Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(8), 1327-1330
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.98156

Hans汉斯

An Explanation of the Method of Variation of Constant

Jie Liu, Shaowen Yao*, Zhibo Cheng

School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan
Email: *yaoshaowen@hpu.edu.cn

Received: Aug. 1st, 2020; accepted: Aug. 19th, 2020; published: Aug. 26th, 2020

Abstract

Variation of constants is an effective method of solving inhomogeneous linear differential equations. By introducing adjoint equation of linear homogeneous equations, we give it a reasonable mathematical explanation. For a first order linear differential equation, we also give a brief explanation which can be used in the teaching of higher mathematics.

Keywords

Variation of Constants, Fundamental Matrix Solution, Adjoint Equation

关于常数变易法的一个解释

刘　杰，姚绍文*，程志波

河南理工大学，数学与信息科学学院，河南　焦作
Email: *yaoshaowen@hpu.edu.cn

收稿日期：2020年8月1日；录用日期：2020年8月19日；发布日期：2020年8月26日

摘　要

常数变易法是求解线性非齐次方程(组)的一种重要方法，通过引入线性齐次方程组的伴随方程，我们给出了常数变易法一个较为合理的数学解释。另外对于一阶线性方程，我们还给出了一种适合高等数学教学的解释。

关键词

常数变易法，基本解矩阵，伴随方程

*通讯作者。

文章引用: 刘杰, 姚绍文, 程志波. 关于常数变易法的一个解释[J]. 应用数学进展, 2020, 9(8): 1327-1330.
DOI: 10.12677/aam.2020.98156

1. 常数变易法简介

考虑如下一阶线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t), \tag{1}$$

其中，$A(t)$ 为 $n\times n$ 阶矩阵。若 $f(t)=0$，则方程组变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x, \tag{2}$$

称为齐次线性方程组。假设方程组(1)的基本解矩阵为 $X(t)$，则线性齐次方程组(2)的通解为 $x(t)=X(t)c$，c 为任意 n 维列向量。求相应非齐次方程组(1)的特解，我们使用常数变易法，即假设方程组(1)的特解形式为 $x(t)=X(t)c(t)$，其中 $c(t)$ 为待定的向量值函数，将其带入方程组(1)得到一个关于 $c(t)$ 的一阶线性齐次微分方程组，解出 $c(t)$ 即可。

作为求解线性非齐次方程(组)的一种重要方法，据文献[1]，常数变易法可追溯至 Newton 的《自然哲学之数学原理》；1697 年 John Bernoulli 将这种方法应用于特殊的非齐次方程的求解；1739 年 Euler 用常数变易法研究了一类特殊的二阶非齐次微分方程；后来著名数学家 Lagrange 在 1774~1808 年期间充分发展了常数变易法。《常微分方程》教材在叙述一阶线性非齐次方程的求解过程时，使用的方法有积分因子法(例如文献[2])，常数变易法(例如文献[3] [4] [5])等，然而在求解一阶线性非齐次方程组时均使用常数变易法(例如文献[2] [3] [4] [5])。然而以上教材仅给出了这样做的结果，并无探讨过程。在《常微分方程》教学过程中，难免会有学生提出疑问(当然在《高等数学》教学过程中也会遇到同样的问题)。往往我们只能惊叹于前人丰富的数学想象力。笔者在翻阅文献[6]时注意到了一些结论，这些结论将有助于给常数变易法一个较为合理的数学解释。

2. 伴随方程

我们首先引入一阶线性齐次方程组伴随方程的概念。

引理[6] 若 $X(t)$ 为齐次方程组(2)的基本解矩阵，则矩阵 $X^{-1}(t)$ 是伴随方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-yA(t), \tag{3}$$

的基本解矩阵。

证明：令 $Y(t)=X^{-1}(t)$。由 $Y(t)X(t)=I$ (单位方阵)可知

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}X(t)+Y(t)A(t)X(t)=0。$$

由于 $X(t)$ 非奇异，故

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}=-Y(t)A(t),$$

即 $Y(t)=X^{-1}(t)$ 是伴随方程(3)的矩阵解，$Y(t)$ 的非奇异性易得。

[证毕]

利用伴随方程的结论我们可以得到如下恒等式。

定理[6] 若 $X(t)$ 为齐次方程组(2)的基本解矩阵，$x(t)$ 为齐次方程组(1)的解，则齐次方程组(1)等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[X^{-1}(t)x(t)\right]=X^{-1}(t)f(t)\text{。} \tag{4}$$

证明：由引理知，$X^{-1}(t)$ 是伴随方程的基本解矩阵，即满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^{-1}(t)=-X^{-1}(t)A(t)\text{，}$$

两边乘以非齐次方程组(1)的任意解 $x(t)$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^{-1}(t)\cdot x(t)=-X^{-1}(t)A(t)x(t)=-X^{-1}(t)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)-f(t)\right],$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^{-1}(t)x(t)+X^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=X^{-1}(t)f(t),$$

于是我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[X^{-1}(t)x(t)\right]=X^{-1}(t)f(t)\text{。}$$

[证毕]

3. 常数变易法的原理

当 $f(t)=0$ 时，齐次方程组(2)的解 $x(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[X^{-1}(t)x(t)\right]=0\text{，}$$

得到 $X^{-1}(t)x(t)=c$，即 $x(t)=X(t)c$。

当 $f(t)\neq 0$ 时，非齐次方程(1)的解 $x(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[X^{-1}(t)x(t)\right]=X^{-1}(t)f(t)\triangleq C(t)\text{，}$$

得到 $X^{-1}(t)x(t)=c(t)$，即 $x(t)=X(t)c(t)$，其中 $c(t)$ 为 $C(t)$ 的一个原函数。

由上述结论我们看出为了构造非齐次方程组的特解只需将齐次方程通解中的常数向量 c 变为待定的向量值函数 $c(t)$ 即可。这应该就是常数变易法的一个比较合理的数学解释。

利用定理中的结论，我们还可以直接得到非齐次方程特解的常数变易公式。事实上，对(4)式从 t_0 到 t 进行积分可得

$$X^{-1}(t)x(t)-X^{-1}(t_0)x(t_0)=\int_{t_0}^{t}X^{-1}(s)x(s)\mathrm{d}s\text{，}$$

即

$$x(t)=X(t)\left[X^{-1}(t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}X^{-1}(s)x(s)\mathrm{d}s\right]\text{。}$$

4. 一阶线性方程

对于一阶线性方程组的特殊形式，一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p(t)x+q(x)$，考虑其相应的齐次方程

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p(t)x$，利用分离变量法容易得到它的通解 $x(t)=cu(t)$，事实上 $u(t)=\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}$。显然在 $u(t)$ 的定义域内满足 $u(t)\neq 0$，因此 $\frac{1}{u(t)}$ 有意义。

考虑到《高等数学》课程的教学过程中一般不引入线性微分方程组的相关概念，因此我们可以这样解释一阶线性方程的常数变易法。

注意 $u(t)\cdot\frac{1}{u(t)}=1$，两边关于 t 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\cdot\frac{1}{u(t)}+u(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u(t)}=0$$

注意到 $u(t)$ 满足齐次方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p(t)x$，代入上式可得并整理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u(t)}=-\frac{p(t)}{u(t)}$$

上式两端乘以非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p(t)x+q(x)$ 的任意解 $x(t)$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{u(t)}\cdot x(t)=-\frac{p(t)x(t)}{u(t)}=-\frac{1}{u(t)}\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-q(t)\right]$$

整理之后可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{u(t)}x(t)\right]=\frac{q(x)}{u(t)}\triangleq C(t)$$

可得 $\frac{1}{u(t)}x(t)=c(t)$，即 $x(t)=c(t)u(t)$，其中 $c(t)$ 为 $C(t)$ 的一个原函数。这样我们就解释清楚了，在构造非齐次方程组的特解时，为什么只需将齐次方程通解中的常数 c 变易为函数 $c(t)$ 即可。

致　谢

作者感谢审稿人提出的宝贵意见。

基金项目

本文得到河南省教育厅高等学校重点科研项目：19A110018，河南省研究生教育改革和质量提升工程：HNYJS2017KC09，河南省高校基本科研业务费专项：NSFRF180320，河南理工大学博士基金(理工类)：B2016-58，河南理工大学教育教学改革研究与实践项目：2019JG044 的支持。

参考文献

[1] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想(第二册) [M]. 上海: 上海科技出版社, 2002.
[2] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程(第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[3] 楼红卫, 林伟. 常微分方程[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2007.
[4] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 王寿松. 常微分方程(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
[5] 张伟年, 杜正东, 徐冰. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[6] Hale, J.K. (1980) Ordinary Differential Equations. Second Edition, Wiley Interscience, New York.