

Linear Arboricity of IC-Planar Graph Without 4-Cycles

Nan Jiang, Danjun Huang*

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: jn0922kjtt@163.com, *hdanjun@zjnu.cn

Received: Jul. 26th, 2020; accepted: Aug. 13th, 2020; published: Aug. 20th, 2020

Abstract

An edge-partition of a graph G is a decomposition of G into subgraphs G_1, G_2, \dots, G_m such that $E(G) = E(G_1) \cup \dots \cup E(G_m)$ and $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ for $i \neq j$. A linear forest is forest in which each connected component is a path. The linear arboricity $la(G)$ is the least integer m such that G can be edge-partitioned into m linear forests. In this paper, we use the discharging method to study the linear arboricity $la(G)$ of IC-planar graphs, and prove that $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$ for each IC-planar graph G with $\Delta(G) \geq 9$ and without 4-cycles, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G .

Keywords

IC-Planar Graphs, Edge Partition, Linear Arboricity

不含4-圈的IC-平面图的线性荫度

姜楠, 黄丹君*

浙江师范大学数学与计算机科学学院, 浙江 金华
Email: jn0922kjtt@163.com, *hdanjun@zjnu.cn

* 通讯作者。

摘要

图 G 的边分解是指将 G 分解成子图 G_1, G_2, \dots, G_m , 使得 $E(G) = E(G_1) \cup \dots \cup E(G_m)$, 且对任意 $i \neq j$, 有 $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$. 若一个森林的每个连通分支都是路, 则称该森林为线性森林. 图 G 的线性荫度 $la(G)$ 是指使得 G 可以边分解为 m 个线性森林的最小整数 m . 本文利用权转移方法证明了不含4-圈且 $\Delta(G) \geq 9$ 的IC-平面图 G 的线性荫度为 $\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$.

关键词

IC-平面图, 边分解, 线性荫度

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文只研究简单无向有限图. 给定图 G , 我们用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的点集和边集. 对任意 $v \in V(G)$, 用 $d_G(v)$ 表示点 v 的度数, $N_G(v)$ 表示点 v 的所有邻点组成的集合. 从而 $d_G(v) = |N_G(v)|$. 令 $\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的最大度, $\delta(G) = \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ 为图 G 的最小度. 图 G 的边分解是指将 G 分解成子图 G_1, G_2, \dots, G_m , 使得 $E(G) = E(G_1) \cup \dots \cup E(G_m)$, 且对任意 $i \neq j$, 有 $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$. 若一个森林的每个连通分支都是路, 则称该森林为线性森林. 图 G 的线性荫度 $la(G)$ 是指使得 G 可以边分解为 m 个线性森林的最小整数 m .

图的线性荫度是由Harary [1]在1970年提出. 显然, $la(G) \geq \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$. 1980年, Akiyama, Exoo和Harary [2]等猜测对于任意正则图 G , 都有 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$. 此猜想等价于下面的线性荫度猜想:

猜想1. 对于任意简单图 G , 有 $\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil \leq la(G) \leq \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil$.

1984年, Enomoto和Péroche [3]研究了一些正则图的线性荫度, 证明了所有5-正则图的线性荫度是3. Guldan [4]证明了10-正则图的线性荫度满足猜想1. 同时, 也有众多学者研究平面图的线性荫度. Wu和Wu分别在文献 [5]和 [6]证明了 $\Delta(G) \geq 9$ 和 $\Delta(G) = 7$ 的平面图 G 满足猜想1. 结合上述结果, 我们可以得到: 所有简单平面图满足猜想1. Wu, Hou和Liu [7]证明了若 G 是一

个 $\Delta(G) \geq 7$ 且没有 i -圈的平面图, $i = 4$ 或 5 , 则 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$. Chen和Qi [8]证明了 $\Delta(G) \geq 5$ 且没有相交4-圈和相交5-圈的平面图 G 满足 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$. 罗朝阳和孙林 [9]证明了 $\Delta(G) \geq 7$ 且每个6-圈至多含一条弦的平面图 G 满足 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$. 对于一些特殊平面图, 也有相关结果. Wu [10]证明了 $\Delta(G) \geq 3$ 的外平面图 G 满足 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$. Zhang, Liu和Wu [11]研究了1-平面图的结构, 并证明了 $\Delta(G) \geq 33$ 的1-平面图 G 满足 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$. Wang, Wu和Chen [12]证明了 $\Delta(G) \geq 9$ 的环面图 G 满足 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$. Wu, Hou和Sun [13]证明了 $\Delta(G) \geq 5$ 且不含4-圈的平面图 G 满足 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$. 本文讨论了不含4-圈且最大度 $\Delta(G) \geq 9$ 的IC-平面图 G 的线性荫度, 得到了下面定理.

定理1. 设 $M \geq 10$ 是一个正整数. 若图 G 是不含4-圈且最大度 $\Delta(G) \leq M$ 的IC-平面图, 则 $la(G) \leq \lceil \frac{M}{2} \rceil$.

推论1. 设图 G 是不含4-圈且最大度 $\Delta(G) \geq 9$ 的IC-平面图, 则 $la(G) = \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$.

我们先介绍一些相关定义和符号. 如果图 G 可以嵌入在平面内使得任意两条边只在端点处相交, 则称图 G 是平面图. 这样的嵌入称为平面嵌入, 该平面嵌入称为平面图. 如果图 G 可以嵌在平面上使得 G 中的所有边至多交叉一次并且所有点至多关联一条交叉边, 则称图 G 为IC-平面图. IC-平面图 G 按照上述条件的一种画法称为 G 的一种IC-平面嵌入, 此IC-平面嵌入称为IC-平面图. 对于IC-平面图 G , 本文总是假设 G 满足最优性, 即 G 已经被IC-平面嵌入在平面上并使得 G 中的交叉点的数目是最小的. 因此对于交叉于 z 点的两条边 x_1y_1 和 x_2y_2 , 它们的四个端点是两两不同的. 边 x_1y_1 也称为边 x_1zy_1 . 设 $C(G)$ 是 G 中所有交叉点的集合(注意交叉点并非是 G 中的顶点), $E_0(G)$ 是 G 中没有被交叉的边的集合. 定义IC-平面图 G 的关联平面图 G^\times : 使得 $V(G^\times) = V(G) \cup C(G)$, $E(G^\times) = E_0(G) \cup \{xz, yz \mid xy \in E(G) \setminus E_0(G)\}$, 其中 z 是位于 xy 上的交叉点. 于是 G 的交叉点成为了 G^\times 中的4-点. 称 $C(G)$ 中的点为假点, $V(G)$ 中的点为真点. 显然两个假点在 G^\times 中不相邻, 且真点至多与一个假点邻.

设 G^\times 是一个关联平面图. 用 $F(G^\times)$ 表示 G^\times 的面集合. 对于 $f \in F(G^\times)$, 称与 f 关联的边的数目为 f 的度, 记作 $d_{G^\times}(f)$, 其中每条割边记两次. 用 $b(f)$ 表示面 f 的周界. 若 u_1, u_2, \dots, u_k 是 $b(f)$ 上的所有点, 且在 $b(f)$ 上依序出现, 则记 $f = [u_1u_2 \cdots u_k]$. 如果面 f 至少与一个假点关联, 则称 f 为假面; 否则称 f 为真面. k -点, k^+ -点或 k^- -点分别表示 G^\times 中 degree 为 k , 度至少为 k , 或度至多为 k 的点. 同样的我们可以定义 k -面, k^+ -面或 k^- -面. 称 $d_{G^\times}(v) \leq 5$ 的真点为小点, 称 $d_{G^\times}(v) \geq 6$ 的点为大点. 称 $d_{G^\times}(f) \leq 4$ 的面为小面, 称 $d_{G^\times}(f) \geq 5$ 的面为大面. 对于 G^\times 中的一个真点 v , 我们用 $\alpha(v)$ 表示与 v 关联的假3-面的个数, 用 $f_i(v)$ 表示与 v 关联的 i -面的个数, 用 $n_i(v)$ 表示与点 v 相邻的 i -点的个数. 在 G^\times 中, 与小点关联的假3-面称为坏假3-面; 否则称为正常假3-面. 对于 G^\times 中的点 v , 用 $\alpha_a(v)$ 表示与 v 关联的坏假3-面的个数.

2. 主要结果及证明

设 G 是定理 1 的一个极小反例并使得 $|E(G)|$ 尽可能的小. 易得 G 连通且 $\delta(G) \geq 2$.

断言1. [11] 对于任意边 $uv \in E(G)$, 有 $d_G(u) + d_G(v) \geq 2\lceil \frac{M}{2} \rceil + 2$.

由断言 1 及 G^\times 中不存在相邻假点, 易得下面性质.

断言2. 每个面 f 至多与 $\lfloor \frac{d_{G^\times}(f)}{2} \rfloor$ 个小点关联.

断言3. 令 v 是 G^\times 中的一个真点.

- (1) 若 $d_{G^\times}(v) = 2$, 则 $\alpha(v) = 0$.
- (2) 若 $d_{G^\times}(v) = 3$, 则 $\alpha(v) \leq 1$; 且当 $\alpha(v) = 1$ 时, 有 $f_{5^+}(v) \geq 1$.
- (3) 若 $d_{G^\times}(v) \geq 4$, 则 $\alpha(v) \leq 2$; 且当 $\alpha(v) = 2$ 时, 有 $f_{5^+}(v) \geq 2$.
- (4) 若 $d_{G^\times}(v) = 4$ 或 5 , 则 $\alpha_a(v) \leq 2$; 否则 $\alpha_a(v) \leq 1$.

证明: (1) 设 $d_{G^\times}(v) = 2$. 用反证法, 假设 v 与假3-面 $f = [vxy]$ 关联, 其中 y 是假点. 则 y 是 G 中边 xz 和边 vu 的交叉点. 现在我们可以重新画边 xz , 使得 y 不是交叉点, 与假设 G 的交叉点个数最小矛盾. 因此, $\alpha(v) = 0$.

(2) 设 $d_{G^\times}(v) = 3$. 假设点 v 关联两个假3-面 $f_1 = [vv_1v_2]$ 和 $f_2 = [vv_2v_3]$. 由 v 至多与一个假点邻知 v_2 是假点. 从而 v_1v_3 是 G 的一条边. 现在我们重新画边 v_1v_3 , 使得 v_2 不是交叉点, 与假设 G 的交叉点个数最小矛盾. 因此, $\alpha(v) \leq 1$. 当 $\alpha(v) = 1$ 时, 令 $f = [vv_1v_2]$ 是与 v 关联的假3-面, v_2 是假点. 则 v_2 是边 v_1x 与边 vy 的交叉点. 令 f' 是以 vv_2 和 v_2x 为边界边的面. 由前面讨论知, $d_{G^\times}(f') \geq 4$. 若 $d_{G^\times}(f') = 4$, 即 $f' = [vv_2xv_3]$, 则 G 包含4-圈 vv_1xv_1v , 矛盾. 故 $d_{G^\times}(f') \geq 5$, 即 $f_{5^+}(v) \geq 1$.

(3) 设 $d_{G^\times}(v) = k \geq 4$. 令 v_1, v_2, \dots, v_k 是 v 在 G^\times 中的邻点, 且在平面上按顺时针方向排列. 由 v 至多与一个假点相邻知 $\alpha(v) \leq 2$. 当 $\alpha(v) = 2$ 时, 令 $f_1 = [vv_1v_2]$ 和 $f_2 = [vv_2v_3]$ 是与 v 关联的两个假3-面. 则 v_2 是假点且 $v_1v_3 \in E(G)$. 令 f_3 是以 vv_3 和 vv_4 为边界边的面, f_k 是以 vv_k 和 vv_1 为边界边的面. 由 G 不含4-圈知 $v_3v_4 \notin E(G)$. 若 $f_3 = [vv_3xv_4]$ 是个4-面, 则 v_4 与 y 是真点. 因此, vv_3yv_4v 是 G 中的一个4-圈, 矛盾. 故 $d_{G^\times}(f_3) \geq 5$. 同理, $d_{G^\times}(f_k) \geq 5$. 故 $f_{5^+}(v) \geq 2$.

(4) 由 G 是IC-平面图及断言1易得(4)成立. □

由断言1知每个真3-面与正常假3-面至少与两个大点关联. 又由断言3知大点 v 至多关联一个坏假3-面. 故下面性质成立.

断言4. 若 $v \in V(G^\times)$ 是个大点, 则 v 至多与 $d_{G^\times}(v) - f_3(v) + 1$ 个小点相邻.

断言5. [14] 令 $v \in V(G^\times)$, 则 $n_2(v) \leq 2$; 且当 $n_2(v) = 2$ 时, 有 $f_3(x) = 0$, 其中 x 是与 v 相邻的2-点.

断言6. 令 $v \in V(G^\times)$.

- (1) 若 $n_2(v) \leq 1$, 则 $f_3(v) \leq \lceil \frac{d_{G^\times}(v)}{2} \rceil$.
- (2) 若 $n_2(v) = 2$, 则 $f_3(v) \leq \lceil \frac{d_{G^\times}(v)-2}{2} \rceil$.

证明: (1) 当 $\alpha(v) = 0$ 时, 由 G 不含4-圈知 $f_3(v) \leq \lfloor \frac{d_{G^\times}(v)}{2} \rfloor$. 当 $\alpha(v) = 1$ 时, 由 G 不含4-圈知 $f_3(v) \leq 1 + \lceil \frac{d_{G^\times}(v)-2}{2} \rceil = \lceil \frac{d_{G^\times}(v)}{2} \rceil$. 当 $\alpha(v) = 2$ 时, 令 $f_1 = [vv_1v_2]$ 和 $f_2 = [vv_2v_3]$ 是与 v 关联的两个假3-面. 则由断言5(3)的证明过程知, f_3 与 f_k 是 5^+ -面, 其中 $k = d_{G^\times}(v)$, f_3 是以 vv_3 和 vv_4 为边界边的面且 f_k 是以 vv_k 和 vv_1 为边界边的面. 故 $f_3(v) \leq 2 + \lceil \frac{d_{G^\times}(v)-4}{2} \rceil = \lceil \frac{d_{G^\times}(v)}{2} \rceil$.

(2) 由断言3知与 v 相邻的2-点不与3-面关联. 当 $\alpha(v) = 0$ 时, 由 G 不含4-圈知 $f_3(v) \leq \lfloor \frac{d_{G^\times}(v)-3}{2} \rfloor$. 当 $\alpha(v) = 1$ 时, 由 G 不含4-圈知 $f_3(v) \leq 1 + \lceil \frac{d_{G^\times}(v)-4}{2} \rceil = \lceil \frac{d_{G^\times}(v)-2}{2} \rceil$. 当 $\alpha(v) = 2$ 时, 令 $f_1 = [vv_1v_2]$ 和 $f_2 = [vv_2v_3]$ 是与 v 关联的两个假3-面. 则由断言3(3)的证明过程知, f_3 与 f_k 是 5^+ -面, 其中 $k = d_{G^\times}(v)$, f_3 是以 vv_3 和 vv_4 为边界边的面且 f_k 是以 vv_k 和 vv_1 为边界边的面. 故 $f_3(v) \leq 2 +$

$$\lceil \frac{d_{G^\times}(v)-6}{2} \rceil = \lceil \frac{d_{G^\times}(v)-2}{2} \rceil. \quad \square$$

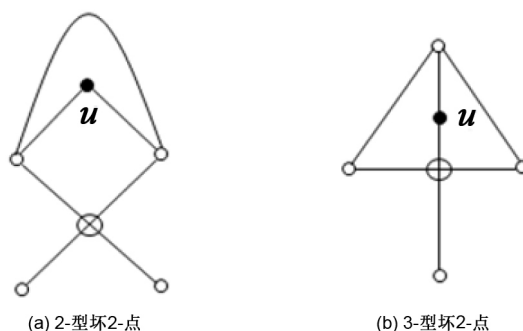


Figure 1. 2-type bad 2-vertex and 3-type bad 2-vertex

图 1. 2-型坏2-点与3-型坏2-点

为了方便结构的研究, 我们给出以下定义. 若2-点与假4-面或与3-面关联, 则称其为坏2-点; 否则称其为好2-点. 称恰好与一个假4-面或一个3-面关联的2-点为1-型坏2-点; 同时与一个假4-面及一个3-面关联的2-点为2-型坏2-点; 同时与两个假4-面关联的2-点为3-型坏2-点(如图 1所示). 称与2-型坏2-点关联的假4-面为2-型坏4-面. 若 v 是3-型坏2-点, 即 v 与坏4-面 $[uvw x]$ 和 $[uvw y]$ 关联且 w 是 vv' 与 xy 的交叉点, 则称 v 是 v' 的汇点, v' 是 v 的源点. 由定义易得下面断言成立.

断言7. v' 至多有一个汇点. 若 v' 有一个汇点, 则 $\alpha(v) = 0$ 且 $f_3(v) \leq \lceil \frac{d_{G^\times}(v)-2}{2} \rceil$.

由 G 是不含4-圈的IC-平面图, 容易得到下面断言成立.

断言8. 若 $f \in F(G^\times)$, 则 f 至多与 $\lfloor \frac{d_{G^\times}(f)}{3} \rfloor$ 个2-型坏4-面相邻.

断言9. 令 $f \in F(G^\times)$. 若 $d_{G^\times}(f) = 5$, 则 f 至多与一个坏2-点关联.

证明: 当 $d_{G^\times}(f) = 5$ 时, 由断言 2, f 至多与两个2-点关联. 令 $f = [v_1 v_2 v_3 v_4 v_5]$. 假设 f 与两个坏2-点关联, 不妨设坏2-点为 v_1 和 v_3 . 由 G 不含4-圈且2-点不与坏3-面关联知 v_1 和 v_j 都不与3-面关联. 故 v_1 和 v_j 都与坏4-面关联. 设 v_1 与坏4-面 f' 关联. 当 f 是真面时, $f' = [v_5 v_1 v_2 x]$ 且 x 是假点. 由 v_2 及 v_5 只与一个假点 x 邻知 v_3 不是坏点, 矛盾. 下设 f 是假面. 若 v_2 是假点, 即 v_2 是 $v_1 x$ 与 $v_3 y$ 的交叉点, 则 v_1 和 v_3 分别与坏4-面 $[v_5 v_1 v_2 y]$ 和 $[v_4 x v_2 v_3]$ 关联. 从而 G 含4-圈 $v_5 y v_3 v_4 v_5$, 矛盾. 故可设 v_2 是好点. 若 v_4 是坏点, 则 v_5 是好点且 v_5 只与一个假点 v_4 邻知 v_1 是好2-点, 矛盾. 因此, f 至多与一个坏2-点关联. \square

根据欧拉公式 $|V(G^\times)| - |E(G^\times)| + |F(G^\times)| = 0$ 和握手引理, 有

$$\sum_{v \in V(G^\times)} (d_{G^\times}(v) - 4) + \sum_{f \in F(G^\times)} (d_{G^\times}(f) - 4) = -8.$$

定义初始权值函数为: 当 $v \in V(G^\times)$ 时, 令 $ch(v) = d_{G^\times}(v) - 4$; 当 $f \in F(G^\times)$ 时, 令 $ch(f) = d_{G^\times}(f) - 4$. 接下来我们定义一些权转移规则. 令 $ch'(x)$ 是经过权转移之后元素 x 的新权, 这里 $x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)$. 注意到权转移方案不影响权值的总和. 接下来要证明对于任意 $x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)$,

有 $ch'(x) \geq 0$. 因此, 我们得到下面矛盾

$$0 \leq \sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch'(x) = \sum_{x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)} ch(x) = -8,$$

从而完成定理的证明.

定义如下的权转移规则:

(R1). 令 $f \in F(G^\times)$ 且 $d_{G^\times}(f) = 3$. 如果 f 是一个真3-面或正常假3-面, 则每个与 f 关联的大点转权 $\frac{1}{2}$ 给 f ; 如果 f 是一个坏假3-面, 则与 f 关联的大点转权 $\frac{2}{3}$ 给 f , 与 f 关联的小点转权 $\frac{1}{3}$ 给 f .

(R2). (2.1) 每个 5^+ -面转权 $\frac{1}{3}$ 给关联的4-点, 3-点或好2-点, $\frac{2}{3}$ 给关联的坏2-点.

(2.2) 每个 5^+ -面通过相邻的2-型坏4-面 f 转权 $\frac{1}{3}$ 给与 f 关联的2-型坏2-点.

(R3). 每个大点转权 $\frac{2}{3}$ 给相邻的2-点, 转权 $\frac{1}{3}$ 给相邻的3-点, 4-点.

(R4). M -点 v 转权 $\frac{2}{3}$ 给它的汇点.

我们通过下面两个引理证明 $ch'(x) \geq 0$, 其中 $x \in V(G^\times) \cup F(G^\times)$. 从而完成定理1的证明.

引理1. $ch'(f) \geq 0, \forall f \in F(G^\times)$.

证明 令 $f = [v_1 v_2 \cdots v_k]$. 设 $k = 3$. 则 $ch(f) = -1$. 如果 f 是一个真3-面或正常假3-面, 则由断言1知 f 至少与两个大点关联. 因此由(R1)得 $ch'(f) \geq -1 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$. 如果 f 是一个坏假3-面, 则 f 恰好与一个大点和一个小点关联. 由(R1)得 $ch'(f) \geq -1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$.

设 $k = 4$. 则 $ch'(f) = ch(f) = 0$.

设 $k = 5$. 则 $ch(f) = 1$. 若 f 不与2-型坏4-面相邻, 由断言2及断言9知 f 至多与两个小点关联且 f 至多与一个坏2-点关联. 根据(R2)得 $ch'(f) \geq 1 - \max\{\frac{1}{3} \times 2, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\} = 0$. 设 f 与2-型坏4-面相邻. 由断言8, f 至多与1个2-型坏4-面相邻. 令 f 与2-型坏4-面的公共边为 $v_1 v_2$ 且 v_2 是假点. 则由IC-平面图性质及断言1知 v_1 与 v_3 为真点, v_1 为 M -点, f 至多与两个小点邻且 v_1 和 v_3 在 G^\times 中仅与一个假点 v_2 邻. 故 v_4 与 v_5 都是真点. 由 G 不含4-圈知 $v_i v_j \notin E(G^\times)$, 这里 $i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ 且 $2 \leq |i - j| \leq 3$. 从而若 v_i 是2-点, 则 v_i 不是坏2-点, 其中 $i = 3, 4, 5$. 由(R2)得 $ch'(f) \geq ch(f) - \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{3} = 0$.

设 $k = 6$. 则 $ch(f) = 2$. 若 f 不与2-型坏4-面相邻, 则由断言1知 f 至多与3个小点邻. 因此由(R2)得 $ch'(f) \geq 2 - \frac{2}{3} \times 3 = 0$. 设 f 与2-型坏4-面相邻. 由断言8, f 至多与2个2-型坏4-面相邻. 令 f 与2-型坏4-面的公共边为 $v_1 v_2$ 且 v_2 是假点. 则由IC-平面图性质及断言1知 v_1 与 v_3 为真点, v_1 为 M -点且 f 至多与两个小点邻. 因此由(R2)得 $ch'(f) \geq 2 - \frac{2}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 = 0$.

设 $k \geq 7$. 则由断言2与断言8知, f 至多与 $\lfloor \frac{d_{G^\times}(f)}{2} \rfloor$ 个小点邻且 f 至多与 $\lfloor \frac{d_{G^\times}(f)}{3} \rfloor$ 个2-型坏4-面相邻. 因此由(R2)得 $ch'(f) \geq k - 4 - \frac{2}{3} \times \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \frac{1}{3} \times \lfloor \frac{k}{3} \rfloor \geq 0$. \square

引理2. $ch'(v) \geq 0, \forall v \in V(G^\times)$.

证明 设 $d_{G^\times}(v) = 2$. 则 $ch(v) = -2$ 且由断言3知 $\alpha(v) = 0$. 如果 v 是好2-点, 则 v 与两个 5^+ -面关联. 由(R2)-(R3)得 $ch'(v) \geq -2 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 2 = 0$. 下设 v 是坏2-点, 即 v 与3-面或坏4-面关联. 如果 v 是1型坏2-点, 则 v 与一个 5^+ -面关联. 因此由(R2)-(R3)得 $ch'(v) \geq -2 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{3} = 0$. 如果 v 是2型坏2-点, 则 v 与3-面 $[vv_1 v_2]$ 及2-型假4-面 $[vv_1 x v_2]$ 关联. 则 x 是 $v_1 x_1$ 与 $v_2 x_2$ 的交叉点. 令 f 是与 $v_2 x$ 关联的

面且 f 不同于 $[vv_1xv_2]$. 则可证 f 是 5^+ -面. 事实上, 令 $f = [v_2xx_1y_1y_2 \dots y_s]$. 则 v_2, x_1, y_1 和 y_s 是真点. 若 f 是3-面, 即 $s = 0$ 且 $v_2x_1 \in E(G^\times)$, 则 G 含4-圈 $v_2vv_1x_1v_2$, 矛盾. 若 f 是3-面, 即 $s = 1$, 则 G 含4-圈 $v_2v_1x_1y_1v_2$, 矛盾. 故 f 是 5^+ -面. 同理可证与 v_1x 关联且不同于 $[vv_1xv_2]$ 的面 f' 是 5^+ -面. 由(R2)得 f 与 f' 转权 $\frac{1}{3}$ 给 v . 由(R3)得 $ch'(v) \geq -2 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 2 = 0$. 如果 v 是3型坏2-点, 则 v 有一个源点. 由(R3)与(R4)得 $ch'(v) \geq -2 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{3} = 0$.

设 $d_{G^\times}(v) = 3$. 则 $ch(v) = -1$ 且由断言 3知 $\alpha(v) \leq 1$. 注意到由(R1), v 只给坏假3-面转权. 当 $\alpha(v) = 0$ 时, 由(R3)得 $ch'(v) \geq -1 + \frac{1}{3} \times 3 = 0$. 当 $\alpha(v) = 1$ 时, 由断言 5知 $f_{5^+}(v) \geq 1$. 由(R1), (R2)和(R3)得 $ch'(v) \geq -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} = 0$.

设 $d_{G^\times}(v) = 4$. 则 $ch(v) = 0$ 且由断言 3知 $\alpha(v) \leq 2$. 注意到由(R1), v 只给坏假3-面转权. 由(R1)和(R3)得 $ch'(v) \geq \frac{1}{3} \times 4 - \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$.

设 $d_{G^\times}(v) = 5$. 则 $ch(v) = 1$ 且由断言 3知 $\alpha(v) \leq 2$. 注意到由(R1), v 只给坏假3-面转权. 因此由(R1)得 $ch'(v) \geq 1 - \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{3}$.

设 $6 \leq d_{G^\times}(v) \leq M - 4$. 由断言 1知 v 不与小点邻. 故由(R1)知 v 转权 $\frac{1}{2}$ 给关联3-面. 由断言 6知 $f_3(v) \leq \lceil \frac{d_{G^\times}(v)}{2} \rceil \leq \frac{d_{G^\times}(v)+1}{2}$. 由(R1)与(R3)得 $ch'(v) \geq ch(v) - \frac{1}{2} \times f_3(v) \geq d_{G^\times}(v) - 4 - \frac{1}{2} \times \frac{d_{G^\times}(v)+1}{2} > 0$.

设 $d_{G^\times}(v) = M - 3 \geq 7$. 由断言 1知 v 不与4-点邻. 由断言 6知 $f_3(v) \leq \lceil \frac{d_{G^\times}(v)}{2} \rceil \leq \frac{d_{G^\times}(v)+1}{2}$. 由断言 3知 $\alpha_a(v) \leq 1$. 由(R1)与(R3)得 $ch'(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times (f_3(v) - 1) = d_{G^\times}(v) - 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times (\frac{d_{G^\times}(v)+1}{2} - 1) > 0$.

设 $d_{G^\times}(v) = M - 2 \geq 8$ 或 $d_{G^\times}(v) = M - 1 \geq 9$. 由断言 1知 v 不与2-点邻. 由断言 6知 $f_3(v) \leq \lceil \frac{d_{G^\times}(v)}{2} \rceil \leq \frac{d_{G^\times}(v)+1}{2}$. 由断言 3知 $\alpha_a(v) \leq 1$. 由断言 4知 v 至多与 $d_{G^\times}(v) - f_3(v) + 1$ 个4-点或3-点邻. 由(R1)与(R3)得 $ch'(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times (f_3(v) - 1) - \frac{1}{3} \times (d_{G^\times}(v) - f_3(v) + 1) = d_{G^\times}(v) - 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times (\frac{d_{G^\times}(v)+1}{2} - 1) - \frac{1}{3} \times (d_{G^\times}(v) - \frac{d_{G^\times}(v)+1}{2} + 1) > 0$.

设 $d_{G^\times}(v) = M \geq 10$. 由断言 5知 $n_2(v) \leq 2$. 由断言 6知 $f_3(v) \leq \lceil \frac{d_{G^\times}(v)}{2} \rceil \leq \frac{d_{G^\times}(v)+1}{2}$. 由断言 7知 v 至多有一个汇点, 且当 v 有一个汇点时, $\alpha(v) = 0$. 当 v 有一个汇点时, 由(R1), (R3)和(R4)得 $ch'(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times n_2(v) - \frac{1}{2} \times f_3(v) - \frac{1}{3} \times (d_{G^\times}(v) - f_3(v) + 1 - n_2(v)) = \frac{2}{3} \times d_{G^\times}(v) - 5 - \frac{1}{6} \times f_3(v) - \frac{1}{3} \times n_2(v) \geq \frac{2}{3} \times d_{G^\times}(v) - \frac{17}{3} - \frac{1}{6} \times \frac{d_{G^\times}(v)+1}{2} > 0$. 当 v 没有汇点时, 由断言 3知 $\alpha_a(v) \leq 1$. 故由(R1)(R3)得 $ch'(v) \geq ch(v) - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \times (f_3(v) - 1) - \frac{1}{3} \times (d_{G^\times}(v) - f_3(v) + 1 - n_2(v)) - \frac{2}{3} \times n_2(v) = \frac{2}{3} \times d_{G^\times}(v) - \frac{9}{2} - \frac{1}{6} \times f_3(v) - \frac{1}{3} \times n_2(v) \geq \frac{2}{3} \times d_{G^\times}(v) - \frac{31}{6} - \frac{1}{6} \times \frac{d_{G^\times}(v)+1}{2} > 0$. \square

基金项目

浙江省自然科学基金项目(No. LY18A010014).

参考文献

- [1] Harary, F. (1970) Covering and Packing in Graphs I. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **175**, 198-215.
- [2] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F. (1980) Covering and Packing in Graphs III: Cyclic and Acyclic Invariants. *Mathematica Slovaca*, **30**, 405-417.
- [3] Enomoto, H. and Péroche, B. (1984) The Linear Arboricity of Some Regular Graphs. *Journal of Graph Theory*, **8**, 309-324. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190080211>
- [4] Guldan, F. (1986) The Linear Arboricity of 10-Regular Graphs. *Mathematica Slovaca*, **36**, 225-228.
- [5] Wu, J.L. and Wu, Y.W. (1999) On the Linear Arboricity of Planar Graphs. *Journal of Graph Theory*, **31**, 129-134.
- [6] Wu, J.L. and Wu, Y.W. (2008) The Linear Arboricity of Planar Graphs of Maximum Degree Seven Is Four. *Journal of Graph Theory*, **58**, 210-220. <https://doi.org/10.1002/jgt.20305>
- [7] Wu, J.L., Hou, J.F. and Liu, G.Z. (2007) The Linear Arboricity of Planar Graphs with No Short Cycles. *Progress in Theoretical Computer Science*, **381**, 230-233. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2007.05.003>
- [8] Chen, H.Y. and Qi, J.M. (2012) The Linear Arboricity of Planar Graphs with Maximum Degree at Least 5. *Information Processing Letters*, **112**, 767-771. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2012.06.007>
- [9] Luo, C.Y. and Sun, L. (2019) The Linear Arboricity of Planar Graphs with 6-Cycles Containing at Most One Chord. *Operations Research Transactions*, **23**, 113-119.
- [10] Wu, J.L. (2000) On the Linear Arboricity of Series-Parallel Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **16**, 367-372. <https://doi.org/10.1007/s373-000-8299-9>
- [11] Zhang, X., Liu, G.Z. and Wu, J.L. (2011) On the Linear Arboricity of 1-Planar Graphs. *Operations Research Transactions*, **15**, 38-44.
- [12] Wang, H.X., Wu, J.L. and Chen, H.Y. (2014) On the Linear Arboricity of Graphs Embeddable in Surfaces. *Information Processing Letters*, **114**, 475-479. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2014.03.013>
- [13] Wu, J.L., Hou, J.F. and Sun, X.Y. (2009) A Note on the Linear Arboricity of Planar Graphs without 4-Cycles. *The Eighth International Symposium on Operations Research and Its Applications*, Zhangjiajie, 20-22 September 2009, 174-178.
- [14] Wu, J.L. (2008) The Linear Arboricity of Graphs on Surfaces of Negative Euler Characteristic. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **23**, 54-58. <https://doi.org/10.1137/S0895480101394690>