

# Stability of Stochastic Two Connected Neoclassical Growth Models

Yang Chen, Jianguo Tan

Tianjin Polytechnic University, Tianjin  
Email: 1224770502@qq.com

Received: Apr. 3<sup>rd</sup>, 2020; accepted: Apr. 14<sup>th</sup>, 2020; published: Apr. 21<sup>st</sup>, 2020

---

## Abstract

In this paper, our aim is to investigate the stability of the zero equilibrium point of stochastic two connected neoclassical growth models affected by white noise. By the aid of Lyapunov functional and Itô's formula, we obtain a new condition on the exponentially mean square stable of this model. Finally, we give two examples to explain our result.

## Keywords

Neoclassical Growth Model, Zero Equilibrium Point, Itô's Formula, Exponentially Mean Square Stable

---

# 两个随机相关的新古典增长模型的稳定性

陈 杨, 谭建国

天津工业大学, 天津  
Email: 1224770502@qq.com

收稿日期: 2020年4月3日; 录用日期: 2020年4月14日; 发布日期: 2020年4月21日

---

## 摘 要

本文的目的是研究两个受白噪声影响的随机新古典增长模型的零平衡点稳定性。通过李雅普诺夫函数和Itô's公式, 得到了该模型的指数均方稳定性的新条件。最后, 我们给出了两个例子来解释得到的结果。

## 关键词

新古典增长模型, 零平衡点, Itô's公式, 指数均方稳定

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 绪论

众所周知, 时滞微分新古典增长模型由于在数学经济学中的重要应用而受到了广泛的关注。许多研究者对研究这种模型有极大兴趣, 有一些文件我们可以参考[1] [2] [3] [4]。一般来说, 噪声对系统有重要的影响, 它可能使一个系统稳定也能够使一个系统不稳定。因此, 受白噪声影响的系统是值得考虑的。据我们所知, 已经有一些关于这一研究课题的文章。例如, [5]研究了随机时滞微分方程的指数稳定性的鲁棒性。[6]利用线性矩阵不等式(LMI'S)技术研究了具有时滞和非线性不确定性的随机系统的时滞相关鲁棒稳定性。[7]利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方程和 LMI 混合延迟的微分方程, 讨论了一类脉冲非线性随机方程的指数稳定性。[8]研究了随机非线性延迟动力系统的稳定性。此外, Shaikhet 研究了一些关于受噪声影响的系统稳定性。例如, [9]考虑了一个受白噪声影响的具有指数和二次非线性的非线性微分方程。[10]讨论了关于随机扰动时滞微分新古典增长模型的平衡点在受到白噪声类型的随机扰动影响下的稳定性分析。[11]通过利用 LMI 矩阵的方法研究两个相关的新古典增长模型在白噪声影响下的稳定性分析。基于[11], 本文仍然考虑受到白噪声随机扰动下的两个连接的新古典生长模型零平衡点的稳定性。我们虽方法比较古老, 但是却得到一个不同于 Shaikhet 的零解稳定判别式。其实, 我们没有用线性矩阵不等式去计算的原因主要也是因为考虑到在此情况下, 用不等式的性质就可以解决模型中的交叉项, 但是此方法比较古老, 不一定适用于所有的新型动力系统模型, 所以在本文定理证明那里我们可以看到, 我们的主要工作就是找到此模型下满足判别条件的参数值。

首先, 我们给出了一个两个相关的时滞差分新古典增长模型组成的系统, 模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_1 x_1^{\gamma_1}(t-h_1) e^{-\delta_1 x_1(t-h_1)} + b_1 x_2(t) - c_1 x_1(t) + \sigma_1 (x_1(t) - x_1^*) \dot{w}_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_2 x_2^{\gamma_2}(t-h_2) e^{-\delta_2 x_2(t-h_2)} + b_2 x_1(t) - c_2 x_2(t) + \sigma_2 (x_2(t) - x_2^*) \dot{w}_2(t), \\ x_i(s) &= \phi_i(s), s \in [-h_i, 0], i = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

这里  $a_i, b_i, c_i, \delta_i$  是正的参数,  $\gamma_i \geq 1, h_i \geq 0, i = 1, 2$ 。  $\sigma_1, \sigma_2$  是常数,  $w_1(t), w_2(t)$  是相互独立的标准 Wiener 过程,  $(x_1^*, x_2^*)$  是系统(1.1)的平衡点。

本文由以下几部分组成。在第二节中, 我们做了一些准备工作为本文的使用。在第三节中, 我们给出了两个随机新古典增长模型的零平衡点是指数均方稳定的条件。在第四节中, 我们用两个例子来验证得到的结果。

## 2. 准备工作

使用新的变量  $y_i(t) = x_i(t) - x_i^*$ , 我们中心化系统(1.1)并且得到

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -c_1 y_1(t) + a_1 e^{-\delta_1 x_1^*} \left[ \left( y_1(t-h_1) + x_1^* \right)^{\gamma_1} e^{-\delta_1 y_1(t-h_1)} - \left( x_1^* \right)^{\gamma_1} \right] + b_1 y_2(t) + \sigma_1 y_1(t) \dot{w}_1(t), \\ \dot{y}_2(t) &= -c_2 y_2(t) + a_2 e^{-\delta_2 x_2^*} \left[ \left( y_2(t-h_2) + x_2^* \right)^{\gamma_2} e^{-\delta_2 y_2(t-h_2)} - \left( x_2^* \right)^{\gamma_2} \right] + b_2 y_1(t) + \sigma_2 y_2(t) \dot{w}_2(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

接下来, 令  $\mu_i = \delta_i x_i^* - \gamma_i, i=1,2$ , 我们得到了非线性系统(2.1)的线性部分如下[12]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -c_1 z_1(t) + b_1 z_2(t) (b_1 x_2^* / x_1^* - c_1) \mu_1 z_1(t-h_1) + \sigma_1 z_1(t) \dot{w}_1(t), \\ \dot{z}_2(t) &= -c_2 z_2(t) + b_2 z_1(t) (b_2 x_1^* / x_2^* - c_2) \mu_2 z_2(t-h_2) + \sigma_2 z_2(t) \dot{w}_2(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

**引理 2.1** [10] 函数  $f(x) = x^{\gamma_i-1} e^{-\delta_i x}, x \geq 0, \gamma_i \geq 1, \delta_i > 0$ , 满足条件  $\sup_{x \geq 0} f(x) = K_i$ , 其中如果  $\gamma_i > 1$ ,  $K_i = \left( \frac{\gamma_i - 1}{e \delta_i} \right)^{\gamma_i-1}$ , 并且  $\gamma_i = 1, K_i = 1$ .

设  $L$  为系统(2.1)的算子[12],  $y(t)$  是(2.1)在时间  $t$  的解,  $y_i$  是(2.1)直到时间矩  $t$  的解的轨迹。  $h = h_1 \vee h_2$ ,  $E$  是期望。

**定义 2.1** 系统(2.1)的初值为  $y(s) = \phi(s), s \in [-h, 0]$ , 其零解是指指数均方稳定的如果存在一对常数  $\lambda$  和  $C$  使得

$$E|y(t, \phi)|^2 \leq CE|\phi|^2 e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

**定理 2.1** [13] 设存在一个函数  $V(t, \phi)$  且  $\lambda > 0$  使得对于系统(2.1)的解  $y(t)$  满足:

$$EV(t, y_t) \geq q_1 e^{\lambda t} E|y(t)|^2,$$

$$EV(0, \phi) \leq q_2 \|\phi\|^2,$$

$$ELV(t, y_t) \leq 0, t \geq 0, q_1, q_2 > 0.$$

则系统(2.1)的零解是指指数均方稳定的, 其中,  $\|\phi\|^2 = \sup_{s \leq 0} E|\phi(s)|^2$ 。

### 3. 两个随机相关的新古典增长模型的稳定性

以下是系统(2.1)的零平衡点模型。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -c_1 y_1(t) + b_1 y_2(t) + a_1 y_1^{\gamma_1}(t-h_1) e^{-\delta_1 y_1(t-h_1)} + \sigma_1 y_1(t) \dot{w}_1(t), \\ \dot{y}_2(t) &= -c_2 y_2(t) + b_2 y_1(t) + a_2 y_2^{\gamma_2}(t-h_2) e^{-\delta_2 y_2(t-h_2)} + \sigma_2 y_2(t) \dot{w}_2(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

**假设 3.1** 对于正数  $d_1, d_2$  和  $\lambda \geq 0$ , 下面的不等式成立:

$$d_1 (\lambda - 2c_1 + \sigma_1^2 + a_1 K_1 + a_1 K_1 e^{\lambda h_1}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 < 0,$$

$$d_2 (\lambda - 2c_2 + \sigma_2^2 + a_2 K_2 + a_2 K_2 e^{\lambda h_2}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 < 0.$$

**定理 3.1** 如果系统(2.2)满足假设 3.1, 则系统(2.2)的零平衡点是指指数均方稳定的。

证明: 首先构造李雅普诺夫泛函  $V_1(t, y(t)) = e^{\lambda t} \sum_{i=1}^2 d_i y_i^2(t)$ , 然后我们有

$$\begin{aligned}
LV_1(t, y(t)) &= e^{\lambda t} \left[ \lambda \sum_{i=1}^2 d_i y_i^2(t) + 2d_1 y_1(t) (a_1 y_1^{\gamma_1}(t-h_1) e^{-\delta_1 y_1(t-h_1)} - c_1 y_1(t)) + d_1 \sigma_1^2 y_1^2(t) \right. \\
&\quad \left. + b_1 y_2(t) + 2d_2 y_2(t) (b_2 y_2(t) + a_2 y_2^{\gamma_2}(t-h_2) e^{-\delta_2 y_2(t-h_2)} - c_2 y_2(t)) + d_2 \sigma_2^2 y_2^2(t) \right] \\
&= e^{\lambda t} \left[ \lambda \sum_{i=1}^2 d_i y_i^2(t) - 2 \sum_{i=1}^2 d_i c_i y_i^2(t) + 2(d_1 b_1 + d_2 b_2) y_1(t) y_2(t) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^2 d_i \sigma_i^2 y_i^2(t) + 2 \sum_{i=1}^2 d_i a_i y_i(t) y_i^{\gamma_i}(t-h_i) e^{-\delta_i y_i(t-h_i)} \right] \\
&\leq e^{\lambda t} \left[ \sum_{i=1}^2 d_i (\lambda - 2c_i + \sigma_i^2 + a_i K_i) y_i^2(t) + (d_1 b_1 + d_2 b_2) y_1^2(t) \right. \\
&\quad \left. + (d_1 b_1 + d_2 b_2) y_2^2(t) + \sum_{i=1}^2 d_i a_i K_i y_i^2(t-h_i) \right]
\end{aligned}$$

令  $V_2(t, y_t) = \sum_{i=1}^2 d_i a_i K_i \int_{t-h_i}^t e^{\lambda(s+h_i)} y_i^2(s) ds$ , 因此, 我们获得

$$LV_2(t, y_t) = e^{\lambda t} \sum_{i=1}^2 d_i a_i K_i (e^{\lambda h_i} y_i^2(t) - y_i^2(t-h_i))$$

设  $V(t, y_t) = V_1(t, y(t)) + V_2(t, y_t)$ , 然后有

$$\begin{aligned}
LV(t, y_t) &\leq e^{\lambda t} \left[ \sum_{i=1}^2 d_i (\lambda - 2c_i + \sigma_i^2 + a_i K_i + a_i K_i e^{\lambda h_i}) y_i^2(t) + (d_1 b_1 + d_2 b_2) y_1^2(t) \right. \\
&\quad \left. + (d_1 b_1 + d_2 b_2) y_2^2(t) + \sum_{i=1}^2 d_i a_i K_i y_i^2(t-h_i) \right] \\
&= e^{\lambda t} \left[ d_1 (\lambda - 2c_1 + \sigma_1^2 + a_1 K_1 + a_1 K_1 e^{\lambda h_1}) y_1^2(t) + (d_1 b_1 + d_2 b_2) y_1^2(t) \right. \\
&\quad \left. + d_2 (\lambda - 2c_2 + \sigma_2^2 + a_2 K_2 + a_2 K_2 e^{\lambda h_2}) y_2^2(t) + (d_1 b_1 + d_2 b_2) y_2^2(t) \right] \\
&= e^{\lambda t} \left[ (d_1 (\lambda - 2c_1 + \sigma_1^2 + a_1 K_1 + a_1 K_1 e^{\lambda h_1}) + d_1 b_1 + d_2 b_2) y_1^2(t) \right. \\
&\quad \left. + (d_2 (\lambda - 2c_2 + \sigma_2^2 + a_2 K_2 + a_2 K_2 e^{\lambda h_2}) + d_1 b_1 + d_2 b_2) y_2^2(t) \right]
\end{aligned}$$

通过假设 3.1, 我们得到  $LV(t, y_t) < 0$ 。

$$\begin{aligned}
EV(0, \phi) &= \sum_{i=1}^2 d_i E\phi_i^2(0) + \sum_{i=1}^2 d_i a_i K_i \int_{-h_i}^0 E e^{\lambda(s+h_i)} \phi_i^2(s) ds \\
&\leq (d_1 \vee d_2) \sum_{i=1}^2 E\phi_i^2(0) + (d_1 a_1 K_1 \vee d_2 a_2 K_2) \int_{-h_i}^0 E e^{\lambda(s+h_i)} \phi_i^2(s) ds \\
&\leq [(d_1 \vee d_2) + (d_1 a_1 K_1 \vee d_2 a_2 K_2)] \|\phi\|^2
\end{aligned}$$

根据李雅普诺夫函数  $V(t, y_t)$  的形式, 我们

$$EV(t, y_t) \geq E e^{\lambda t} \sum_{i=1}^2 d_i y_i^2(t) \geq (d_1 \wedge d_2) e^{\lambda t} E|y(t)|^2.$$

因此, 根据定理 2.1, 系统(2.2)的零平衡点是指数均方稳定的。

### 4. 实例

在本节中, 我们的任务是验证结果。

**例 1:** 考虑系统(3.1), 我们为这两个方程选择了相同的参数, 即,

$$a_1 = 50, a_2 = 50, b_1 = 32, b_2 = 32, c_1 = 60, c_2 = 60, \gamma_1 = 3, \gamma_2 = 3, \delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \\ h_1 = 0.06, h_2 = 0.06, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, d_1 = 0.0516, d_2 = 0.0516, \lambda = 0.$$

通过引理 2.1, 我们有

$$K_1 = \left( \frac{\gamma_1 - 1}{e\delta_1} \right)^{\gamma_1 - 1} = 0.5413, \\ K_2 = \left( \frac{\gamma_2 - 1}{e\delta_2} \right)^{\gamma_2 - 1} = 0.5413.$$

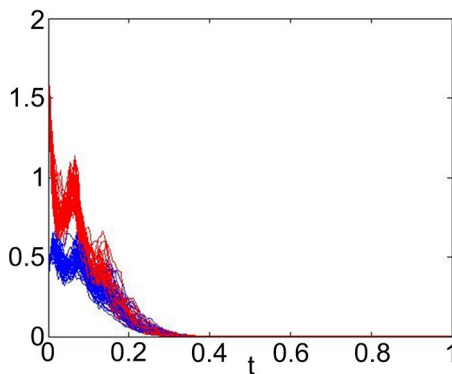
接下来, 我们计算

$$d_1 (\lambda - 2c_1 + \sigma_1^2 + a_1 K_1 + a_1 K_1 e^{\lambda h_1}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 = -0.0449 < 0, \\ d_2 (\lambda - 2c_2 + \sigma_2^2 + a_2 K_2 + a_2 K_2 e^{\lambda h_2}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 = -0.0449 < 0.$$

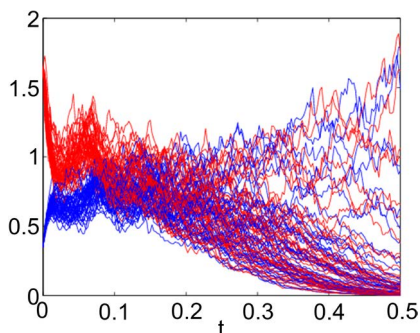
因此, 通过定理 3.1, 系统(3.1)是指数均方稳定的。然而, 如果选择  $b_1 = 41, b_2 = 41$  并且其它参数保持不变。那么

$$d_1 (\lambda - 2c_1 + \sigma_1^2 + a_1 K_1 + a_1 K_1 e^{\lambda h_1}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 = 0.8839 > 0, \\ d_2 (\lambda - 2c_2 + \sigma_2^2 + a_2 K_2 + a_2 K_2 e^{\lambda h_2}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 = 0.8839 > 0.$$

也就是说, 系统(3.1)是不稳定的。我们取  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  的初始值为  $y_1(s) = 0.35 \cos(20s)$ ,  $y_2(s) = 1.65 \cos(20s)$ ,  $s \in [-0.06, 0]$ 。根据第一组参数, 我们做出了图 1。证明了系统(3.1)的零解是指指数均方稳定的。通过另一组数据, 我们获得了图 2 并且表示系统(3.1)的零解是不稳定的。



**Figure 1.** When  $b_1 = 32, b_2 = 32$  the zero solution is exponentially mean-square stable  
**图 1.** 当  $b_1 = 32, b_2 = 32$  时, 零解呈现指数均方稳定



**Figure 2.** When  $b_1 = 41, b_2 = 41$ , the zero solution is unstable

**图 2.** 当  $b_1 = 41, b_2 = 41$  时, 零解不稳定

**例 2:** 考虑系统(3.1), 我们选择不同参数的两个方程的:

$$\begin{aligned} a_1 = 30, a_2 = 20, b_1 = 10, b_2 = 10, c_1 = 35, c_2 = 30, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 3, \delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \\ h_1 = 0.06, h_2 = 0.06, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, d_1 = 0.0289, d_2 = 0.0319, \lambda = 1. \end{aligned}$$

根据引理 2.1, 我们有

$$\begin{aligned} K_1 &= \left( \frac{\gamma_1 - 1}{e\delta_1} \right)^{\gamma_1 - 1} = 0.3679, \\ K_2 &= \left( \frac{\gamma_2 - 1}{e\delta_2} \right)^{\gamma_2 - 1} = 0.5413. \end{aligned}$$

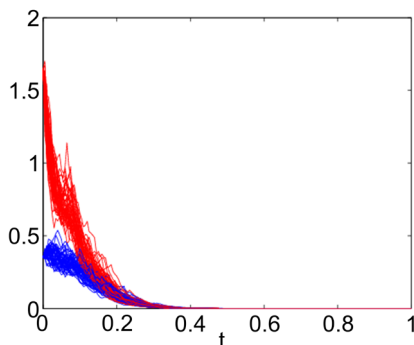
然后, 我们得到

$$\begin{aligned} d_1 (\lambda - 2c_1 + \sigma_1^2 + a_1 K_1 + a_1 K_1 e^{\lambda h_1}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 &= -0.6995 < 0, \\ d_2 (\lambda - 2c_2 + \sigma_2^2 + a_2 K_2 + a_2 K_2 e^{\lambda h_2}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 &= -0.5301 < 0. \end{aligned}$$

因此, 通过定理 3.1, 系统(3.1)是指数均方稳定的。令  $b_1 = 25, b_2 = 25$  并且其它参数保持不变。这样,

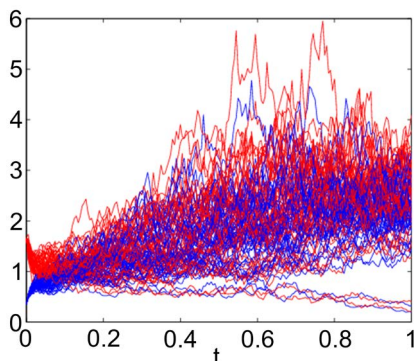
$$\begin{aligned} d_1 (\lambda - 2c_1 + \sigma_1^2 + a_1 K_1 + a_1 K_1 e^{\lambda h_1}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 &= 0.2125 > 0, \\ d_2 (\lambda - 2c_2 + \sigma_2^2 + a_2 K_2 + a_2 K_2 e^{\lambda h_2}) + d_1 b_1 + d_2 b_2 &= 0.3819 > 0. \end{aligned}$$

结果表明, 系统(3.1)是不稳定的。通过选取的参数我们做出了图 3 和图 4。



**Figure 3.** When  $b_1 = 10, b_2 = 10$ , system(3.1) is exponentially mean-square stable

**图 3.** 当  $b_1 = 10, b_2 = 10$  时, 系统(3.1)指数均方稳定



**Figure 4.** When  $b_1 = 25, b_2 = 25$ , system (3.1) is unstable

**图 4.** 当  $b_1 = 25, b_2 = 25$  时, 系统(3.1)不稳定

从图 3 中我们可以看到, 系统(3.1)的零解是指数均方稳定的。然而, 图 4 表明系统(3.1)的零解是不稳定的。

这两个例子表明, 选择合适的耦合系数  $(b_1, b_2)$  对于系统的稳定性是非常重要的。

## 参考文献

- [1] Day, R. (1982) Irregular Growth Cycles. *American Economic Review*, **72**, 406-414. <https://doi.org/10.2105/AJPH.72.4.406>
- [2] Matsumoto, A. and Szidarovszky, F. (2011) Delay Differential Neoclassical Growth Model. *Journal of Economic Behavior & Organization*, **78**, 272-289. <https://doi.org/10.1016/j.jebo.2011.01.014>
- [3] Matsumoto, A. and Szidarovszky, F. (2013) Asymptotic Behavior of a Delay Differential Neoclassical Growth Model. *Sustainability*, **5**, 440-455. <https://doi.org/10.3390/su5020440>
- [4] Ning, Z. and Wang, W. (2016) The Existence of Two Positive Periodic Solutions for the Delay Differential Neoclassical Growth Model. *Journal of Advances in Difference Equations*, **2016**, Article Number: 266. <https://doi.org/10.1186/s13662-016-0995-z>
- [5] Mao, X. (1996) Robustness of Exponential Stability of Stochastic Differential Delay Equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**, 442-447. <https://doi.org/10.1109/9.486647>
- [6] Yue, D. and Won, S. (2001) Delay-Dependent Robust Stability of Stochastic Systems with Time Delay and Nonlinear Uncertainties. *Electronics Letters*, **37**, 992. <https://doi.org/10.1049/el:20010632>
- [7] Zhu, Q. and Song, B. (2011) Exponential Stability of Impulsive Nonlinear Stochastic Differential Equations with Mixed Delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 2851-2860. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.04.011>
- [8] Zhu, Q.X., Song, S. and Tang, T. (2017) Mean Square Exponential Stability of Stochastic Nonlinear Delay Systems. *International Journal of Control*, **90**, 2384-2393.
- [9] Shaikhet, L. (2017) Stability of Equilibrium States of a Nonlinear Delay Differential Equation with Stochastic Perturbations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **27**, 915-924. <https://doi.org/10.1002/rnc.3605>
- [10] Shaikhet, L. (2017) Stability of Equilibria of Stochastically Perturbed Delay Differential Neoclassical Growth Model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series B*, **22**, 1565-1573. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017075>
- [11] Shaikhet, L. (2019) Stability of the Zero and Positive Equilibria of Two Connected Neoclassical Growth Models under Stochastic Perturbations. *Communication of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **68**, 86-93. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.07.033>
- [12] Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V. (1972) *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin.
- [13] Shaikhet, L. (2013) *Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations*. Springer Science and Business Media.