Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(3), 444-450
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.93054

Hans 汉斯

Dependent Random Choice and Generalized Turán Numbers of Even Wheels

Yujun Cui, Xiuzhuan Duan, Weihua Yang*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi
Email: 2418589615@ qq.com, 466522833@qq.com, *yangweihua@tyut.edu.cn

Received: Mar. 4th, 2020; accepted: Mar. 20th, 2020; published: Mar. 27th, 2020

Abstract

Let G be a graph on n vertices, and K_3 be a triangle in graph G. We denoted by W_{2l}^{s} a graph with s vertices in the center, a 2l long even circle in the periphery, and 2l edges on the even circle are connected with s vertices in the center; and P_l^s represents a graph in which the center has s vertices, the periphery is an l-long road, and $l$edges of the road are connected with s vertices of the center. In this paper, we mainly proved that the following generalized Turán number by using the technique of dependent random choice:

1) $cn^{3-\frac{3s+6l-6}{2l(s+1)-3}} \le ex\left(n, K_3, W_{2l}^{s}\right) \le Cn^{3+\frac{1}{l}-\frac{1}{s}}$.

2) $cn^{3-\frac{3s+3l-3}{s(l+1)+l-3}} \le ex\left(n, K_3, P_l^{s}\right) \le Cn^{3-\frac{1}{s}}$.

Keywords

Generalized Turán Number, Triangles, Dependent Random Choice

依赖随机选择与偶轮的广义Turán数

崔玉君，段秀转，杨卫华*

太原理工大学数学学院，山西 晋中
Email: 2418589615@ qq.com, 466522833@qq.com, *yangweihua@tyut.edu.cn

收稿日期：2020年3月4日；录用日期：2020年3月20日；发布日期：2020年3月27日

摘 要

令G表示n个顶点的图，K_3表示图G中的三角形。W_{2l}^{s}表示中心有s个顶点，外围是一个2l长的偶圈，且偶

*通讯作者。

文章引用: 崔玉君, 段秀转, 杨卫华. 依赖随机选择与偶轮的广义 Turán 数[J]. 应用数学进展, 2020, 9(3): 444-450.
DOI: 10.12677/aam.2020.93054

圈上的2l条边都与中心的s个点相连的一个图；P_l^s表示中心有s个顶点，外围是一条l长的路，且路上的l条边都与中心的s个点相连的一个图。在本文中，我们主要利用依赖随机选择技术证明了下述广义Turán数：

1) $cn^{3-\frac{3s+6l-6}{2l(s+1)-3}} \le ex\left(n,K_3,W_{2l}^s\right) \le Cn^{3+\frac{1}{l}-\frac{1}{s}}$。

2) $cn^{3-\frac{3s+3l-3}{s(l+1)+l-3}} \le ex\left(n,K_3,P_l^s\right) \le Cn^{3-\frac{1}{s}}$。

关键词

广义Turán数，三角形，依赖随机选择

1. 引言

令$\mathcal{F}$表示一些图组成的集族，如果对于任意的$F\in\mathcal{F}$，图G都不包含F作为子图，那么称图G是不包含族$\mathcal{F}$的。Turán 数$ex(n,\mathcal{F})$定义为在n个顶点且不包含$\mathcal{F}$的图G的最大边数。如果集族$\mathcal{F}$仅包含一个简单图F，我们可以用$ex(n,F)$代替$ex(n,\{F\})$。令P_l表示l长的路，在1959年，Erdös 和 Gallai [1]计算了图G中有关P_l的Turán 数。

定理 1.1：(Erdős, Gallai [1])令G是一个n个顶点的图，P_l表示l长的路，那么$ex(n,P_l)\le\frac{1}{2}(l-1)n$。

随后在1965年，Erdős [2]又计算了有关偶圈的Turán 数，Bondy 和 Simonovits [3]对此进行了证明。

定理 1.2：(Erdös [2])令G是一个n个顶点的图，C_{2l}表示$2l$长的偶圈，且$l\ge2$，那么存在正整数C，使得$ex(n,C_{2l})\le Cn^{1+\frac{1}{l}}$。

现在，关于Turán 数已经有大量的研究，详见综述文献[4] [5]。

令T表示一个简单图，广义Turán 数$ex(n,T,\mathcal{F})$定义为n个顶点的不包含$\mathcal{F}$的图G中T复制的最大个数。如果$T=K_2$，那么广义Turán 数$ex(n,T,\mathcal{F})$就是经典的Turán 数$ex(n,\mathcal{F})$。同样的，对于一个简单图F，我们通常用$ex(n,T,F)$代替$ex(n,T,\{F\})$。最近，广义Turán 数问题的研究也受到了广泛的关注，详见文献[6] [7] [8] [9]。

K_t表示t个顶点的完全图。在1962年，Erdős [10]首先计算了完全图的广义Turán 数：

$$ex(n,K_t,K_r)=\sum_{0\le i_1\le\cdots\le i_t\le k-2}\prod_{r=1}^{t}\frac{n+i_r}{k-1}.$$

与Erdös-Stone 定理相类似，Alon-Shikhelman [6]证明了：对任意的图H，如果图H的色数$\chi(H)=k$，并且当$k>t$时，那么$ex(n,K_t,H)=(1+o(1))\binom{k-1}{t}\left(\frac{n}{k-1}\right)^t$；当$k\le t$时，那么$ex(n,K_t,H)=o(n^t)$。Bollobás 和 Győri [7]证明了在n个顶点的图G中不包含C_5时，K_3的个数为：

$(1+o(1))\frac{1}{3\sqrt{3}}n^{\frac{2}{3}}\le ex(n,K_3,C_5)\le(1+o(1))\frac{5}{4}n^{\frac{2}{3}}$。Győri 和 Li [11]证明了在$n$个顶点的图$G$中不包含$C_{2l+1}$时，

K_3 的个数为：$\binom{k}{2} ex_{bip}\left(\frac{2n}{k+1}, C_4, C_6, \cdots, C_{2k}\right) \le ex(n, K_3, C_{2l+1}) \le \frac{(2k-1)(16k-2)}{3} ex(n, C_{2k})$。Alon-Shikhelman [6]又对上述两个结果的上界进行了改进，得到：1) $ex(n, K_3, C_5) \le (1+o(1))\frac{\sqrt{3}}{2} n^{\frac{2}{3}}$；

2) $ex(n, K_3, C_{2l+1}) \le \frac{16(k-1)}{3} ex\left(\frac{n}{2}, C_{2k}\right)$。

依赖随机选择是图论中一种简单而且有用的方法。早期，这种技术是被 Rödl，Gowers，Kostochka 以及 Sudakovd 等人[12] [13] [14]证明而且应用推广的。这个基本方法，也是一个著名的概率办法，详见文献[15]。现在，依赖随机选择技术已经被应用到更多方面，比如：极值图论、拉姆齐理论、可加组合数学、组合几何等。

引理 1.3： (依赖随机选择引理)令 a，m，r，n 都是正整数，d 是一个正实数。G 表示 n 个顶点的图，其平均密度为 d。如果存在正实数 t，使得

$$\frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^t \ge a,$$

那么图 G 中存在一个大小至少是 a 的子集 U，使得 U 中任意 r 个顶点在图 G 中至少有 m 个公共邻点。

并且利用依赖随机选择技术，可以计算出有关二部图 H 的 Turán 数。

定理 1.4： (Alon *et al.* [16])令 s 是一个正整数，$H = (A, B)$ 是一个二部图，且 B 中顶点的度 $d_B \le s$。那么存在一个常数 $c = c(H)$，使得

$$ex(n, H) \le cn^{2-\frac{1}{s}}.$$

在 n 个顶点的图 G 中，令 W_{2l}^s 表示中心有 s 个顶点，外围是一个 $2l$ 长的偶圈，且偶圈上的 $2l$ 条边都与中心的 s 个顶点相连接的一个图；P_l^s 表示中心有 s 个顶点，外围是一条 l 长的路，且路上的 l 条边都与中心的 s 个顶点相连接的一个图。本文中，我们主要利用依赖随机选择技术得到下述两个结果：

定理 1.5： 假设 $l \ge 2$，$s \ge 1$，且 C 和 c 是两个正数。令 G 是 n 个顶点的图，且边数为 e，那么

$$cn^{3-\frac{3s+6l-6}{2l(s+1)-3}} \le ex(n, K_3, W_{2l}^s) \le Cn^{3+\frac{1}{l}-\frac{1}{s}}.$$

定理 1.6： 假设 $l \ge 2$，$s \ge 1$。令 G 是 n 个顶点的图，且边数为 e，那么存在正数 C，使得

$$cn^{3-\frac{3s+3l-3}{s(l+1)+l-3}} \le ex(n, K_3, P_l^s) \le Cn^{3-\frac{1}{s}}.$$

本文主要内容安排如下：第二节主要利用依赖随机选择技术证明一个相关引理；第三节证明主要定理。

2. 引理的证明

我们先利用依赖随机选择技术证明下述引理。

引理 2.1： 令 a，m，r，n 都是正整数。G 是一个 n 个顶点的图，且图 G 中的边数为 e，将图 G 中三角形的个数记为 k，如果存在正整数 t，使得

$$e^{-t}\left(3^t n^{1-t} k^t - \binom{n}{r} m^t\right) \ge a,$$

那么图 G 中存在一个大小至少是 a 的子集 U，使得集合 U 中任意 r 个顶点在图 G 中至少含有 m 条公共邻边。

证明： 令 $G=(V,E)$ 是一个 n 个顶点，边数为 e 的简单图，且图 G 中有 k 个三角形。我们将图 G 的顶点集记为：$V_G=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，边集记为：$E_G=\{e_1,e_2,\cdots,e_e\}$。首先，我们将从图 G 的边集中依均匀分布的可重复的选择 t 条边组成集合 E'，记为 $E'=\{e_1',e_2',\cdots,e_t'\}$。令 X 表示这 t 条边的所有公共邻点的集合，个数记为 $|X|$。

我们做如下标记：

$$I_{v_i\in X}=\begin{cases}1, & v_i\in X\\ 0, & v_i\notin X\end{cases},$$

那么，$|X|$ 的期望值为：

$$E(|X|)=E\left(\sum_{v_i\in V_G}1_{v_i\in X}\right)=\sum_{v_i\in V_G}E\left(1_{v_i\in X}\right)=\sum_{v_i\in V_G}P(v_i\in X)$$

又因为

$$P(v_i\in X)=\left(\frac{k(i)}{e}\right)^t$$

其中，$k(i)$ 表示包含点 v_i 的所有三角形的个数。

所以，

$$E(|X|)=\sum_{v_i\in V_G}\left(\frac{k(i)}{e}\right)^t=e^{-t}\sum_{v_i\in V_G}(k(i))^t=ne^{-t}\frac{1}{n}\sum_{v_i\in V_G}(k(i))^t\ge ne^{-t}\left(\frac{\sum_{v_i\in V_G}(k(i))}{n}\right)^t=ne^{-t}\left(\frac{3k}{n}\right)^t=3^tn^{1-t}e^{-t}k^t.$$

令 R 表示集合 X 中由 r 个顶点构成的 r 元-子集。如果 R 在图 G 中的公共邻边小于 m 条，就称 R 是“坏”的 r 元-子集。令 Y 表示集合 X 中所有“坏”的 r 元-子集，个数记为 $|Y|$。令 Z 表示图 G 中的所有“坏”的 r 元-子集。

同样地，我们也做如下标记：

$$I_{R\subseteq Y}=\begin{cases}1, & R\subseteq Y\\ 0, & R\subsetneq Y\end{cases},$$

那么，可以得到 $|Y|$ 的期望值为：

$$E(|Y|)=E\left(\sum_{R\subseteq Z}1_{R\subseteq Y}\right)=\sum_{R\subseteq Z}E\left(1_{R\subseteq Y}\right)=\sum_{R\subseteq Z}P(R\subseteq Y)$$

又因为 R 是 Y 中的 r 元-子集，且 R 在图 G 中的公共邻边小于 m 条，那么

$$P(R\subseteq Y)\le\left(\frac{m}{e}\right)^t.$$

所以，

$$E(|Y|)\le\binom{n}{r}\left(\frac{m}{e}\right)^t.$$

我们利用期望的线性，就可以得到 $|X|-|Y|$ 的期望值为：

$$E\left(|X|-|Y|\right)=E\left(|X|\right)-E\left(|Y|\right)\geq 3^t n^{1-t}e^{-t}k^t-\binom{n}{r}\left(\frac{m}{e}\right)^t=e^{-t}\left(3^t n^{1-t}k^t-\binom{n}{r}m^t\right).$$

那么根据引理的条件得到：$E\left(|X|-|Y|\right)\geq a$。

所以在图 G 中必定存在一种边集 $E'=\{e_1',e_2',\cdots,e_t'\}$ 的选择，使得 $|X|-|Y|\geq a$ 成立。那么令 U 是从 X 中的每个“坏”的 r 元-子集中删除一个顶点得到的集合，那么 $|U|\geq a$，并且 U 中任意 r 个点在图 G 中至少有m条公共邻边。

3. 主要定理的证明

引理 3.1：假设 $l\geq 2$，$s\geq 1$。令 G 是 n 个顶点的图，且边数为 e，那么存在足够大的正数 C，使得

$$ex\left(n,K_3,W_{2l}^s\right)\leq Cn^{3+\frac{1}{l}-\frac{1}{s}}.$$

证明：假设图 G 中三角形的个数 $k>Cn^{3+\frac{1}{l}-\frac{1}{s}}$，那么根据**引理 2.1**，令 $a=s$，$t=s$，$r=s$，并且存在足够大的正整数 $c_1\left(c_1<C\right)$，使得 $m=c_1n^{1+\frac{1}{l}}$。又因为 W_{2l}^s 的色数为 3，根据 Erdős-Stone 定理，所以图 G 的边数 $e\geq\frac{n^2}{4}-o\left(n^2\right)$。通过计算，我们可以得到：

$$e^{-s}\left(3^s n^{1-s}k^s-\binom{n}{s}c_1^{\,s}n^{s+\frac{s}{l}}\right)>s. \tag{1}$$

(1)式的推导过程详见附录。所以在图 G 中存在一个大小至少是 s 的子集 U，使得 U 中任意 s 个点在图 G 中至少含有 $c_1n^{1+\frac{1}{l}}$ 条公共邻边。又根据**定理 1.2**，那么在 U 的一个 s 集的公共邻边中一定存在一个 $2l$ 长的偶圈 C_{2l}，并且这 $2l$ 条边都与这 s 个顶点相连。所以在图 G 中就可以找到一个 W_{2l}^s 的复制，与图 G 中不包含 W_{2l}^s 矛盾。

引理 3.2：假设 $l\geq 2$，$s\geq 1$。令 G 是 n 个顶点的图，那么存在正数 c，使得

$$ex\left(n,K_3,W_{2l}^s\right)\geq cn^{3-\frac{3s+6l-6}{2l(s+1)-3}}.$$

证明：从图 G 中按概率 p 随机地选择一条边，其中 $p=\frac{1}{2}n^{-\frac{s+2l-2}{2l(s+1)-3}}$。用 X 表示图 G 中的所有三角形构成的集合，个数记为 $|X|$。那么 $|X|$ 的期望值为：

$$E\left(|X|\right)=\binom{n}{3}p^3\geq\frac{1}{13}n^3p^3.$$

令 Y 表示图 G 中所有 W_{2l}^s 构成的集合，个数记为 $|Y|$，同样的，$|Y|$ 的期望值为：

$$E\left(|Y|\right)=\binom{n}{2l+s}p^{2l(s+1)}\leq n^{2l+s}p^{2l(s+1)}.$$

接下来，从图 G 中的一个 W_{2l}^s 中删除一条边，至多删除 $n-2$ 个三角形，那么将图 G 中所有的 W_{2l}^s 都删除一条边，至多就删除 $(n-2)E\left(|Y|\right)$ 个三角形，所以，

$$E\left(|X|\right)-(n-2)E\left(|Y|\right)\geq E\left(|X|\right)-nE\left(|Y|\right)\geq\frac{1}{13}n^3p^3-n^{2l+s+1}p^{2l(s+1)}\geq\frac{1}{26}n^3p^3=\frac{1}{208}n^{3-\frac{3s+6l-6}{2l(s+1)-3}}. \tag{2}$$

(2)式中不等式成立是因为 $n^{2l+s+1}p^{2l(s+1)}\leq\frac{1}{26}n^3p^3$，即：

$$n^{2l+s-2}p^{2l(s+1)-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2l(s+1)-3}\leq\frac{1}{26}.$$

所以存在一个 n 个顶点的图 G，使得图 G 中没有 W_{2l}^s 的复制，但三角形的个数为 $\frac{1}{208}n^{3-\frac{3s+6l-6}{2l(s+1)-3}}$。

我们利用**引理 3.1** 和**引理 3.2** 就完成了**定理 1.5** 的证明。

引理 3.3： 假设 $l\geq 2$， $s\geq 1$。令 G 是 n 个顶点的图，且边数为 e，那么存在足够大的正数 C，使得

$$ex\left(n,K_3,P_l^s\right)\leq Cn^{3-\frac{1}{s}}.$$

证明： 与**定理 3.1** 的证明类似，假设图 G 中三角形的个数 $k>Cn^{3-\frac{1}{s}}$，根据**引理 2.1**，令 $a=s$，$t=s$，$r=s$，$m=\frac{l-1}{2}n$。同样的，因为 P_l^s 的色数为 3，所以图 G 的边数 $e\geq\frac{n^2}{4}-o\left(n^2\right)$。通过验证，可以得到：

$$e^{-s}\left(3^s n^{1-s}k^s-\binom{n}{s}\left(\frac{l-1}{2}\right)^s n^s\right)>s. \tag{3}$$

(3)式的推导过程详见附录。所以在图 G 中可以找见一个大小至少是 s 的子集 U，使得 U 中任意 s 个点在图 G 中至少含有 $\left(\frac{l-1}{2}\right)n$ 条公共邻边。又根据**定理 1.1**，那么在 U 的一个 s 集的公共邻边中一定存在着一条 l 长的路 P_l，使得 P_l 上的边都与这 s 个点相连。所以在图 G 中一定可以找到一个 P_l^s 的复制，与图 G 中不包含 P_l^s 矛盾。

引理 3.4： 假设 $l\geq 2$， $s\geq 1$。令 G 是 n 个顶点的图，那么存在正数 c，使得

$$ex\left(n,K_3,P_l^s\right)\geq cn^{3-\frac{3s+3l-3}{s(l+1)+l-3}}.$$

证明： 从图 G 中按概率 p 随机地选择一条边，其中 $p=\frac{1}{6}n^{-\frac{s+l-1}{s(l+1)+l-3}}$，用 X 表示图 G 中的所有三角形构成的集合，个数记为 $|X|$。那么 $|X|$ 的期望值为：

$$E\left(|X|\right)=\binom{n}{3}p^3\geq\frac{1}{16}n^3p^3.$$

令 Y 表示图 G 中所有 P_l^s 构成的集合，个数记为 $|Y|$，同理，$|Y|$ 的期望值为：

$$E\left(|Y|\right)=\binom{n}{l+s+1}p^{l+s(l+1)}\leq n^{l+s+1}p^{l+s(l+1)}.$$

同样地，从图 G 中的一个 P_l^s 中删除一条边，至多删除 $n-2$ 个三角形，那么将图 G 中所有的 P_l^s 都删除一条边，至多删除 $(n-2)E\left(|Y|\right)$ 个三角形，所以，

$$E\left(|X|\right)-(n-2)E\left(|Y|\right)\geq E\left(|X|\right)-nE\left(|Y|\right)\geq\frac{1}{16}n^3p^3-n^{l+s+2}p^{l+s(l+1)}\geq\frac{1}{32}n^3p^3=\frac{1}{32\times 6^3}n^{3-\frac{3s+3l-3}{s(l+1)+l-3}}. \tag{4}$$

(4)式中不等式成立是因为 $n^{l+s+2}p^{l+s(l+1)}\leq\frac{1}{32}n^3p^3$，即：

$$n^{l+s-1}p^{l+s(l+1)-3}=\left(\frac{1}{6}\right)^{l+s(l+1)-3}\leq\frac{1}{32}.$$

所以可以找到一个 n 个顶点的图 G，使得图 G 中没有 P_l^s 的复制，但三角形的个数为 $\frac{1}{32\times 6^3}n^{3-\frac{3s+3l-3}{s(l+1)+l-3}}$。

同样的，利用**引理 3.3** 和**引理 3.4** 完成定理 1.6 的证明。

基金项目

本文得到了中国自然科学基金(11671296)和山西省优青青年学术带头人项目支持。

参考文献

[1] Erdős, P. and Gallai, P, (1959) On Maximal Paths and Circuits of Graphs. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **10**, 337-356. https://doi.org/10.1007/BF02024498

[2] Erdős, P. (1965) Extremal Problems in Graph Theory. In: Fiedler, M., Ed., *Theory of Graphs and Its Applications*, Academic Press, New York, 29-36. https://doi.org/10.1007/BF02760037

[3] Bondy, A. and Simonovits, M. (1974) Cycles of Even Length in Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **16**, 87-105. https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90052-5

[4] Keevash, P. (2011) Hypergraph Turán Problems. *Surveys in Combinatorics*, **392**, 83-140. https://doi.org/10.1017/CBO9781139004114.004

[5] Sidorenko, A. (1995) What We Know and What We Do Not Know about Turán Numbers. *Graphs and Combinatorics*, **11**, 179-199. https://doi.org/10.1007/BF01929486

[6] Alon, N. and Shikhelman, C. (2016) Many T-Copies in H-Free Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **121**, 146-172. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2016.03.004

[7] Bollobas, B. and Győri, E. (2008) Pentagons vs. Triangles. *Discrete Mathematics*, **308**, 4332-4336. https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.08.016

[8] Furedi, Z., Kostochka, A. and Luo, R. (2018) Extensions of a Theorem of Erdős on Nonhamiltonian Graphs. *Journal of Graph Theory*, **89**, 176-193. https://doi.org/10.1002/jgt.22246

[9] Luo, R. (2017) The Maximum Number of Cliques in Graphs without Long Cycles. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **128**, 219-226. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2017.08.005

[10] Erdős, P. (1962) On the Number of Complete Subgraphs Contained in Certain Graphs. *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, **7**, 459-474.

[11] Győri, E. and Li, H. (2012) The Maximum Number of Triangles in C_{2k+1}-Free Graph. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **102**, 1061-1066. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2012.04.001

[12] Kostochka, A. and Rodl, V. (2001) On Graphs with Small Ramsey Numbers. *Journal of Graph Theory*, **37**, 198-204. https://doi.org/10.1002/jgt.1014

[13] Gowers, T. (1998) A New Proof of Szemeredi's Theorem for Arithmetic Progressions of Length Four. *Geometric and Functional Analysis*, **8**, 529-551. https://doi.org/10.1007/s000390050065

[14] Sudakov, B. (2003) A Few Remarks on the Ramsey-Turan-Type Problems. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **88**, 99-106. https://doi.org/10.1016/S0095-8956(02)00038-2

[15] Alon, N. and Spencer, J. (2008) The Probabilistic Method. 3rd Edition, Wiley, New York. https://doi.org/10.1002/9780470277331

[16] Alon, N., Krivelevich, M. and Sudakov, B, (2003) Turan Numbers of Bipartite Graphs and Related Ramsey-Type Questions. *Combinatorics*, *Probability and Computing*, **12**, 477-494. https://doi.org/10.1017/S0963548303005741