Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(3), 307-317**
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.93037

Hans汉斯

Infinitely Many Solutions to a Class of Quasilinear N-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$

Guixiang Du, Jing Li

College of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
Email: slyphna@163.com

Received: Feb. 25th, 2020; accepted: Mar. 9th, 2020; published: Mar. 16th, 2020

Abstract

Under the assumption of the nonlinearity with critical exponential growth, we consider the existence of solutions to a class of quasilinear N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$. By symmetric mountain pass lemma and variational argument, the existence of solutions is established.

Keywords

Trudinger-Moser Inequality, Symmetric Mountain Pass Lemma, Critical Exponential Growth

$\mathbb{R}^N$上一类拟线性N-拉普拉斯方程的无穷解

杜桂香，李　静

临沂大学数学与统计学院，山东　临沂
Email: slyphna@163.com

收稿日期：2020年2月25日；录用日期：2020年3月9日；发布日期：2020年3月16日

摘　要

本文主要研究$\mathbb{R}^N$上一类拟线性N-拉普拉斯方程，在非线性项为临界指数增长的情况下，借助对称山路引理以及变分法得出多解的存在性。

关键词

Trudinger-Moser不等式，山路引理，临界指数增长

文章引用: 杜桂香, 李静. $\mathbb{R}^N$上一类拟线性N-拉普拉斯方程的无穷解[J]. 应用数学进展, 2020, 9(3): 307-317.
DOI: 10.12677/aam.2020.93037

1. 引言及主要结论

本文主要研究一类拟线性的 N-拉普拉斯方程多解的存在性

$$-\Delta_N u+V(x)|u|^{N-2}u-\Delta_N\left(|u|^{2\alpha}\right)|u|^{2\alpha-2}u=g(x),\ x\in\mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

其中 $\Delta_N u=div\left(|\nabla u|^{N-2}\nabla u\right)$ 为 N-拉普拉斯算子，参数 $\alpha>\frac{1}{2}$，我们做如下假定

($\mathcal{V}_1$) 存在 $V_0>0$ 使得在 $\mathbb{R}^N$ 中 $V(x)\ge V_0$。此外 $V(x)\to\infty$，$|x|\to\infty$；或者更为一般化对每个 $M>0$，$\text{meas}\left(\{x\in R^N:V(x)\le M\}\right)<\infty$。“其中 meas”为 $\mathbb{R}^N$ 上 Lebesgue 测度。

($\mathcal{F}_1$) 奇函数 $g(s)\in C^1(\mathbb{R})$，$g(t)>0$，$t>0$ 且存在 C_0，α_0，$q>0$ 使得

$$|g(s)|\le C_0|s|^{q-1}\left[\exp\left(\alpha_0|s|^{\frac{2\alpha N}{N-1}}\right)-S_{N-2}(\alpha_0,s)\right],\ \forall s\in\mathbb{R}, \tag{1.2}$$

其中

$$S_{N-2}(\alpha_0,s)=\sum_{k=0}^{N-2}\frac{\alpha_0^k}{k!}|s|^{\frac{2\alpha N}{N-1}},\ \forall s\in\mathbb{R}. \tag{1.3}$$

($\mathcal{F}_2$) 存在 $q>N$ 和 $\mu_0>0$ 使得

$$0\le qG(s)\le sg(s)\le\mu_0|s|^q\exp\left(\alpha_0|s|^{\frac{2\alpha N}{N-1}}\right) \tag{1.4}$$

其中 $G(s)=\int_0^s g(t)\mathrm{d}t$，在 $\mathbb{R}$ 函数上 $sg(s)$ 递增且有 $\lim_{|s|\to\infty}\frac{G(s)}{sg(s)}=0$。

($\mathcal{F}_3$) 存在 $\mu_1>0$ 和 $q>N$ 使得

$$G(s)\ge\mu_1|s|^q,\ \forall s\in\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

在过去的几十年间大量的学者都在研究拟线性的 Schrödinger 方程，详情可参考文献[1] [2]。在[3]中，作者利用约束极小化方法，得出拟线性的 Schrödinger 方程正基态解的存在性结论。在[4]中，运用变量替换把拟线性问题转化为半线问题，在 Orlicz 空间中借助山路引理得出解的存在性结论。在[5]中作者考虑了 $N=2$ 的情形，其中非线性项具有临界指数增长，即当 $|s|\to\infty$ 时形如 $\exp\left(4\pi s^4\right)-1$，运用 $\mathbb{R}^N$ 上 Trudinger-Moser 不等式结合山路定理得出解的存在性。特别的在[4] [6] [7]中，研究了具有参数α的方程正基态解

$$-\Delta u+V(x)u-\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)|u|^{2\alpha-2}u=\lambda|u|^{p-1}u,\ x\in\mathbb{R}^N \tag{1.6}$$

其中 $\alpha>\frac{1}{2}$，$\lambda>0$，$2<p+1<\frac{4\alpha N}{N-2}$。

据作者了解，关于方程(1.1)的多解存在性鲜有相关文献及结论，本文主要借助文献[5] [8]中的思路。由于拟线性项 $\Delta_N\left(|u|^{2\alpha}\right)|u|^{2\alpha-2}u$ 的存在，使得紧嵌入不再成立，因此我们需要考虑合适的工作空间也就需要更为细致的估测。

本文记 $X = W^{1,n}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 并且

$$E = \left\{u \in W^{1,n}\left(\mathbb{R}^N\right): \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^N + V(x)|u|^N\right)\mathrm{d}x < \infty\right\}$$

具备范数

$$\|u\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^N + V(x)|u|^N\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N}}. \tag{1.7}$$

主要结论如下

定理 1.1： 假设$(\mathcal{V}_1)$和$(\mathcal{F}_2)$~$(\mathcal{F}_3)$成立。则方程(1.1)在 E 中存在无穷多个解。

2. 使用须知

为了方便证明需要引入下列引理

引理 2.1： (有界区域上的 Trudinger-Moser 不等式) [9] [10]。设 $\mu \in W_0^{1,N}(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$。为一有界区域，则有

$$\int_\Omega \mathrm{e}^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}}\mathrm{d}x < \infty, \forall \alpha > 0$$

此外，存在 $C = C(N, |\Omega|)$ 使得

$$\sup\|u\|_{W_0^{1,N}\Omega} \leq 1 \int_\Omega \mathrm{e}^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}}\mathrm{d}x \leq C, \forall \alpha \leq \alpha_N,$$

其中 $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}} > 0$ 且 ω_{N-1} 为 $(N-1)$-球体的 $(N-1)$-维测度。

引理 2.2： (无界区域上的 Trudinger-Moser 不等式) [5] [11]。设 $\mu \in W_0^{1,N}\left(\mathcal{R}^N\right), N \geq 2$，则有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\mathrm{e}^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} - S_{N-2}(\alpha, u)\right)\mathrm{d}x < \infty, \forall \alpha > 0$$

此外，如果有 $|\nabla u|_N^N \leq 1, |u|_N \leq M < \infty$ 和 $\alpha \leq \alpha_N$，则存在正常数 $C = C(N, M, \alpha)$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\mathrm{e}^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} - S_{N-2}(\alpha, u)\right)\mathrm{d}x \leq C,$$

其中 $S_{N-2}(\alpha, u) = \sum_{k=0}^{N-2}\frac{\alpha^k}{k!}|u|^{\frac{Nk}{N-1}}$。

与此同时，联合以上两个引理以及 Holder 不等式，假如 $\alpha, q > 0$ 那么

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} - S_{N-2}(\alpha, u)\right)\mathrm{d}x < \infty, \forall u \in W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right) \tag{2.1}$$

更确切的，当 $\alpha M^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N$ 时，如果有 $\|u\|W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right) \leq M$ 成立，则存在 $C = C(\alpha, q, N) > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\left(\mathrm{e}^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} - S_{N-2}(\alpha, u)\right)\mathrm{d}x \leq C\|u\|_{W^{1,N}}^q\left(\mathbb{R}^N\right), \tag{2.2}$$

其中 $\|u\|W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right) = \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^N + |u|^N\right)\mathrm{d}x\right)^{1/N}$ Sobolev 空间 $W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 的范数。

引理 2.3 [12]：设 $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$，其中 $r \geq 1, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ 为任意区域，那么对 $q \geq r$ 会有

$$\|u\|_q \leq c(N, r) q^{1-1/N}\|\nabla u\|_N^{1-\frac{r}{q}}\|u\|_r^{\frac{r}{q}}. \tag{2.3}$$

$q^{1-1/N}$ 为最佳指数，特别的有，

$$c(N,N)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\Gamma(2N)}{2\Gamma(N)^2}\right)^{1/N}\equiv d_N. \tag{2.4}$$

注 2.1： 由上面的引理可知，当 $q\geq N$ 时 $X\to L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ 为连续嵌入且有

$$\|u\|_q\leq d_N q^{1-1/N}\|u\|_Y.$$

考察方程(1.1)所对应的能量泛函 $I(u)$

$$I(u)=\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+(2\alpha)^{N-1}|u|^{(2\alpha-1)N}\right)|\nabla u|^N\,\mathrm{d}x+\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^N\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}G(u)\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

需要指出的是 $I(u)$ 在 X 中无法定义，为了克服这一困难需引入变量替换[2] $u=f(v)$ 或者 $v=f^{-1}(u)$，其中 f 为

$$f'(t)=\left(1+(2\alpha)^{N-1}|f(t)|^{(2\alpha-1)N}\right)^{-1/N},t\geq 0, f(0)=0 \tag{2.6}$$

$$f(t)=-f(-t),t\in(-\infty,0].$$

引理 2.4： 函数 $f(t)$ 满足

(f_1) $f\in C^2$ 唯一确定且在$\mathbb{R}$上可逆，

(f_2) $0<f'(t)\leq 1$， $\forall t\in\mathbb{R}^N$，

(f_3) $|f(t)|\leq|t|$， $\forall t\in\mathbb{R}^N$，

(f_4) 当 $t\to 0$ 时， $\frac{f(t)}{t}\to 1$，

(f_5) $|f(t)|\leq(2\alpha)^{1/2\alpha N}|t|^{1/2\alpha},\forall t\in\mathbb{R}^N$，

(f_6) $\frac{1}{2}f(t)\leq\alpha tf'(t)\leq\alpha f(t),\forall t\in[0,\infty)$ 以及 $\alpha f(t)\leq\alpha tf'(t)\leq\frac{1}{2}f(t),\forall t\in(-\infty,0]$，

(f_7) $\exists a\in\left(0,(2\alpha)^{1/2\alpha N}\right)$ 使得 $\frac{f(t)}{t^{1/2\alpha}}\to a,t\to+\infty$，

(f_8) $\exists b_0>0$ 使得

$$|f(t)|\geq\begin{cases}b_0|t| & |t|\leq 1,\\ b_0|t|^{1/2\alpha} & |t|\geq 1.\end{cases}$$

通过变量替换后 $I(u)$ 变为

$$J(v)\equiv I(f(v))=\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^N\,\mathrm{d}x+\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(v)|^N\,\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}G(f(v))\mathrm{d}x \tag{2.7}$$

易见在假设($\mathcal{F}_1$)~($\mathcal{F}_2$)的条件下， $J(v)$ 在 X 上有定义。

若 $v\in W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right)\cap L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)(p>1)$ 为泛函 J 的临界点，即对所有的 $\varphi\in W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 有 $J'(v)\varphi=0$ 其中

$$J'(v)\varphi=\int_{R^N}|\nabla v|^{N-2}\nabla v\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_{R^N}V(x)|f(v)|^{N-2}f(v)f'(v)\varphi\mathrm{d}x-\int_{R^N}g(f(v))f'(v)\varphi\mathrm{d}x$$

那么 v 方程

$$-\Delta_N v=h(v),x\in\mathbb{R}^N, \tag{2.8}$$

的解，其中 $h(s)=V(x)|f(s)|^{N-2}f(s)f'(s)+g(f(s))f'(s)$， $s\in\mathbb{R}$。

由此可知 $u=f(v)$ 为方程(1.1)的弱解。

引理 2.5： 假设($\mathcal{F}_1$)和($\mathcal{F}_2$)成立如果 $\{v_n\}\subset E$ 为一 PS 序列，那么 $\{v_n\}$ 在 E 中有界。

证：不失一般性，对所有的 $n\in\mathbb{N}$ 假设 $v_n\neq 0$。令 $\varphi_n(x)=\dfrac{f(v_n(x))}{f'(v_n(x))}$，则由引理 2.4 可得

$$|\varphi_n(x)|\le 2\alpha|v_n(x)|,|\nabla\varphi_n(x)|\le 2|\nabla v_n(x)|,\|\varphi_n(x)\|_E\le 2\alpha\|v_n(x)\|_E,\forall n\in\mathbb{N}$$

由于 $\{v_n\}$ 为一 PS 序列，则 $\exists c>0$ 使得

$$\begin{aligned}c&\ge J(v_n)-\frac{1}{q}J(v_n)v_n\\&\ge\left(\frac{1}{N}-\frac{2\alpha}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^N\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(v)|^N\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\left[g(f(v_n))f(v_n)-qG(f(v_n))\right]\mathrm{d}x\\&\ge\left(\frac{1}{N}-\frac{2\alpha}{q}\right)\|\nabla v_n\|_N^N+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(v)|^N\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.9}$$

由 $q>2\alpha N>N$ 可推出序列 $\{\|\nabla v_n\|_N\}$ 以及 $\left\{\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|f(v_n)|^N\right\}$ 有界，亦如此，其中

$$A_n^N=\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_n|^N+V(x)|f(v_n)|^N\right)\mathrm{d}x\tag{2.10}$$

可得 $\{v_n\}$ 在 $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ 中有界，接下来证明 $\{v_n\}$ 在 $L^N(\mathbb{R}^N)$ 中有界。因为

$$\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^N\mathrm{d}x=\int_{\|v_n\|\le 1}|v_n|^N\mathrm{d}x+\int_{\|v_n\|>1}|v_n|^N\mathrm{d}x\tag{2.11}$$

注意由条件($\mathcal{F}_2$)，可知 $\exists c>0$ 使得 $G(s)\ge Cs^N$， $|s|\ge 1$，因此有

$$\int_{\|v_n\|>1}|v_n|^N\mathrm{d}x\le\frac{1}{C}\int_{\|v_n\|>1}G(f(v_n))\mathrm{d}x\le\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^N}G(f(v_n))\mathrm{d}x$$

应用条件(f_7) $|f(s)|\ge C|s|$，对某些 $C>0,s<1$，有

$$\int_{\|v_n\|\le 1}|v_n|^N\mathrm{d}x\le\frac{1}{C}\int_{\|v_n\|\le 1}|f(v_n)|^N\mathrm{d}x\le\frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\|v_n\|\le 1}|f(v_n)|^N\mathrm{d}x$$

由此可得出 $\{v_n\}$ 在 $L^N(\mathbb{R}^N)$ 中有界，因此在 E 中有界。利用文献[13]类似的方法，可知 $\exists C_0>0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^N+V(x)|f(v_n)|^N\mathrm{d}x\ge C_0\|v_n\|_E^N\tag{2.12}$$

于是 $\{v_n\}$ 在 E 中有界，同样适用于 $\{v_n\}$ 的子序列仍记为 $\{v_n\}$，使得 $\|v_n\|_E,\|v\|_E\le M$ 以及

$$v_n\rightharpoonup v\text{ in }E,v_n\rightharpoonup v\text{ in }L_{loc}^q(\mathbb{R}^N),\forall q\in[N,+\infty),v_n(x)\rightharpoonup v(x)\text{ a.e. in }\mathbb{R}^N\tag{2.13}$$

引理 2.6： 假设(V_1)和(F_1)~(F_3)成立。如果序列 $\{v_n\}$ 满足(2.13)则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^N}g(f(v_n))f'(v_n)v_n\mathrm{d}x=\int_{R^N}g(f(v))f'(v)v\mathrm{d}x\tag{2.14}$$

证：由条件(F_1)~(F_3)对任意小的 $\varepsilon>0$， $\exists S_0>s_0>0$ 使得 $|G(s)|\le\varepsilon|s|^N,|s|\le s_0$ 以及 $|G(s)|\le\varepsilon sg(s),|s|\ge S_0$ 说明

$$|G(s)|\le\varepsilon\left(|s|^N+sg(s)\right)+\chi_{[s_0,S_0]}(|s|)|sg(s)|,\forall s\in\mathbb{R}\tag{2.15}$$

其中 χ_A 记为可测子集 $A \subset R$ 的特征函数，这样对 $n \in \mathbb{N}$ 可以得到

$$\left|g\left(f\left(v_n\right)\right)f'\left(v_n\right)v_n\right| \le \left|g\left(f\left(v_n\right)\right)f\left(v_n\right)\right| \le \varepsilon\left(V\left|f\left(v_n\right)\right|^N + f\left(v_n\right)g\left(f\left(v_n\right)\right)\right) + \chi_{[s_0,S_0]}\left(\left|f\left(v_n\right)\right|\right)\left|f\left(v_n\right)g\left(f\left(v_n\right)\right)\right|,$$

以及

$$\int_{B_r^c}\left|g\left(f\left(v_n\right)\right)f'\left(v_n\right)v_n\right| \le \varepsilon\left|Q\left(v_n\right)\right| + S_0 g\left(S_0\right)\int_{A_n \cap B_r^c}\chi_{[s_0,S_0]}\left(\left|f\left(v_n\right)\right|\right)\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

其中 $A_n = \left\{x \in R^N : s_0 \le \left|f\left(v_n\right)\right| \le S_0\right\}$ 还有

$$Q\left(v_n\right) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(V\left(x\right)\left|f\left(v_n\right)\right|^N + f\left(v_n\right)g\left(f\left(v_n\right)\right)\right)\mathrm{d}x$$

此外，

$$s_0 g\left(s_0\right)\left|A_n\right| \le \int_{\mathbb{R}^N} f\left(v_n\right)g\left(f\left(v_n\right)\right)\mathrm{d}x \le M_1$$

说明 $\sup_{n\in N}\left|A_n\right| \le \dfrac{M_1}{s_0 g\left(s_0\right)} = \mu < \infty, \left|A_n\right| = \mathrm{meas}\left(A_n\right)$。由此可以断定对所有的 $n \in N$，具有一致性。首先我们来证明

$$\lim_{r\to\infty}\left|A_n \cap B_r^c\right| = 0 \tag{2.17}$$

事实上，如果不成立，则 $\exists n_0 \ge 1, \delta > 0, r_j \uparrow \infty$ 使得

$$\left|A_{n_0} \cap B_{r_j}^c\right| \ge \delta, \forall j \in N$$

不失一般性令 $\underline{n_0 = 1}$ 显然有 $\left|A_{n_0} \cap B_{r_j}^c\right| \le \left|A_1\right| \le \mu, \forall j \in N$。

记 $\Omega_j = B_{r_j}^c \setminus \overline{B_{r_{j+1}}^c}$，易见

$$B_{r_j}^c = \bigcup_{l=j}^{\infty}\Omega_l, \forall j \in N, \Omega_l \cap \Omega_k = \varnothing, l \ne k$$

那么会有

$$\left|A_1 \cap B_{r_j}^c\right| = \sum_{l=j}^{\infty}\left|A_1 \cap \Omega_l\right| \ge \delta, \forall j \in N \tag{2.18}$$

以及序列 $\sum_{l=j}^{\infty}\left|A_1 \cap \Omega_l\right| = \infty$，产生矛盾。于是极限(2.17)证毕。

其次，说明极限(2.17)的一致性。实际上由(2.3)可知 $v_n, v \in L^N\left(R^N\right)$ 在 R^N 上 $v_n\left(x\right) \to v\left(x\right)$ 几乎处处成立，因此对于任意小的 $\epsilon > 0, \exists r_0 \ge 1$ 使得对 $r \ge r_0$ 有

$$\int_{B_r^c}\left|v\right|^N \mathrm{d}x \le \epsilon \tag{2.19}$$

对该 $\epsilon > 0$ 选择 $t_1 = r_0, t_j \uparrow \infty$ 使得 $D_j = B_{t_j}^c \setminus \overline{B_{t_{j+1}}^c}, B_{r_0}^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ 和

$$\int_{D_j}\left|v\right|^N \mathrm{d}x \le \frac{\epsilon}{2^j}, \forall j \in N \tag{2.20}$$

由 Fatou 引理，可得对任意 $j \in N$，会有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{D_j \cap A_n}\left|f\left(v_n\right)\right|^N \mathrm{d}x \le \int_{D_j}\limsup_{n\to\infty}\left|f\left(v_n\right)\right|^N \mathrm{d}x \le \int_{D_j}\left|f\left(v\right)\right|^N \mathrm{d}x \le \frac{\epsilon}{2^j} \tag{2.21}$$

于是

$$
\begin{aligned}
s_0^N \limsup_{n\to\infty}\left|A_n\cap B_{r_0}^c\right| &\le \lim_{n\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{B_{r_0}^c\cap A_n}\left|f\left(v_n\right)\right|^N \mathrm{d}x \\
&= \limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{D_j\cap A_n}\left|f\left(v_n\right)\right|^N \mathrm{d}x \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{D_j\cap A_n}\left|f\left(v_n\right)\right|^N \mathrm{d}x \\
&\le \sum_{j=1}^{\infty}\int_{D_j}\left|f\left(v_n\right)\right|^N \mathrm{d}x \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^j}=\epsilon
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

注意对 $r\ge r_0, n\in\mathbb{N}$，可得 $\left(A_n\cap B_r^c\right)\subset\left(A_n\cap B_{r_0}^c\right)$，即得 $\lim_{r\to\infty}\left|A_n\cap B_r^c\right|=0$ 对 $n\in N$ 具有一致性。

此外，由积分的决定连续性可知对 $\forall\epsilon>0$，存在常数 $0<\delta<\epsilon\setminus S_0 g\left(S_0\right)\epsilon>0$ 使得对 $r\ge r_0$ 有 $\mathrm{meas}\left(A_n\cap B_r^c\right)<\delta$ 以及

$$
\int_{A_n\cap B_r^c}\chi_{[s_0,S_0]}\left(\left|f\left(v_n\right)\right|\right)\mathrm{d}x<\frac{\epsilon}{S_0 g\left(S_0\right)} \tag{2.23}
$$

那么由(2.16)和(2.23)可推出

$$
\int_{B_r^c}\left|g\left(f\left(v_n\right)\right)f'\left(v_n\right)v_n\right|\mathrm{d}x\le\int_{B_r^c}\left|g\left(f\left(v_n\right)\right)f\left(v_n\right)\right|\mathrm{d}x\le\epsilon\left(M_2+1\right), r\ge r_0 \tag{2.24}
$$

和

$$
\int_{B_r^c}\left|g\left(f\left(v\right)\right)f'\left(v\right)v\right|\mathrm{d}x\le\int_{B_r^c}\left|g\left(f\left(v\right)\right)f\left(v\right)\right|\mathrm{d}x\le\int_{B_r^c}\left|g\left(f\left(v_n\right)\right)f\left(v_n\right)\right|\mathrm{d}x\le\epsilon\left(M_2+1\right), r\ge r_0 \tag{2.25}
$$

另一方面，由(2.17)对所有的 $r>0$，

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{B_r} g\left(f\left(v_n\right)\right)f'\left(v_n\right)v_n\mathrm{d}x=\int_{B_r} g\left(f\left(v\right)\right)f'\left(v\right)v\mathrm{d}x \tag{2.26}
$$

那么从(2.24)~(2.26)，可推出(2.14)。

引理 2.7： 假设(V_1)和(F_1)~(F_3)成立，令 $\{v_n\}$ 为一 PS 序列，则有

$$
\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V\left(x\right)\left|f\left(v_n\right)\right|^N \mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}V\left(x\right)\left|f\left(v\right)\right|^N \mathrm{d}x \tag{2.27}
$$

和

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V\left(x\right)\left|f\left(v_n\right)\right|^{N-2} f\left(v_n\right)f'\left(v_n\right)v_n\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}V\left(x\right)\left|f\left(v\right)\right|^N f\left(v\right)f'\left(v\right)v\mathrm{d}x \tag{2.28}
$$

证： 对 $r>1$，可选择函数 $\eta_r=\eta_r\left(|x|\right)\in C^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ 使得

$$
\eta_r\left(|x|\right)\equiv1, x\in B_{2r}^c; \eta_r\left(|x|\right)=0, x\in B_r; 0\le\eta_r\le1, \left|\nabla\eta_r\right|\le\frac{2}{r}, \text{in } \mathbb{R}^N \tag{2.29}
$$

由于序列 $\{v_n\}$ 在中 E 有界，则序列 $\{\eta_r\varphi_n\}$，$\varphi_n=\dfrac{f\left(v_n\right)}{f'\left(v_n\right)}$，也在 E 中有界，那么会有 $J\left(v_n\right)\left(\eta_r\varphi_n\right)=o_n\left(1\right)$，即

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla v_n\right|^{N-2}\nabla v_n\nabla\varphi_n\eta_r\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V\left(x\right)\left|f\left(v_n\right)\right|^N\eta_r\mathrm{d}x \\
&=-\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla v_n\right|^{N-2}\nabla v_n\nabla\eta_r\varphi_n\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}g\left(f\left(v_n\right)\right)f\left(v_n\right)\eta_r\mathrm{d}x+o_n\left(1\right)
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

其中 $\nabla\varphi_n=\left(1+\dfrac{\left(2\alpha-1\right)\left(2\alpha^{N-1}\right)\left|f\left(v_n\right)\right|^{(2\alpha-1)N}}{1+2\alpha^{N-1}\left|f\left(v_n\right)\right|^{(2\alpha-1)N}}\right)\nabla v_n$ 以及 $\omega\left(r\right)=\int_{\mathbb{R}^N}g\left(f\left(v_n\right)\right)f\left(v_n\right)\eta_r\mathrm{d}x\to0, n\to\infty$ 那么(2.30)的极限说明

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_r^c}\left(\left|\nabla v_n\right|^N+V(x)\left|f(v_n)\right|^N\right)\eta_r \mathrm{d}x \\
&\le \int_{B_r^c}\left|\nabla v_n\right|^{N-2}\left|v_n\right|\left|\nabla \eta_r\right|\mathrm{d}x+o_n(1)+\omega(r) \\
&\le \frac{4\alpha}{r}\int_{B_r^c}\left|\nabla v_n\right|^{N-2}\left|v_n\right|\mathrm{d}x+o_n(1)+\omega(r) \\
&\le \frac{4\alpha}{r}\left\|\nabla v_n\right\|_{L^N(\Omega_r)}^{N-1}\left\|v_n\right\|_{L^N(\Omega_r)}+o_n(1)+\omega(r) \\
&\le \frac{4\alpha}{r}\left\|v_n\right\|_E^N+o_n(1)+\omega(r) \\
&\le \frac{4\alpha}{r}M^p+o_n(1)+\omega(r), n\to\infty, r\to\infty
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

其中 $\Omega_r=B_r^c\setminus\overline{B_{2r}^c}$，可推出 $\lim_{n\to\infty}\sup\int_{B_{2r}^c}\left(\left|\nabla v_n\right|^N+V(x)\left|f(v_n)\right|^N\right)\mathrm{d}x<\epsilon$。

此外，该极限还可得

$$
\lim_{n\to\infty}\sup\int_{B_{2r}^c}\left(V(x)\left|f(v_n)\right|^N\right)\mathrm{d}x\le\epsilon \tag{2.32}
$$

便有，

$$
\int_{B_{2r}^c}\left(V(x)\left|f(v)\right|^N\right)\mathrm{d}x\le\epsilon \tag{2.33}
$$

由于 $L^N(B_{2r})$ 中，$v_n\to v$，则有

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{B_{2r}}V(x)\left|f(v_n)\right|^N\mathrm{d}x=\int_{B_{2r}}V(x)\left|f(v)\right|^N\mathrm{d}x \tag{2.34}
$$

对 $\forall\epsilon>0$，极限(2.32)~(2.34)产生

$$
\lim_{n\to\infty}\sup\int_{R^N}\left|V(x)\left(\left|f(v_n)\right|^N-\left|f(v)\right|^N\right)\mathrm{d}x\right|\le 3\epsilon . \tag{2.35}
$$

接下来证明(2.28)，由 $f(6)$ 和 $\omega(r)\to 0$ 可得

$$
\int_{\mathbb{R}^N}g\left(f(v_n)\right)f'(v_n)v_n\eta_r\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^N}g\left(f(v_n)\right)f(v_n)\eta_r\mathrm{d}x=\omega(r)\to 0 \tag{2.36}
$$

有由 $J(v_n)(\eta_r v_n)=o_n(1)$ 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\left[\left|\nabla v_n\right|^N+V(x)\left|f(v_n)\right|^{N-2}f(v_n)f'(v_n)\right]\eta_r\mathrm{d}x \\
&=-\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla v_n\right|^{N-2}\nabla v_n\nabla\eta_r v_n\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}g\left(f(v_n)\right)f'(v_n)\eta_r\mathrm{d}x+o_n(1) \\
&\le\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla v_n\right|^{N-1}\left|\nabla v_n\right|\left|\nabla\eta_r\right|\mathrm{d}x+o_n(1)+\omega(r) \\
&\le\frac{4\alpha}{r}M^p+o_n(1)+\omega(r)
\end{aligned}
$$

那么对 $\forall\epsilon>0,\exists r_0\ge 1$ 使得 $r>r_0$，

$$
\lim_{n\to\infty}\sup\int_{B_{2r}^c}\left[\left|\nabla v_n\right|^N\eta_r+V(x)\left|f(v_n)\right|^{N-2}f(v_n)f'(v_n)v_n\right]\mathrm{d}x\le\epsilon \tag{2.37}
$$

于是

$$
\lim_{n\to\infty}\sup\int_{B_{2r}^c}V(x)\left|f(v_n)\right|^{N-2}f(v_n)f'(v_n)v_n\mathrm{d}x\le\epsilon \tag{2.38}
$$

以及

$$\int_{B_{2r}^c} V(x)\left|f(v)\right|^{N-2} f(v_n) f'(v) v\mathrm{d}x \le \epsilon \tag{2.39}$$

由于在 $L^N(B_{2r})$ 中 $v_n \to v$ 以及在 $\mathbb{R}^N$ 中 $v_n(x) \to v(x)$ 几乎处处成立。则有

$$\lim_{n\to\infty}\sup\int_{B_{2r}} V(x)\left|f(v_n)\right|^{N-2} f(v_n) f'(v_n) v_n\mathrm{d}x = \int_{B_{2r}} V(x)\left|f(v)\right|^{N-2} f(v_n) f'(v) v\mathrm{d}x$$

以及 $\lim_{n\to\infty}\sup\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left|f(v_n)\right|^{N-2} f(v_n) f'(v_n) v_n - \left|f(v)\right|^{N-2} f(v) f'(v) v\mathrm{d}x \le 3\epsilon$。

因此极限(2.28)成立。

最后来证明在 E 中 v_n 强收敛于 v。

引理 2.8 [13]存在常数 $C_3 > 0$ 使得对 $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$，

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta\right) \ge C_3\left(|\zeta| + |\eta|\right)^{p-2}|\xi - \eta|^2, \text{ if } 1 < p < 2$$

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta\right) \ge C_3|\xi - \eta|^p, \text{ if } p \ge 2$$

其中 $(.,.)$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中数量积。

因为 v_n, v 在 E 中有界以及 $\langle J'(v_n) - J'(v), v_n - v\rangle \to 0$。

直接计算可得 $\langle J'(v_n) - J'(v), v_n - v\rangle = A_{nm} + B_{nm} + C_{nm}$

其中 $A_{nm} = \int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_n|^{N-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{N-2}\nabla v\right)\nabla(v_n - v)\mathrm{d}x$

$$B_{nm} = \int_{R^N} V(x)\left[\left|f(v_n)\right|^{N-2} f(v_n) f'(v_n) v_n - \left|f(v)\right|^{N-2} f(v) f'(v) v\right](v_n - v)\mathrm{d}x$$

$$C_{nm} = \int_{\mathbb{R}^N}\left[g\left(f(v_n)\right) f'(v_n) d - g\left(f(v)\right) f(v)\right](v_n - v)\mathrm{d}x$$

由以上引理可得 $|B_{nm}| \to 0, |C_{nm}| \to 0$ 对于 A_{nm}

$$A_{nm} \ge \int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla(v_n - v)\right|^N\right)\mathrm{d}x \to 0.$$

由 $\left|f(v_n - v)^N\right| \le |v_n - v|^N$ 以及在 $L^N(\mathbb{R}^N)$ 中 $v_n \to v$，可推出 $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left|f(v_n - v)\right|^N \mathrm{d}x \to 0, n \to \infty$，于是在 E 中 $v_n \to v$。

3. 定理证明

引理 3.1 [14]令 E 无限维实 Banach 空间，$J \in C^1(E, R)$ 为偶的且满足(PS)条件，$J(0) = 0$。如果 $E = U \oplus V$，其中 U 为有限维空间，J 满足

(J_1) $\exists \rho, \alpha > 0$ 使得在 $\partial B_{\rho \cap V}$ 上有 $J(u, v) \ge \alpha$

(J_2) 对任一有限维子空间 $E_0 \subset E$，有 $R = R(E_0)$ 使得在 $E_0 \setminus B_R$ 上有 $J(u, v) \le 0$，其中 $B_R = \left\{z \in E : |z|_E < R\right\}, \partial B_R = \left\{z \in E : |z|_E = R\right\}$

那么，J 产生无界的临界点序列。

定理 1.1 证明：显然泛函 J 在 E 中为偶且满足 $J(0) = 0$ 和$(PS)_c$条件。接下来论证在条件($\mathcal{F}_1$)~($\mathcal{F}_3$)下，有(J_1)和(J_2)成立。

$$J(v) = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^N \mathrm{d}x + \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left|f(v)\right|^N \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G\left(f(v)\right)\mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

首先验证(J_1)，由相应条件可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v|^N + V(x)\left|f(v)\right|^N\right)\mathrm{d}x \ge C_0\|v\|_E^N$$

和

$$G(t) \le \frac{\epsilon}{N}|t|^N + C_\epsilon t g(t)$$

$$\begin{aligned}
&0 \le \int_{\mathbb{R}^N} g(f(v)) f(v) \mathrm{d}x \\
&\le b_1 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^q \left[\exp\left(\alpha_0 |f(v)|^{\frac{2\alpha N}{N-1}} \right) - S_{N-2}(\alpha_0, f(v)) \right] \mathrm{d}x \\
&\le \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{b_1 \alpha_0^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{q-\frac{2\alpha Nk}{N-1}} \mathrm{d}x \le \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{b_2 \alpha_0^k}{k!} (2\alpha)^{\frac{k}{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q_k + q_0} \mathrm{d}x, \\
&\le b_2 \sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{\alpha_0^k}{k!} (2\alpha)^{\frac{k}{N-1}} d_N^{q_k + q_0} (q_k + q_0)^{\left(1-\frac{1}{N}\right)(q_k + q_0)} \|v\|_E^{q_k + q_0} \\
&\le b_2 d_N^{q_0} \|v\|_E^{q_0} \sum_{k=N-1}^{\infty} a_k
\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 d_N 在(2.4)中给定以及

$$b_2 = b_1 (2\alpha)^{\frac{q}{2\alpha N}}, q_o = \frac{q}{2\alpha}, \beta = \frac{N+q_0}{N-1}, q_k = \frac{kN}{N-1}, a_k = \frac{\left((2\alpha)^{\frac{1}{N-1}} \alpha_0 \right)^k}{k!} d_N^{q_k} \|v\|_E^{q_k} (\beta k)^{k+q_0\left(1-\frac{1}{N}\right)}.$$

又由 $\rho > 0$ 充分小可得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = e\alpha_0 \beta (2\alpha)^{\frac{1}{N-1}} \|v\|_E^{\frac{N}{N-1}} d_N^{\frac{N}{N-1}} \le e\alpha_0 \beta (2\alpha)^{\frac{1}{N-1}} \rho^{\frac{N}{N-1}} d_N^{\frac{N}{N-1}} < 1. \tag{3.3}$$

正序列 $\sum_{k=N-1}^{\infty} a_k$ 收敛。于是 $\exists C_1 > 0$ 使得

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^N} g(f(v)) f(v) \mathrm{d}x \le C_1 \|v\|_E^{q_0}.$$

那么可得

$$J(v) \ge \frac{C_0 - \epsilon}{N} \|v\|_E^N - C_1 \|v\|_E^{q_0} \tag{3.4}$$

其中 $q > 2\alpha N$，则得到 $J(v) \ge \tau, \|v\|_E = \rho$。条件 J_1 得证。

其次验证(J_2)。对有限维子空间 $E_0 \subset E$，会 $\exists R_0 > \rho$ 使得在 $E_0 \setminus B_{R_0}$ 上有 $J < 0$。否则会存在序列 $\{v_n\} \subset E_0$ 使得 $\|v\|_E \to 0$ 和 $J(v_n) \ge 0$ 成立。于是对某些 $C_2 > 0$ 有

$$\frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^N + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v)|^N \right) \mathrm{d}x \ge \int_{\mathbb{R}^N} G(f(v)) \mathrm{d}x \ge C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^q \mathrm{d}x \tag{3.5}$$

令 $\omega_n(x) = \dfrac{v_n(x)}{\|v_n(x)\|}$。假设在 E 中 $\omega_n \rightharpoonup \omega, \omega_n(x) \rightharpoonup \omega(x)\ a.e.\ \text{in}\ \mathbb{R}^N$。记 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : \omega(x) \ne 0\}$。假定 $|\Omega| > 0$ 在 Ω 中显然有 $v_n(x) \to \infty$，那么有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} v_E^N &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^N + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |v|^N \right) \mathrm{d}x \\
&\ge \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^N + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v)|^N \right) \mathrm{d}x \\
&\ge C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^q \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

以及

$$\frac{1}{N} \geq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|f\left(v_n\right)\right|^q}{\left|v_n\right|^N} \omega_n^E \mathrm{d}x \to \infty, n \to \infty \tag{3.6}$$

产生矛盾，于是$|\Omega| = 0$以及在$\mathbb{R}^N$中$\omega(x) = 0$几乎处处成立。由范数的等价性，在E_0中，$\exists \theta > 0$使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \geq \theta v_E, \forall v \in E_0, \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q \mathrm{d}x^{\frac{1}{q}} \geq \theta^q \|v_n\|_E^q \tag{3.7}$$

于是得到$\theta^q \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\omega_n|^q \mathrm{d}x = 0$这是不可能的。最后由引理 3.1 可知存在无穷多个解v_n于是$u_n = f(v_n)$为方程(1.1)的无穷多个解。定理 1.1 证毕。

致　谢

作者对同行评阅人的意见和建议表示深深的感谢。

参考文献

[1] Adachi, S. and Watanabe, T. (2012) Uniqueness of the Ground State Solutions of Quasilinear Schrödinger Equations. *Nonlinear Analysis*, **75**, 819-833. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.09.015

[2] Colin, M. and Jeanjean, L. (2004) Solutions for a Quasilinear Schrödinger Equation: A Dual Approach. *Nonlinear Analysis*, **56**, 213-226. https://doi.org/10.1016/j.na.2003.09.008

[3] Popenberg, M., Schmitt, K. and Wang, Z.Q. (2002) On the Existence of Soliton Solutions to Quasilinear Schrödinger Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **14**, 329-344. https://doi.org/10.1007/s005260100105

[4] Liu, J., Wang, Y. and Wang, Z.Q. (2004) Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations via Nehari Method. *Communications in Partial Differential Equations*, **29**, 879-901. https://doi.org/10.1081/PDE-120037335

[5] Do ó, J.M.B. (1997) N-Laplacian Equations in R^N with Critical Growth. *Abstract and Applied Analysis*, **2**, 301-315. https://doi.org/10.1155/S1085337597000419

[6] Liu, J. and Wang, Z.Q. (2002) Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations I. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **131**, 441-448. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-02-06783-7

[7] Liu, J., Wang, Y. and Wang, Z. (2003) Soliton Solutions for Quasilinear Schrödingerr Equations II. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **187**, 473-493. https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00064-5

[8] Chen, C.S. and Zhu, Q. (2014) Existence of Positive Solutions to p-Kirchhoff-Type Problem without Compactness Conditions. *Applied Mathematics Letters*, **28**, 82-87. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.10.005

[9] Trudinger, N. (1967) On Imbeddding into Orlicz Space and Some Applications. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **17**, 473-484. https://doi.org/10.1512/iumj.1968.17.17028

[10] Moser, J. (1971) A Sharp Form of an Inequality by N. Trudinger. *Indiana University Mathematics Journal*, **20**, 1077-1092. https://doi.org/10.1512/iumj.1971.20.20101

[11] Cao, D.M. (1992) Nontrivial Solution of a Semilinear Elliptic Equation with Critical Exponent in R^2. *Communications in Partial Differential Equations*, **17**, 407-435. https://doi.org/10.1080/03605309208820848

[12] Kosevich, A.M., Ivanov, B.A. and Kovalev, A.S. (1990) Magnetic Solitons. *Physics Reports*, **194**, 117-238. https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90130-T

[13] Dinca, G. and Jebelean, P. (2001) Some Existence Results for a Class of Nonlinear Equations Involving a Duality Mapping. *Nonlinear Analysis*, **46**, 347-363. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(00)00120-6

[14] Rabinowitz, P.H. (1986) Minimax Methods in Critical Point Theory with Application to Differential Equations. In: *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, Volume 65, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/cbms/065