 和(16)，得到定理 3.1。结合不等式(29)和 $\Lambda_2(K_i,L)$ 是关于原点中心对称的球得到不等式(9)。

参考文献

[1] Ball, K. (1997) An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry, Flavors of Geometry. MSRI Publications,

Vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Giannopulos, A. and Milman, V.D. (2001) Euclidean Structure in Fifinite Dimensional Normed Spaces. Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. I. Johnson, W B. and Lindenstrauss, J., Eds., North-Holland, Amsterdam. https://doi.org/10.1016/S1874-5849(01)80019-X

[3] Pisier, G. (1989) The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry. Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 94. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511662454

[4] Lutwak, E., Ynag, D. and Zhang, G. (2000) A New Ellipsoid Associated with Convex Bodies. *Duke Mathematical Journal*, **104**, 375-390. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10432-2

[5] Li, A.-J., Huang, Q. and Xi, D. (2019) New Sine Ellipsoids and Related Volume Inequalities. *Advances in Mathematics*, **353**, 281-311. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.07.007

[6] Hu, J.Q. and Xiong, G. (2019) A New Affine Invariant Geometric Functional for Polytopes and Its Associated Affine Isoperimetric Inequalities. *International Mathematics Research Notices*, 1-19. https://doi.org/10.1093/imrn/rnz090

[7] Schneider, R. (2014) Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (Book 151), Cambridge University Press, Cambridge.

[8] Lutwak, E., Yang, D. and Zhang, G. (2004) Volume Inequalities for Subspaces of Lp. *Journal of Differential Geometry*, **68**, 159-184. https://doi.org/10.4310/jdg/1102536713

[9] Lutwak, E. and Zhang, G. (1997) Blaschke-Santalo Inequalities. *Journal of Differential Geometry*, **47**, 1-16. https://doi.org/10.4310/jdg/1102536713