Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(5), 798-802
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.95095

Gel'fand Width of Infinite-Dimensional Sequence Space

Hanyue Xiao, Lu Sun

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: xhy080530@163.com

Received: May 1st, 2020; accepted: May 20th, 2020; published: May 27th, 2020

Abstract

Sequence space is a kind of important space; many approximation problems of function space are transformed into approximation problems of sequence space. The Gel'fand width of infinite-dimensional sequence space is discussed in this paper, and its sharp asymptotic order is estimated.

Keywords

Infinite-Dimensional Sequence Space, Gel'fand Width, Asymptotic Order

无穷维序列空间的Gel'fand宽度

肖寒月，孙　璐

西华大学理学院，四川 成都
Email: xhy080530@163.com

收稿日期：2020年5月1日；录用日期：2020年5月20日；发布日期：2020年5月27日

摘　要

序列空间是一类重要的空间，很多函数类空间中的逼近问题转化为序列空间的逼近问题来处理。本文研究无穷维序列空间的Gel'fand宽度，并估计其精确渐近阶。

关键词

无穷维序列空间，Gel'fand宽度，渐近阶

文章引用: 肖寒月, 孙璐. 无穷维序列空间的 Gel'fand 宽度[J]. 应用数学进展, 2020, 9(5): 798-802.
DOI: 10.12677/aam.2020.95095

1. 引言及主要结果

序列空间是一类重要的空间，其逼近问题得到广泛而深入的研究。关于有限维空间的宽度问题，如 Kolmogorov n-宽度，Gel’fand 宽度，线性 n-宽度等，取得了丰硕的成果[1]，关于无穷维序列空间的熵数研究，也取得了丰硕的成果[2] [3] [4]。众所周知，Gel’fand 宽度与计算复杂性有密切的联系[5]。本文研究无穷维序列空间的 Gel’fand 宽度。

下面，回顾无穷维序列空间：

用 $l_p\left(1\le p\le\infty\right)$ 表示赋予范数 $\|\bullet\|_p$ 的经典无穷维序列空间。众所周知，l_p 具有以下重要性质：

1) 对 $1\le p<q\le\infty$，有 $l_p\subset l_q$，反之不成立。

2) 对 $1\le p<\infty$，$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 l_p 的 Schauder 基。其中，$e_k\left(1\le k<\infty\right)$ 表示 l_p 中第 k 个分量为 1，其余分量为 0 的实序列。

对 $\forall 1\le p<\infty$，$x=\{x_k\}\in l_p$，$r\in\mathbb{R}$，令

$$x^{(r)}=\left\{k^r x_k\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$l_{p,r}:=\left\{x\in l_p \,\middle|\, x^{(r)}\in l_p\right\}.$$

易见，$l_{p,r}$ 为线性空间。对 $x\in l_{p,r}$，令

$$\|x\|_{p,r}:=\left\|x^{(r)}\right\|_{l_p}.$$

则 $\|\bullet\|_{p,r}$ 为 $l_{p,r}$ 上的范数。以下用 $l_{p,r}$ 表示 $l_{p,r}$ 上赋予范数 $\|\bullet\|_{p,r}$ 的赋范线性空间，$B_{p,r}$ 表示 $l_{p,r}$ 中的单位球。

由 Hölder 不等式知，对 $1\le q<p<\infty$，当 $r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ 时，$l_{p,r}$ 可连续地嵌入 l_q 中。本文讨论 $l_{p,r}$ 在 l_q 中的 Gel’fand 宽度。

2. $l_{p,r}$ 在 l_q $\left(1\le q<p<\infty,\ r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ 中的 Gel’fand 宽度

定义 1：设 $\left(X,\|\bullet\|\right)$ 为赋范线性空间，A 为 X 中非空子集，$n\in\mathbb{N}^*=\{0,1,2,\cdots\}$，称

$$d^n\left(A,X\right):=\inf_{L^n}\sup_{x\in A\cap L^n}\|x\|$$

为 A 在 X 中的 Gel’fand n-宽度。其中 L^n 取遍 X 中余维数不超过 n 的所有线性子空间。本文用 $\mathrm{codim}L^n$ 表示 L^n 的余维数。

关于 Gel’fand 宽度的性质，可参阅 Pinkus 专著[1]。

本文主要讨论 $l_{p,r}$ 在 l_q 中的 Gel’fand 宽度精确阶，其中 $1\le q<p<\infty$，$r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，这也是本文的主要结果。

定理 1：设 $1\le q<p<\infty$，$r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，$n\in\mathbb{N}^*$，则

$$d^n\left(B_{p,r},l_q\right)\succ\prec n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}.$$

其中，“$\succ\prec$”定义如下：$c,c_i,i=0,1,\cdots$，表示仅与参数 p,q,r 相关的正常数。若对于正函数 $\mu(y)$ 和 $\nu(y)$，$y\in B$ (B 是正函数 $\mu(y)$ 和 $\nu(y)$ 的定义域)，存在正常数 c_1,c_2，使得对任意的 $y\in B$，有 $\mu(y)\ge c_1\nu(y)$ 或者 $\mu(y)\le c_1\nu(y)$，则将其记为：$\mu(y)\gg\nu(y)$ 或者 $\mu(y)\ll\nu(y)$。若存在正常数 c_3,c_4，使得对任意的 $y\in B$，有 $c_3\le\mu(y)/\nu(y)\le c_4$，则记为：$\mu(y)\succ\prec\nu(y)$，即对任意的 $y\in B$，若 $\mu(y)\gg\nu(y)$ 和 $\mu(y)\ll\nu(y)$ 同时成立，则有 $\mu(y)\succ\prec\nu(y)$。

本文采用将无穷维序列空间的 Gel’fand 宽度转化为有限维空间的 Gel’fand 宽度来证明定理 1，首先介绍有限维空间的 Gel’fand 宽度。

$1\le p\le\infty$，用 l_p^m 表示在 $\mathbb{R}^m$ 上赋予通常范数 $\|\bullet\|_{l_p^m}$ 的 Banach 空间，用 B_p^m 表示 l_p^m 中的单位球。易见，$\{e_k'\}_{k=1}^m$ 为 l_p^m 的基，其中 e_k 表示 $\mathbb{R}^m$ 中第 k 个分量为 1，其余分量为 0 的向量。有限维空间的 Gel’fand 宽度有如下结果：

命理 2 [1]：设 $1\le q<p\le\infty$，$n\in\mathbb{N}^*$，则

$$d^n\left(B_p^m,l_q^m\right)=\begin{cases}(m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 0\le n\le m,\\ 0, & n>m.\end{cases}$$

下面，建立估计定理 1 上界的引理。

对 $k\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$，令

$$S_k=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|2^{n-1}\le n<2^k\right\}.$$

易见 $m_k:=|S_k|=2^{k-1}$。

引理 3：设 $1\le q<p<\infty$，$r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，$n\in\mathbb{N}^*$，$\{n_k\}$ 为非负整数序列，且 $n_k\le m_k$，$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\le n$，则

$$d^n\left(B_{p,r},l_q\right)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}d^{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right).$$

证明：对 $\forall k\in\mathbb{N}$，令

$$F_k=span\left\{e_n\middle|n\in S_k\right\}.$$

易见 $\dim F_k=m_k$。令

$$I_k:F_k\to\mathbb{R}^{m_k},$$

$$x=\sum_{j\in S_k}x_je_j\mapsto\sum_{j=1}^{m_k}x_{2^{k-1}+j-1}e_j'.$$

则 I_k 为 F_k 到 $\mathbb{R}^{m_k}$ 上的线性同构映射。

对 $\forall x=\sum_{j\in S_k}x_je_j\in F_k$，$\forall y=\sum_{j\in S_k}y_je_j$，则

$$\|x\|_{p,r}=\left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|j^rx_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\succ\prec 2^{kr}\left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1}\left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=2^{kr}\left\|I_kx\right\|_{l_p^{m_k}},\tag{1}$$

$$\|y\|_q=\left\|I_ky\right\|_{l_q^{m_k}}.\tag{2}$$

令

$$\Delta_k : l_p \to F_k \cap l_p,$$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \mapsto \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} x_j e_j.$$

为 l_p 到 $F_k \cap l_p$ 上的投影。

由 Gel'fand 宽度的定义，存在 $l_q^{m_k}$ 中余维数为 n_k 的线性子空间 L^{n_k}，使得

$$d^{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) = \sup_{x \in B_p^{m_k} \cap L^{n_k}} \|x\|_{l_q^{m_k}}. \tag{3}$$

易见，$T^{n_k} := I_k^{-1} L^{n_k}$ 为 l_q 中余维数为 n_k 的线性子空间，由(1) (2) (3)式可得

$$\sup_{\substack{x \in B_{p,r} \\ \Delta_k x \in T^{n_k}}} \|x\|_{l_q} \ll 2^{-rk} \sup_{x \in B_p^{m_k} \cap L^{n_k}} \|x\|_{l_q^{m_k}} = 2^{-rk} d^{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right). \tag{4}$$

令 $T^n := \sum_{k=1}^{\infty} T^{n_k}$，其和为直和。易见

$$\operatorname{codim} R^n \le \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{codim} T^{n_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} n_k \le n.$$

从而

$$d^n\left(B_{p,r}, l_q\right) \le \sup_{x \in B_{p,r} \cap T^n} \|x\|_{l_q} \le \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\Delta_k x \in T^{n_k}} \|x\|_{l_q} \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kr} d^{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right).$$

下面，建立估计定理 1 下界的引理。

引理 4： 设 $1 \le q < p < \infty$，$r > \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$，$n \in \mathbb{N}^*$，$k' = [\log_2 n] + 1$，$k = k' + 2$，则

$$d^n\left(B_{p,r}, l_q\right) \gg 2^{-rk'} d^n\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right).$$

证明： 易见 $m_k \ge n$，且

$$d^n\left(B_{p,r}, l_q\right) \ge d^n\left(B_{p,r} \cap F_k, l_q\right).$$

由 Gel'fand 宽度的定义，存在 $l_q \cap F_k$ 的余维数为 n 的线性子空间 T^n，使得

$$d^n\left(B_{p,r} \cap F_k, l_q\right) = \sup_{x \in B_{p,r} \cap F_k \cap T^n} \|x\|_{l_q}.$$

令 $L^n = I_k T^n$，则 L^n 为 $l_q^{m_k}$ 中余维数为 n 的线性子空间，由 Gel'fand 宽度的定义及(1) (2)有

$$d^n\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \le \sup_{x \in B_p^{m_k} \cap L^n} \|x\|_{l_q^{m_k}} \ll 2^{kr} \sup_{x \in B_{p,r} \cap F_n \cap T^n} \|x\|_{l_q} = 2^{kr} d^n\left(B_{p,r}, l_q\right)$$

即

$$d^n\left(B_{p,r}, l_q\right) \gg 2^{-kr} d^n\left(V_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right).$$

定理 1 的证明

1. 定理 1 上界的证明：

令 $k' = [\log_2 n] + 1$。对 $k \in \mathbb{N}$，令

$$n_k = \begin{cases} m^k, & 1 \le k \le k' \\ \left[n 2^{k'-k}\right], & k > k' \end{cases}$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} n_k \le n$，由引理 3 及命题 2 知

$$
\begin{aligned}
d^n\left(B_{p,r}, l_q\right) &\ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-rk} d^{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) = \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk} d^{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \\
&\le \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk} m_k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \le \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk} 2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)k} = \sum_{k=k'} 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k} \\
&\ll 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'} \ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}
\end{aligned}
$$

2. 定理 1 下界的证明：

令 k' 与 k 为满足引理 4 的 k' 与 k，则由引理 4 和命题 1 知

$$
\begin{aligned}
d^n\left(B_{p,r}, l_q\right) &\gg 2^{-rk} d^{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \gg 2^{-rk'}\left(m_k, n\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \\
&\gg 2^{-rk}\left(2^{k-1}, 2^{k'}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gg 2^{-rk'} 2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)k'} \\
&= 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'} \gg n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}
\end{aligned}
$$

综上所述，定理 1 得证。

参考文献

[1] Pinkus, A. (1985) n-Widths in Approximation Theory. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1

[2] Schütt, C. (1984) Entropy Numbers of Diagonal Operators between Symmetric Banach Spaces. *Journal of Approximation Theory*, **40**, 121-128. https://doi.org/10.1016/0021-9045(84)90021-2

[3] Carl, B. (1980) Entropy Numbers of Diagonal Operators with an Application to Eigenvalue Problems. *Journal of Approximation Theory*, **32**, 135-150. https://doi.org/10.1016/0021-9045(81)90110-6

[4] Kühn, T. (2005) Entropy Numbers of General Diagonal Operators. *Revista Matamatica Complutense*, **18**, 479-491. https://doi.org/10.5209/rev_REMA.2005.v18.n2.16697

[5] Traub, J.F., Wasilkowski, G.W. and Wo_zniakowshi, H. (1998) Information Based Complexity. Academic Press, New York.