

Global Attractor for the Cahn-Hilliard Equation with a Proliferation Term

Yunping Ren, Zhilin Pu, Fang Duan

School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu Sichuan
Email: 916474367@qq.com, puzhilinscnu@163.com, dfyouxiang@163.com

Received: May 1st, 2020; accepted: May 19th, 2020; published: May 26th, 2020

Abstract

This paper is concerned with the existence of the global attractor of the Cahn-Hilliard equation with a proliferation term in H^k spaces. By means of the method in [8], the result of existence of global attractor is obtained by applying the iteration procedure and regularity estimates.

Keywords

Semigroup, Global Attractor, Cahn-Hilliard Equations

带有增值项的Cahn-Hilliard方程的全局吸引子

任运平, 蒲志林, 段 芳

四川师范大学数学科学学院, 四川 成都
Email: 916474367@qq.com, puzhilinscnu@163.com, dfyouxiang@163.com

收稿日期: 2020年5月1日; 录用日期: 2020年5月19日; 发布日期: 2020年5月26日

摘 要

本文研究带有增值项的Cahn-Hilliard方程在 H^k 空间上的全局吸引子的存在性问题。主要借助[8]中的方法, 利用迭代过程和正则性估计, 得到了全局吸引子的存在性结果。

关键词

半群, 全局吸引子, Cahn-Hilliard方程

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要研究如下带有增值项的 Cahn-Hilliard 方程的初边值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g(u) = \Delta(-\Delta u + f(u)), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} u dx < C, \quad t \geq 0 \quad (1.2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega \quad (1.3)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=1, 2, 3$) 是有界正则区域, n 是边界上的单位外法向量, Δ 是 Laplace 算子, $f(s)$ 和 $g(s)$ 是非线性函数。当 $g(s) \equiv 0$ 时, 即为标准的 Cahn-Hilliard 方程。Cahn-Hilliard 方程描述了物理和化学中二元系统的相分离, 它在 1958 年由 J. W. Cahn 和 J. E. Hilliard [1] 首次以自由能的形式提出。后来, 在动力学基础上, A. Novick-Cohen 和 L. A. Segel [2] 推导出了偏微分方程形式的 Cahn-Hilliard 方程。Cahn-Hilliard 方程的 L^2 的全局解和全局吸引子已经被广泛研究[3] [4]。此外, 在一定假设条件下, Cahn-Hilliard 方程的 $H^2(\Omega)$, $H^3(\Omega)$ 和 $H^k(\Omega)$ ($k \geq 0$) 的全局吸引子的存在性已经在[5] [6] [7] [8]中给出。

本文关心的是广义的 Cahn-Hilliard 方程(1.1), 即 $g(s) \neq 0$ 的情形, 称为带增值项的 Cahn-Hilliard 方程。它的研究目前已有不少的文献, 如[9] [10]。特别地, g 可以是线性函数 $g(s) = \beta s$, $\beta > 0$ 。这种情况下的(1.1)就是 Cahn-Hilliard-Oono 方程, 它说明了相分离过程中长距离(非局部)的相互作用, 已有工作证明了它在有限维吸引子方面的渐近行为[11]。 g 还可以是二次函数 $g(s) = \lambda s(s-1)$, $\lambda > 0$ 。在这种情况下, (1.1)在生物学上有应用, 更准确地说, 在伤口愈合和肿瘤生长模型上有应用[12]。

本文在如下更一般的假设条件下

$$f(u) = \sum_{k=1}^{2p-1} a_k u^k, \quad p \geq 2, \quad p \in \mathbb{N}, \quad a_p > 0 \quad (1.4)$$

$$g(u) = \sum_{k=0}^q c_k u^k, \quad 2 \leq q \leq p, \quad c_q > 0 \quad (1.5)$$

研究方程(1.1)~(1.3)。

$$\text{令 } F(u) = \sum_{k=2}^{2p} b_k u^k, \quad kb_k = a_{k-1}, \quad 2pb_{2p} = a_{2p-1} > 0 \quad (1.6)$$

即 $F'(u) = f(u)$ 。

我们将用[8]的方法来研究在 H^k 空间上的带有一般增值项的 Cahn-Hilliard 方程的全局吸引子存在性问题。利用迭代思想, 以及线性半群的正则性估计和全局吸引子的存在性定理来证明带有增值项的 Cahn-Hilliard 方程在 H^k 空间中有全局吸引子, 它吸引 H^k 的任何有界子集。

我们给出一些记号[8]:

$$H = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u dx < C \right\}, \quad H_{\frac{1}{2}} = \left\{ u \in H^2(\Omega) \cap H : \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad H_1 = \left\{ u \in H^4(\Omega) \cap H : \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \quad (1.7)$$

2. 预备知识

设 X 和 X_1 是 Banach 空间且 $X_1 \subset X$ ，考虑如下定义在 X 上的抽象非线性演化方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + Gu, \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, $u(t)$ 是未知函数, $L: X_1 \rightarrow X$ 是一个线性算子, $G: X_1 \rightarrow X$ 是一个非线性算子. $S(t): X \rightarrow X (t \geq 0)$ 是由(2.1)生成的半群, (2.1)的解可以写成 $u(t, \varphi) = S(t)\varphi$.

定理 2.1 [4]: 设 $S(t): X \rightarrow X (t \geq 0)$ 是由(2.1)生成的半群. 假设下面的条件成立:

1) $S(t)$ 有一个有界吸收集 $B \subset X$, 即对于任意有界集 $A \subset X$, 存在一个时间 $t_A \geq 0$, 使得 $S(t)\varphi \in B$, $\forall \varphi \in A$;

2) $S(t)$ 是一致紧的;

则 B 的 ω -极限集 $\mathcal{A} = \omega(B)$ 是(2.1)的一个全局吸引子.

如果(2.1)中的线性算子 L 是一个扇形算子, 它生成解析半群 e^{tL} . 不失一般性, 我们假设 L 生成分数幂算子 \mathcal{L}^α 和分数阶空间 X_α 如下:

$$\mathcal{L}^\alpha = (-L)^\alpha : X_\alpha \rightarrow X, \alpha \in \mathbb{R}^1$$

其中, $X_\alpha = D(\mathcal{L}^\alpha)$ 是 \mathcal{L}^α 的定义域. 由半群理论, 对于任意的 $\beta > \alpha$, 都有 $X_\beta \subset X_\alpha$ 是紧包含.

引理 2.1 [13]: $L: X_1 \rightarrow X$ 是一个扇形算子, 它生成了解析半群 $T(t) = e^{tL}$, 则对于 $\mathcal{L}^\alpha (\mathcal{L} = -L)$ 有如下性质:

1) $T(t): X \rightarrow X_\alpha$ 是有界的, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^1, t > 0$,

2) $T(t)\mathcal{L}^\alpha x = \mathcal{L}^\alpha T(t)x, \forall x \in X_\alpha$,

3) $\forall t > 0, \mathcal{L}^\alpha T(t): X \rightarrow X$ 有界, 且

$$\|\mathcal{L}^\alpha T(t)\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \quad (2.2)$$

其中, 某个 $\delta > 0, C_\alpha > 0$ 是常数.

4) X_α -范数可以定义为

$$\|x\|_{X_\alpha} = \|\mathcal{L}^\alpha x\|_X \quad (2.3)$$

由定理 2.1 有如下.

定理 2.2 [8]: $S(t)$ 是由(2.1)生成的半群, $u(t, \varphi)$ 是(2.1)的解, 设 X_α 是由 L 生成分数阶空间, 若:

1) 对于某个 $\alpha \geq 0$, 有一个有界集 $B \subset X_\alpha$, 对于任意的 $\varphi \in X_\alpha$, 存在一个时间 $t_\varphi > 0$, 使得 $u(t, \varphi) \in B, \forall t > t_\varphi$;

2) $\beta > \alpha$, 对于任意的有界集 $U \subset X_\beta$, 有 $T > 0, C > 0$, 使得 $\|u(t, \varphi)\|_{X_\beta} \leq C, \forall t > T, \varphi \in U$;

则(2.1)有一个全局吸引子 $\mathcal{A} \subset X_\alpha$.

3. 主要结果

本节中, 我们将给出本文的主要结果.

设 H 和 H_1 为(1.7)中定义的空间, 线性算子 $L, G: H_1 \rightarrow H$

$$\begin{cases} Lu = -\Delta^2 u \\ Gu = \Delta f(u) - g(u) \end{cases} \quad (3.1)$$

其中, $f(u)$ 同(1.4), $g(u)$ 同(1.5)。所以, (1.1)~(1.3)可以写成抽象形式(2.1)。 $L = -\Delta^2$, L 也是扇形算子, 显然 $(-L)^{\frac{1}{2}} = -\Delta$ 。

本文的主要结果是如下。

定理 3.1: 对初边值问题(1.1)~(1.3), 假设 $f(u)$, $g(u)$ 分别由(1.4)和(1.5)给出; 如果 $n=3$, $p=2$; 则对于任何的 $\alpha \geq 0$, 方程(1.1)~(1.3)在 H_α 中具有全局吸引子 \mathcal{A} , 并且 \mathcal{A} 在 H_α -范数下吸引任何的 H_α 有界集。

证明: 对于 $n=1,2$ 时, 任意的 $p \geq 2$ 以及 $n=3$ 时, $p=2$, 方程(1.1)对于任意的 $\varphi \in H$ 有唯一强解 $u \in L^2((0,T), H_1) \cap H^1((0,T), H)$, $\forall T > 0$ [8]。

所以, 系统(1.1)~(1.3)的解 $u(t, \varphi)$ 可以写成

$$\begin{aligned} u(t, \varphi) &= e^{tL} \varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)L} (\Delta f(u) - g(u)) d\tau \\ &= e^{tL} \varphi - \int_0^t (-L)^{\frac{1}{2}} e^{(t-\tau)L} f(u) d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)L} g(u) d\tau \end{aligned} \quad (3.2)$$

接下来, 就可以根据定理 2.2 [8], 用下面几个步骤在证明定理 3.1。

i) 我们首先要证明, 对于任意的有界集 $U \subset H_{\frac{1}{4}}$, 有一个常数 $C > 0$, 使得系统(1.1)~(1.3)的解 $u(t, \varphi)$

对于任意的 $\varphi \in U$ 和 $t \geq 0$ 是一致有界的。

让方程(1.1)乘 $-\Delta u + f(u)$, 再在 Ω 上积分有

$$\int_{\Omega} (u_t + g(u))(-\Delta u + f(u)) dx \leq 0 \quad (3.3)$$

进一步,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (u_t + g(u))(-\Delta u + f(u)) dx \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \int_{\Omega} F dx \right) + \int_{\Omega} g'(u) |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{2p-1} a_k u^k \right) \left(\sum_{k=0}^q c_k u^k \right) dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

我们做如下假设:

$$\frac{1}{2} b_{2p} u^{2p} - C_1 \leq F(u) \quad (3.5)$$

$$a_{2p-1} u^{2p-1} c_q u^q - C_2 \leq \left(\sum_{k=1}^{2p-1} a_k u^k \right) \left(\sum_{k=0}^q c_k u^k \right) \quad (3.6)$$

$$q c_q u^{q-1} - C_3 \leq g'(u) \quad (3.7)$$

特别地, 当取 $f(s) = s^3 - s$ 和 $g(s) = \beta s$, $\beta > 0$ 或 $g(s) = \beta s(s-1)$, $\beta > 0$ 时, 上面假设依然成立。

下面将假设(3.5)~(3.7)带入(3.3)~(3.4)有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} b_{2p} \|u\|^{2p} \right) + \int_{\Omega} (q c_q u^{q-1} - C_3) |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} (a_{2p-1} u^{2p-1} c_q u^q - C_2) dx \leq 0 \\ &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} b_{2p} \|u\|^{2p} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{2p-1} u^{2p} c_q u^{q-1} dx - \int_{\Omega} q c_q u^{q-1} b_{2p} u^{2p} dx \\ &\leq C_3 \left(\|\nabla u\|^2 + b_{2p} \|u\|^{2p} \right) + C \end{aligned} \quad (3.8)$$

此时, 有 $\frac{1}{2}a_{2p-1}c_q - qc_q b_{2p} \geq 0$, 用 Gronwall 引理, 我们可得到

$$\|\nabla u\|^2 + b_{2p} \|u\|^{2p} \leq 0, \forall t \geq 0, \varphi \in U \tag{3.9}$$

让方程(1.1)乘 u , 再在 Ω 上积分有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \int_{\Omega} f'(u) |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} g(u) u dx = 0 \tag{3.10}$$

由 $f(u)$, $g(u)$ 的形式可得出:

$$f'(u) \geq -C_0, C_0 > 1 \tag{3.11}$$

$$g(u)u \geq -b_{2p} u^{2p} - C_4, b_{2p} > 0 \tag{3.12}$$

特别地, 当取 $f(s) = s^3 - s$ 和 $g(s) = \beta s, \beta > 0$ 或 $g(s) = \beta s(s-1), \beta > 0$ 时, 上面假设依然成立。

下面将假设(3.11)~(3.12)带入(3.10)有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - C_0 \|\nabla u\|^2 - b_{2p} \|u\|^{2p} - C \leq 0 \\ & \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2 + 2(C_0 - 1)b_{2p} \|u\|^{2p} \leq 2C_0 b_{2p} \|u\|^{2p} + 2C_0 \|\nabla u\|^2 + C \end{aligned}$$

由 Gronwall 引理, 我们可得到

$$\|u\|_{L^2} \leq C, \forall t \geq 0, \varphi \in U \tag{3.13}$$

从而,

$$\|\nabla u\| \leq C, \forall t \geq 0, \varphi \in U \tag{3.14}$$

所以,

$$\|u(t, \varphi)\|_{H_{\frac{1}{4}}} \leq C, \forall t \geq 0, \varphi \in U \subset H_{\frac{1}{4}} \tag{3.15}$$

ii) 然后证明, 对于任意的有界集 $U \subset H_{\alpha} \left(\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2} \right)$, 有一个常数 $C > 0$, 使得

$$\|u(t, \varphi)\|_{H_{\alpha}} \leq C, \forall t \geq 0, \varphi \in U, \alpha < \frac{1}{2} \tag{3.16}$$

实际上, 从(2.3)和(3.2)可知

$$\begin{aligned} \|u(t, \varphi)\|_{H_{\alpha}} &= \left\| e^{tL} \varphi - \int_0^t (-L)^{\frac{1}{2}} e^{(t-\tau)L} f(u) d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)L} g(u) d\tau \right\|_{H_{\alpha}} \\ &\leq \|\varphi\|_{H_{\alpha}} + \int_0^t \left\| (-L)^{\frac{1}{2}+\alpha} e^{(t-\tau)L} f(u) \right\|_H d\tau + \int_0^t \left\| (-L)^{\alpha} e^{(t-\tau)L} g(u) \right\|_H d\tau \\ &\leq \|\varphi\|_{H_{\alpha}} + \int_0^t \left\| (-L)^{\frac{1}{2}+\alpha} e^{(t-\tau)L} \right\| \cdot \|f(u)\|_H d\tau + \int_0^t \left\| (-L)^{\alpha} e^{(t-\tau)L} \right\| \cdot \|g(u)\|_H d\tau \end{aligned} \tag{3.17}$$

我们说 $f: H_{\frac{1}{4}} \rightarrow H, g: H_{\frac{1}{4}} \rightarrow H$ 是有界的。

由 $H_{\frac{1}{4}} \hookrightarrow L^{4p}(\Omega)$ (当 $n=1,2$ 时, 显然成立; 当 $n=3$ 时, $p \leq \frac{3}{2}$) 有

$$\begin{aligned}
\|g(u)\|_H^2 &= \int_{\Omega} |g(u)|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \sum_{k=0}^q c_k u^k \right|^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(c_q u^q + \sum_{k=0}^{q-1} |c_k| \left(\varepsilon |u|^q + \varepsilon^{-\frac{k}{q-k}} \right) \right)^2 dx \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} |u|^{2q} dx + 1 \right) \leq C \left(\int_{\Omega} |u|^{4p} dx + 1 \right) \leq C \left(\|u\|_{H_{\frac{1}{4}}}^{4p} + 1 \right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

这就意味着 $g: H_{\frac{1}{4}} \rightarrow H$ 是有界的。

$$\begin{aligned}
\|f(u)\|_H^2 &= \int_{\Omega} |f(u)|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \sum_{k=1}^{2p-1} a_k u^k \right|^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(a_{2p-1} u^{2p-1} + \sum_{k=1}^{2p-2} |a_k| \left(\varepsilon |u|^{2p-1} + \varepsilon^{-\frac{k}{2p-1-k}} \right) \right)^2 dx \\
&\leq C \left(\int_{\Omega} |u|^{4p-2} dx + 1 \right) \leq C \left(\int_{\Omega} |u|^{4p} dx + 1 \right) \leq C \left(\|u\|_{H_{\frac{1}{4}}}^{4p} + 1 \right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

这就意味着 $f: H_{\frac{1}{4}} \rightarrow H$ 是有界的。

因此, 由(2.2)和(3.15)可知

$$\|u(t, \varphi)\|_{H_{\alpha}} \leq \|\varphi\|_{H_{\alpha}} + C \int_0^t \tau^{-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} e^{-\delta\tau} d\tau + C \int_0^t \tau^{-\alpha} e^{-\delta\tau} d\tau \leq C, \quad \forall t \geq 0, \varphi \in U \subset H_{\alpha}$$

所以, (3.16)成立。

iii) 接下来证明, 对于任意的有界集 $U \subset H_{\alpha}$ ($\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{4}$), 有一个常数 $C > 0$, 使得

$$\|u(t, \varphi)\|_{H_{\alpha}} \leq C, \quad \forall t \geq 0, \varphi \in U \subset H_{\alpha}, \alpha < \frac{3}{4} \tag{3.20}$$

实际上, 由分数阶空间的嵌入定理

$$H_{\alpha} \hookrightarrow C^0(\Omega) \cap H^1(\Omega), \quad \alpha > \frac{3}{8}$$

可得

$$\begin{aligned}
\|g(u)\|_{H_{\frac{1}{4}}}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla g(u)|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \sum_{k=1}^q k c_k u^{k-1} \nabla u \right|^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(q c_q u^{q-1} + \sum_{k=1}^{q-1} k |c_k| \left(\varepsilon |u|^{q-1} + \varepsilon^{-\frac{k-1}{q-k}} \right) \right)^2 |\nabla u|^2 dx \\
&\leq C \int_{\Omega} (u^{2q-2} + 1) |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \left(\sup_{x \in \Omega} u^{2q-2} + 1 \right) |\nabla u|^2 dx \\
&\leq C \left(\|u\|_{H_{\alpha}}^{2q-2} + 1 \right) \|u\|_{H_{\frac{1}{4}}}^2 \leq C \left(\|u\|_{H_{\alpha}}^{2q-2} + 1 \right) \|u\|_{H_{\alpha}}^2
\end{aligned} \tag{3.21}$$

这意味着

$$g : H_\alpha \rightarrow H_{\frac{1}{4}}, \alpha > \frac{3}{8} \tag{3.22}$$

是有界的。

因此, 由(3.16)和(3.22)可得

$$\|g(u(t, \varphi))\|_{H_{\frac{1}{4}}} < C, \forall t \geq 0, \varphi \in U, \frac{3}{8} < \alpha < \frac{1}{2} \tag{3.23}$$

而

$$\begin{aligned} \|f(u)\|_{H_{\frac{1}{4}}}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla f(u)|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \sum_{k=1}^{2p-1} ka_k u^{k-1} \nabla u \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left((2p-1)a_{2p-1} u^{2p-2} + \sum_{k=1}^{2p-2} k|a_k| \left(\varepsilon |u|^{2p-2} + \varepsilon^{-\frac{k-1}{2p-1-k}} \right) |\nabla u| \right)^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega} (u^{4p-4} + 1) |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \left(\sup_{x \in \Omega} u^{4p-4} + 1 \right) |\nabla u|^2 dx \\ &\leq C \left(\|u\|_{H_\alpha}^{4p-4} + 1 \right) \|u\|_{H_{\frac{1}{4}}}^2 \leq C \left(\|u\|_{H_\alpha}^{4p-4} + 1 \right) \|u\|_{H_\alpha}^2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

这意味着

$$f : H_\alpha \rightarrow H_{\frac{1}{4}}, \alpha > \frac{3}{8} \tag{3.25}$$

是有界的。

因此, 由(3.16)和(3.25)可得

$$\|f(u(t, \varphi))\|_{H_{\frac{1}{4}}} < C, \forall t \geq 0, \varphi \in U, \frac{3}{8} < \alpha < \frac{1}{2} \tag{3.26}$$

所以, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \|u(t, \varphi)\|_{H_\alpha} &\leq \|\varphi\|_{H_\alpha} + \int_0^t \left\| (-L)^{\frac{1}{4}+\alpha} e^{(t-\tau)L} \right\| \cdot \|f(u)\|_{H_{\frac{1}{4}}} d\tau + \int_0^t \left\| (-L)^{\alpha-\frac{1}{4}} e^{(t-\tau)L} \right\| \cdot \|g(u)\|_{H_{\frac{1}{4}}} d\tau \\ &\leq \|\varphi\|_{H_\alpha} + C \int_0^t \tau^{-\left(\frac{1}{4}+\alpha\right)} e^{-\delta\tau} d\tau + C \int_0^t \tau^{-\alpha+\frac{1}{4}} e^{-\delta\tau} d\tau \leq C, \forall t \geq 0, \varphi \in U \subset H_\alpha \end{aligned} \tag{3.27}$$

所以, (3.20)成立。

iv) 接下来再证明, 对于任意的有界集 $U \subset H_\alpha \left(\frac{3}{4} \leq \alpha < 1 \right)$, 有一个常数 $C > 0$, 使得

$$\|u(t, \varphi)\|_{H_\alpha} \leq C, \forall t \geq 0, \varphi \in U \subset H_\alpha, \alpha < 1 \tag{3.28}$$

实际上, 由分数阶空间的嵌入定理

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow W^{1,6} \hookrightarrow W^{1,4}, H_\alpha \hookrightarrow C^0(\Omega) \cap H^2(\Omega), \alpha \geq \frac{1}{2}$$

可得

$$\begin{aligned}
& \|g(u)\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 = \int_{\Omega} |\Delta g(u)|^2 dx \\
& \leq \int_{\Omega} \left(c_1 \Delta u + q(q-1)c_q u^{q-2} |\nabla u|^2 + qc_q u^{q-1} \Delta u + \sum_{k=2}^{q-1} k(k-1)|c_k| \left(\varepsilon |u|^{q-2} + \varepsilon^{\frac{k-2}{q-k}} \right) |\nabla u|^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=2}^{q-1} k |c_k| \left(\varepsilon |u|^{q-1} + \varepsilon^{\frac{k-1}{q-k}} \right) |\Delta u| \right)^2 dx \tag{3.29} \\
& \leq C \int_{\Omega} \left(|\Delta u|^2 + \sup_{x \in \Omega} |u|^{2q-4} |\nabla u|^4 + \sup_{x \in \Omega} |u|^{2q-2} |\Delta u|^2 + |\nabla u|^4 \right) dx \\
& \leq C \left(\|u\|_{H_{\alpha}}^2 + \|u\|_{H_{\alpha}}^{2q} + \|u\|_{H_{\alpha}}^4 \right)
\end{aligned}$$

这意味着

$$g : H_{\alpha} \rightarrow H_{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \geq \frac{1}{2} \tag{3.30}$$

是有界的。

因此, 由(3.20)和(3.30)可得

$$\|g(u(t, \varphi))\|_{H_{\frac{1}{2}}} < C, \quad \forall t \geq 0, \varphi \in U, \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{4} \tag{3.31}$$

同理,

$$\|f(u)\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 \leq C \left(\|u\|_{H_{\alpha}}^{4p-2} + \|u\|_{H_{\alpha}}^2 + \|u\|_{H_{\alpha}}^4 \right) \tag{3.32}$$

这意味着

$$f : H_{\alpha} \rightarrow H_{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \geq \frac{1}{2} \tag{3.33}$$

是有界的。

因此, 由(3.20)和(3.33)可得

$$\|f(u(t, \varphi))\|_{H_{\frac{1}{2}}} < C, \quad \forall t \geq 0, \varphi \in U, \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{4} \tag{3.34}$$

所以, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
\|u(t, \varphi)\|_{H_{\alpha}} & \leq \|\varphi\|_{H_{\alpha}} + \int_0^t \left\| (-L)^{\alpha} e^{(t-\tau)L} \right\| \cdot \|f(u)\|_{H_{\frac{1}{2}}} d\tau + \int_0^t \left\| (-L)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{(t-\tau)L} \right\| \cdot \|g(u)\|_{H_{\frac{1}{2}}} d\tau \\
& \leq \|\varphi\|_{H_{\alpha}} + C \int_0^t \tau^{-\alpha} e^{-\delta\tau} d\tau + C \int_0^t \tau^{-\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\delta\tau} d\tau \leq C, \quad \forall t \geq 0, \varphi \in U \subset H_{\alpha}, 0 < \alpha < 1
\end{aligned} \tag{3.35}$$

所以, (3.28)成立。

v) 我们将证明, 对于任意的有界集 $U \subset H_{\alpha}$ ($\alpha \geq 0$), 有一个常数 $C > 0$, 使得

$$\|u(t, \varphi)\|_{H_{\alpha}} \leq C, \quad \forall t \geq 0, \varphi \in U \subset H_{\alpha}, \alpha \geq 0 \tag{3.36}$$

实际上, 由分数阶空间的嵌入定理

$$H^3(\Omega) \hookrightarrow W^{2,6} \hookrightarrow W^{1,6}, H_\alpha \hookrightarrow C^0(\Omega) \cap H^3(\Omega), \alpha \geq \frac{3}{4}$$

可得

$$\begin{aligned} \|g(u)\|_{H_{\frac{3}{4}}}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla \Delta g(u)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(c_1 |\nabla \Delta u| + q(q-1)(q-2)c_q |u|^{q-3} |\nabla u|^3 + 3q(q-1)c_q |u|^{q-2} |\nabla u| |\Delta u| \right. \\ &\quad \left. + qc_q |u|^{q-1} |\nabla \Delta u| + \sum_{k=2}^{q-1} \left(k(k-1)(k-2) |c_k| \left(\varepsilon |u|^{q-3} + \varepsilon^{\frac{k-3}{q-k}} \right) |\nabla u|^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3k(k-1) |c_k| \left(\varepsilon |u|^{q-2} + \varepsilon^{\frac{k-2}{q-k}} \right) |\nabla u| |\Delta u| + k |c_k| \left(\varepsilon |u|^{q-1} + \varepsilon^{\frac{k-1}{q-k}} \right) |\nabla \Delta u| \right) \right)^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega} \left(|\nabla \Delta u|^2 + \sup_{x \in \Omega} |u|^{2q-6} |\nabla u|^6 + \sup_{x \in \Omega} |u|^{2q-4} |\Delta u|^2 |\nabla u|^2 + \sup_{x \in \Omega} |u|^{2q-2} |\nabla \Delta u|^2 + |\nabla u|^6 + |\nabla u|^2 |\Delta u|^2 \right) dx \\ &\leq C \left(\|u\|_{H_\alpha}^2 + \|u\|_{H_\alpha}^{2q} + \|u\|_{H_\alpha}^4 + \|u\|_{H_\alpha}^6 \right) \end{aligned} \tag{3.37}$$

这意味着

$$g : H_\alpha \rightarrow H_{\frac{3}{4}}, \alpha \geq \frac{3}{4} \tag{3.38}$$

是有界的。

因此，由(3.28)和(3.38)可得

$$\|g(u(t, \varphi))\|_{H_{\frac{3}{4}}} < C, \forall t \geq 0, \varphi \in U, \frac{3}{4} \leq \alpha < 1 \tag{3.39}$$

同理，

$$\|f(u)\|_{H_{\frac{3}{4}}}^2 \leq C \left(\|u\|_{H_\alpha}^2 + \|u\|_{H_\alpha}^{4p-2} + \|u\|_{H_\alpha}^4 + \|u\|_{H_\alpha}^6 \right) \tag{3.40}$$

这意味着

$$f : H_\alpha \rightarrow H_{\frac{3}{4}}, \alpha \geq \frac{3}{4} \tag{3.41}$$

是有界的。

因此，由(3.28)和(3.41)可得

$$\|f(u(t, \varphi))\|_{H_{\frac{3}{4}}} < C, \forall t \geq 0, \varphi \in U, \frac{3}{4} \leq \alpha < 1 \tag{3.42}$$

所以，我们可以得到

$$\begin{aligned} &\|u(t, \varphi)\|_{H_\alpha} \\ &\leq \|\varphi\|_{H_\alpha} + \int_0^t \left\| (-L)^{\alpha-\frac{1}{4}} e^{(t-\tau)L} \right\| \cdot \|f(u)\|_{H_{\frac{3}{4}}} d\tau + \int_0^t \left\| (-L)^{\alpha-\frac{3}{4}} e^{(t-\tau)L} \right\| \cdot \|g(u)\|_{H_{\frac{3}{4}}} d\tau \\ &\leq \|\varphi\|_{H_\alpha} + C \int_0^t \tau^{-\alpha+\frac{1}{4}} e^{-\delta\tau} d\tau + C \int_0^t \tau^{-\alpha+\frac{3}{4}} e^{-\delta\tau} d\tau \leq C, \forall t \geq 0, \varphi \in U \subset H_\alpha \end{aligned} \tag{3.43}$$

最后, 不断重复步骤 i)~iv), 我们就可以得到(3.36)成立。

参考文献

- [1] Cahn, J.W. and Hilliard, J.E. (1958) Free Energy of a Nonuniform System: Interfacial Energy. *The Journal of Chemical Physics*, **28**, 258-267. <https://doi.org/10.1063/1.1744102>
- [2] Novick-Cohen, A. and Segel, L.A. (1984) Nonlinear Aspects of the Cahn-Hilliard Equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **10**, 277-298. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(84\)90180-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90180-5)
- [3] Nicolaenko, B., Scheurer, B. and Temam, R. (1989) Some Global Dynamical Properties of a Class of Pattern Formation Equations. *Communications in Partial Differential Equations*, **14**, 245-297. <https://doi.org/10.1080/03605308908820597>
- [4] Temam, R. (1997) Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd Edition, Applied Mathematical Sciences, Vol. 68, Springer-Verlag, New York.
- [5] Cholewa, J.W. and Dlotko, T. (1994) Global Attractor for the Cahn-Hilliard System. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **49**, 277-292. <https://doi.org/10.1017/S0004972700016348>
- [6] Dlotko, T. (1994) Global Attractor for the Cahn-Hilliard Equation in H^2 and H^3 . *Journal of Differential Equations*, **113**, 381-393. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1129>
- [7] Li, D. and Zhong, C.K. (1998) Global Attractor for the Cahn-Hilliard System with Fast Growing Nonlinearity. *Journal of Differential Equations*, **149**, 191-210. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3429>
- [8] Song, L., Zhang, Y. and Ma, T. (2009) Global Attractor of the Cahn-Hilliard Equation in H^k Spaces. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, **355**, 53-62. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.01.035>
- [9] Miranville, A. (2013) Asymptotic Behaviour of a Generalized Cahn-Hilliard Equation with a Proliferation Term. *Applicable Analysis*, **92**, 1308-1321. <https://doi.org/10.1080/00036811.2012.671301>
- [10] Miranville, A. (2019) Existence of Solutions to a Cahn-Hilliard Type Equation with a Logarithmic Nonlinear Term. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **16**, Article No. 6. <https://doi.org/10.1007/s00009-018-1284-8>
- [11] Miranville, A. (2011) Asymptotic Behavior of the Cahn-Hilliard-Oono Equation. *Journal of Applied Analysis and Computation*, **1**, 523-536.
- [12] Khain, E. and Sander, L.M. (2008) A Generalized Cahn-Hilliard Equation for Biological Applications. *Physical Review E*, **77**, Article ID: 051129. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.051129>
- [13] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>