Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(8), 1309-1312**
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.98153

Hans汉斯

On the Upper Bound of Modular Chromatic Number of Graphs

Chao Yang

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong
Email: yangchao@gdufs.edu.cn

Received: Jul. 29th, 2020; accepted: Aug. 14th, 2020; published: Aug. 21st, 2020

Abstract

The modular coloring of a graph is induced by the weights of neighboring vertices. It is a generalization of the classic graph coloring. In this paper, we obtain a general upper bound for the modular chromatic number of graphs by using the Lovasz Local Lemma. Our result improves previous exponential bound significantly.

Keywords

Modular Coloring, Probabilistic Method, Lovasz Local Lemma

关于图的模染色数的上界

杨　超

广东外语外贸大学，数学与统计学院，广东　广州
Email: yangchao@gdufs.edu.cn

收稿日期：2020年7月29日；录用日期：2020年8月14日；发布日期：2020年8月21日

摘　要

图的模染色是由邻点赋权导出的一种染色，是图的经典染色的一种推广。本文主要运用概率方法中的Lovasz局部引理，较大幅度地改进了关于图的模染色数的上界。

关键词

模染色数，概率方法，Lovasz局部引理

文章引用: 杨超. 关于图的模染色数的上界[J]. 应用数学进展, 2020, 9(8): 1309-1312.
DOI: 10.12677/aam.2020.98153

1. 引言

本文考虑的图都是指简单无向图，常用的图论术语和记号我们都依照文献[1]。近年来，由图的邻点或邻边的标号导出的染色成为了图论中的一个研究热点。其中一种称为 k 边权点染色的定义如下。设图 G 的顶点集和边集分别记为 $V(G)$和 $E(G)$，边集上有一个权函数 $\omega: E(G) \to \{1,2,\cdots,k\}$。由 ω 导出的顶点染色

$$\omega(x) = \sum_{y\in N(x)} \omega(xy)$$

若满足对任意的一条边 xy，都有 $\omega(x) \neq \omega(y)$，则称 ω 为图 G 的一个 k 边权点染色。关于 k 边权点染色，Karonski，Luczak 和 Thomason 提出了以下著名猜想[2]。

猜想 (1-2-3 猜想)。除了 K_2 的所有连通图 G 都存在一个 3 边权点染色。

关于 1-2-3 猜想，目前最好的部分结果是除了 K_2 以外的连通图都存在一个 5 边权点染色[3]。受到 1-2-3 猜想的启发，各种不同的由邻点或邻边所导出的染色也被许多研究者提出和研究。综述文章[4]对此有非常详尽的介绍。比如，幸运标号[5] [6]就是对 1-2-3 猜想中的边权点染色的一种自然推广，可视为点权点染色，即由邻点的赋权之和导出的染色。

本文将研究由 Okamoto，Salehi 和 Zhang 提出的一种染色[7]，称为模染色，是在幸运标号的概念的基础上再加上模运算得到的一种新的染色，其定义如下。设 $c: V(G) \to \boldsymbol{Z}_k$ 是图 G 的顶点集上的一个权函数，令

$$\sigma(x) = \sum_{z\in N(x)} c(z).$$

注意到上式的求和运算是在模 k 整数群 $\boldsymbol{Z}_k$ 中进行的。如果 σ 是一个恰当的染色，则 c 称为图 G 的一个模 k 染色。图 G 的模 k 染色数定义为最小的正整数 k，使得存在图 G 上的一个模 k 染色，记作 $\chi_m(G)$。在文章[7]中，Zhang 等人证明了对于无孤立点的图，其模染色数一定存在。并且，他们还给出了模染色数的如下两个上界。

定理 1 ([7])。设 n 阶图 G 的最大度为 Δ，则

$$\chi_m(G) \le 2^n - 2^{n-\Delta}.$$

定理 2 ([7])。设 n 阶图 G 的染色数为 χ，最大度为 Δ，则

$$\chi_m(G) \le \Delta(\Delta+1)^{\chi+1} + 1.$$

上述两个上界关于图的阶数 n 都是指数关系，相信离最好的上界还有很大的距离。然后，根据 Zhang 的最新专著[8]，自从模染色数的概念在 2010 年提出以来，未见有人得到更好的上界。

本文的主要目的是改进这个上界。我们采用的是一种概率的方法，运用 Lovasz 局部引理。关于 Lovasz 局部引理，可参见文献[9]。Lovasz 局部引理是证明某些组合结构的存在性的一种方法。以下我们记 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率。

引理 1 (Lovasz 局部引理[9])。设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是某概率空间中的事件。又假设对每个 A_i，除了最多 d 个

事件外，A_i 与其它所有事件 A_j 都相互独立。并且 $P(A_i)\le p\ (1\le i\le n)$。设 e 为自然对数的底，如果 $ep(d+1)<1$，则有

$$P\left(\wedge_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)>0.$$

运用 Lovasz 局部引理，我们将证明如下结论。

定理 3. 设 n 阶图 G 的最大度为 Δ，则

$$\chi_m(G)\le\left[e\left(1+2(\Delta-1)+2(\Delta-1)^2+2(\Delta-1)^3\right)\right]+1.$$

从上面的结论可见，我们的上界是关于 Δ 的一个 3 次多项式，这大幅度改进了原来的指数上界。

本文第 2 部分将给出定理 3 的证明，第 3 部分对进一步的研究提出了一些想法。

2. 模染色数的一般上界

固定一个整数 k，我们令 $c:V(G)\to\boldsymbol{Z}_k$ 表示一个随机的顶点权函数，每个点的权值的选取是独立的，且是均匀的。即对每个顶点 v，和对 $1\le i\le k$，都有 $P(c(v)=i)=1/k$。对每条边 xy，我们定义坏事件 $A_{xy}=\{\sigma(x)=\sigma(y)\}$。由此定义，图 G 的模 k 染色的存在性等价于存在某个顶点的权函数，使得对所有的边，其相应的坏事件都没有发生。

为了证明我们的主要结果，还需要下面两个引理。

引理 2. 设 $c:V(G)\to\boldsymbol{Z}_k$ 为一个随机的顶点权函数，又 xy 是图 G 的任意一条边，则

$$P(A_{xy})=\frac{1}{k}.$$

证明：事件 A_{xy} 仅依赖于顶点 x，y 以及它们的邻点集，即仅依赖于 $S=\{x,y\}\cup N(x)\cup N(y)$。我们考虑在对顶点集合 S 赋权时，分为如下两步。第一步，先对 $S\backslash\{y\}$ 上的点赋权。此步之后，$\sigma(y)$ 的值就已经定下来了，因为其邻点均已经赋权。而 $\sigma(x)$ 的值尚未确定，因为 x 还有最后一个邻点 y 尚未赋权。第二步，对 y 赋权。不管第一步的赋权情况如何，在第二步中，y 总是有且仅有一种赋权方法使得 $\sigma(x)=\sigma(y)$。由于前面我们定义 y 的赋权取值是一个均匀分布，所以 $P(A_{xy})=1/k$。 □

引理 3. 设图 G 的最大度为 Δ，又设 $\{A_{xy}\mid xy\in E(G)\}$ 为图 G 中关于每条边的坏事件的全体之集。则每个事件 A_{xy} 在除了最多 $d=2(\Delta-1)+2(\Delta-1)^2+2(\Delta-1)^3$ 个事件以外，和其它坏事件相互独立。

证明：给定一条边 xy，考虑另外一条边 $x'y'$。如果边 xy 与 $x'y'$ 的距离大于 2，则由定义有事件 A_{xy} 和 $A_{x'y'}$ 是独立的。所以我们只需要计算到 xy 的距离小于或等于 2 的边的数目。从顶点 x 看，最多有 $\Delta-1$ 条边距离为 0，最多有 $(\Delta-1)^2$ 条边距离为 1，最多有 $(\Delta-1)^2$ 条边距离为 2。从顶点 y 看，也一样。所以，总共最多有 $d=2(\Delta-1)+2(\Delta-1)^2+2(\Delta-1)^3$ 条边与 xy 的距离小于或等于 2。因此，除了最多这 d 条边所对应的事件，A_{xy} 与其它所有事件相互独立。 □

Lovasz 局部引理给出了某一系列坏事件都不发生的概率为正的一个充分条件。为了应用 Lovasz 局部引理，我们在引理 2 中对每个坏事件发生的概率 p 给出了精确的计算，在引理 3 中则对相互独立的坏事件的例外事件的数目 d 给出了一个估计。有了这两个引理的准备，下面我们可以证明定理 3。

定理 3 的证明：令 $k=\left[e\left(1+2(\Delta-1)+2(\Delta-1)^2+2(\Delta-1)^3\right)\right]+1$。则只需证明图 G 存在一个模 k 染色。考虑顶点集上的一个随机权函数，要证明图 G 上存在一个模 k 染色，我们又只需证所有坏事件 A_{xy} 都不发生的概率是正的，即只需证下式

$$P\left(\bigwedge_{xy\in E(G)}\overline{A}_{xy}\right)>0.$$

由引理 2，对每条边 xy，相应的坏事件 A_{xy} 发生的概率都为常数 $p=1/k$ 。

再由引理 3，

$$ep(d+1)=e\cdot\frac{1}{k}\left(1+2(\Delta-1)+2(\Delta-1)^2+2(\Delta-1)^3\right)<1.$$

由引理 1 (Lovasz 局部引理)，所有坏事件 A_{xy} 都不发生的概率是正的。 □

3. 结语

本文运用 Lovasz 局部引理，大幅度改进了关于模染色数的上界，可见概率方法的威力。但这个证明不是构造性的，因此如何给出一个确定性的模染色算法，使得 k 比较小，仍然值得研究。我们得到的是一个 $O(n^3)$的上界，这个上界是否可以继续改进到 $O(n^2)$甚至 $O(n)$，有待进一步的研究。此外，我们很自然会问一个问题：若图 G 存在一个模 k 染色，则对 $l>k$，图 G 是否也有一个模 l 染色？这个问题从模染色的定义上看，并不容易回答。由我们的主要结果和证明方法，我们可以得到一个推论，对每个图 G，都存在一个自然数 $k_0(G)$，使得当 $k\ge k_0$ 时，图 G 都存在一个模 k 染色。

致　谢

感谢匿名审稿人对本文初稿提出的宝贵意见。

基金项目

国家自然科学基金青年科学基金项目(11201496)，广东外语外贸大学引进人才科研启动项目(299-X5219228)，广东外语外贸大学横向项目(297-ZW200011)。

参考文献

[1] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 第 4 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2019.

[2] Karonski, M., Łuczak, T. and Thomason, A. (2004) Edge Weights and Vertex Colours. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **91**, 151-157. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2003.12.001

[3] Kalkowski, M., Karonski, M. and Pfender, F. (2010) Vertex-Coloring Edge-Weightings: Towards the 1-2-3-Conjecture. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **100**, 347-349. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2009.06.002

[4] Seamone, B. (2012) The 1-2-3 Conjecture and Related Problems: A Survey.

[5] Czerwiski, S., Grytczuk, J. and Zelazny, W. (2009) Lucky Labelings of Graphs. *Information Processing Letters*, **109**, 1078-1081. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2009.05.011

[6] Ahadi, A., Dehghan, A., Kazemi, M. and Mollaahmadi, E. (2012) Computation of Lucky Number of Planar Graphs Is NP-Hard. *Information Processing Letters*, **112**, 109-112. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2011.11.002

[7] Okamoto, F., Salehi, E. and Zhang, P. (2010) A Checkerboard Problem and Modular Coloring of Graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, **58**, 29-47.

[8] Zhang, P. (2016) A Kaleidoscopic View of Graph Colorings. Springer International Publishing, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30518-9

[9] Alon, N. and Spencer, J.H. (2000) The Probabilistic Method. 2nd Edition, Wiley-Interscience, New York. https://doi.org/10.1002/0471722154