Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(9), 1394-1403
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.99165

复流形上的Weitzenböck公式及Gårding不等式

黄　晴，杨秋花，卢卫君

广西民族大学数学与物理学院，广西　南宁
Email: 1258561801@qq.com

收稿日期：2020年8月16日；录用日期：2020年9月2日；发布日期：2020年9月9日

摘　要

本文主要研究了紧致光滑流形上的向量从E值p形式的Weitzenböck公式、复流形上的$\bar{\partial}$-Laplace算子的Weitzenböck恒等式及其应用。先证明Gårding不等式，然后证明了整体理论的Hodge定理。

关键词

Weitzenböck公式，Bochner公式，Gårding不等式，Hodge定理

The Weitzenböck Formula and Gårding Inequality on Complex Manifolds

Qing Huang, Qiuhua Yang, Weijun Lu

College of Mathematics and Physics, Guangxi University for Nationalities, Nanning Guangxi
Email: 1258561801@qq.com

Received: Aug. 16th, 2020; accepted: Sep. 2nd, 2020; published: Sep. 9th, 2020

Abstract

This paper mainly investigates the Weitzenböck formula for vector bundle E-valued on compact smooth manifolds and Weitzenböck identity of $\bar{\partial}$-Laplace operator and its applications on complex manifolds. After proving Gårding inequality, we prove the Hodge theorem with global theory.

Keywords

Weitzenböck Formula, Bochner Formula, Gårding Inequality, Hodge Theorem

文章引用: 黄晴, 杨秋花, 卢卫君. 复流形上的 Weitzenböck 公式及 Gårding 不等式[J]. 应用数学进展, 2020, 9(9): 1394-1403. DOI: 10.12677/aam.2020.99165

1. 引言

Weitzenböck 公式在研究黎曼流形上曲率对调和形式的影响起了很大的作用，本文主要研究它在 Bochner 公式以及 Gårding 不等式证明上的应用。Gårding 不等式说明了 Dirichlet 范数等价于 $\mathscr{H}_1^{p,q}(M)$ 上的 Sobolev 1-范数，它可以证明 Hodge 定理。本文首先证明了紧致光滑流形上的向量丛 E 值 p 形式的 Weitzenböck 公式、复流形上的 $\overline{\partial}$-Laplace 算子的 Weitzenböck 恒等式，在实现了它们在 Gårding 不等式上的应用后，证明了整体理论的 Hodge 定理。

2. 相关知识

定义 2.1 [1] (外微分算子)定义向量丛值微分形式上的外微分算子 $d:\Gamma\left(\Lambda^p T^*M\otimes E\right)\to\Gamma\left(\Lambda^{p+1}T^*M\otimes E\right)$ 如下：对任意 $\omega\in\Gamma\left(\Lambda^p T^*M\otimes E\right)$ 以及 $X_0,\cdots,X_p\in\Gamma(TM)$，

$$d\omega\left(X_0,\cdots,X_p\right)=(-1)^k\left(\nabla_{X_k}\omega\right)\left(X_0,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right),(0\le k\le p). \tag{2.1}$$

注记：对普通外微分形式的外微分算子有 $d^2=0$。但是，对向量丛值微分形式所定义的外微分算子，不具有这个性质。从(2.1)式，可以推出

$$d^2:\Gamma\left(\Lambda^p T^*M\otimes E\right)\to\Gamma\left(\Lambda^{p+2}T^*M\otimes E\right),$$

$$d^2\omega\left(X_0,\cdots,X_{p+1}\right)=\sum_{l<k}(-1)^{l+k}\left(R\left(X_l,X_k\right)\omega\right)\left(X_0,\cdots,\hat{X}_l,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_{p+1}\right). \tag{2.2}$$

定义 2.2 [1] (余微分算子)定义向量丛值微分形式上的余微分算子 $\delta:\Gamma\left(\Lambda^p T^*M\otimes E\right)\to\Gamma\left(\Lambda^{p-1}T^*M\otimes E\right)$ 如下：对任意 $\omega\in\Gamma\left(\Lambda^p T^*M\otimes E\right)$ 以及 $X_1,\cdots,X_{p-1}\in\Gamma(TM)$，

$$\delta\omega\left(X_1,\cdots,X_{p-1}\right)=-\sum_{i=1}^{m}\left(\nabla_{e_i}\omega\right)\left(e_i,X_1,\cdots,X_{p-1}\right), \tag{2.3}$$

其中 $\{e_i\}$ 是 M 上的局部幺正标架场。规定 $\delta^0:\Gamma\left(\Lambda^0 T^*M\otimes E\right)\to\Gamma\left(\Lambda^{0-1}T^*M\otimes E\right)$，即 $\delta^0=0$。

定义 2.3 [1] Hodge-Laplace 算子为

$$\Delta=d\delta+\delta d. \tag{2.4}$$

它将任何一个 E 值 p 形式映照成 E 值 p 形式。

3. Weitzenböck 公式

3.1. 向量丛 E 值 p 形式的 Weitzenböck 公式

命题 3.1 [1] (Weitzenböck 公式)对任意一个向量丛值 p 形式 ω 有

$$\Delta\omega=-\nabla^2\omega+S, \tag{3.1.1}$$

其中 $\nabla^2=Tr_g\nabla_{\cdot,\cdot}=\nabla_{\cdot}\nabla_{\cdot}-\nabla_{\nabla_{\cdot}\cdot}$ 表示 Laplace 算子的迹，即迹-Laplace 算子，且对任意的 $X_1,\cdots,X_p\in\Gamma(TM)$，

$$S\left(X_1,\cdots,X_p\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\left(R\left(e_i,X_k\right)\omega\right)\left(e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right). \tag{3.1.2}$$

证明：在 M 上的任何一点 q 附近取局部幺正标架场 $\{e_i\}$，并且 $\nabla_{e_i}e_j\big|_q=0$。那么，对

$\forall X_1,\cdots,X_p \in \Gamma(TM)$，

$$\begin{aligned}&\nabla_{X_k}\delta\omega\left(X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)\\&=\left(\nabla_{X_k}\delta\omega\right)\left(X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)+\sum\nolimits_l\delta\omega\left(X_1,\cdots,X_{l-1},\nabla_{X_k}X_l,X_{l+1},\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

因为$\nabla_{e_i}e_j\big|_q=0$，所以

$$\sum\nolimits_l\delta\omega\left(X_1,\cdots,X_{l-1},\nabla_{X_k}X_l,X_{l+1},\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)=0. \tag{3.1.4}$$

由余微分算子的定义得

$$\nabla_{X_k}\delta\omega\left(X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)=-\nabla_{X_k}\nabla_{e_i}\omega\left(e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right). \tag{3.1.5}$$

其中由$\nabla_{e_i}e_j\big|_q=0$知，

$$\nabla_{e_i}\omega\left(\nabla_{X_k}e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)=0,\sum_l\nabla_{e_i}\omega\left(e_i,X_1,\cdots,\nabla_{X_k}X_l,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)=0. \tag{3.1.6}$$

由此

$$\begin{aligned}d\delta\omega\left(X_1,\cdots,X_p\right)&=(-1)^{k-1}\nabla_{X_k}\delta\omega\left(X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)-\sum_l(-1)^{k-1}\delta\omega\left(X_1,\cdots,\nabla_{X_k}X_l,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)\\&=(-1)^k\left(\nabla_{X_k}\nabla_{e_i}\omega\right)\left(e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\delta d\omega\left(X_1,\cdots,X_p\right)=&-\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega\right)\left(X_1,\cdots,X_p\right)-(-1)^k\left(\nabla_{e_i}\nabla_{X_k}\omega\right)\left(e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_k,\cdots,X_p\right)\\&+(-1)^l\left(\nabla_{\nabla_{e_i}X_l}\omega\right)\left(e_i,X_1,\cdots,\hat{X}_l,\cdots,X_p\right)\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

从而

$$\Delta\omega\left(X_1,\cdots,X_p\right)=-\left(\nabla^2\omega\right)\left(X_1,\cdots,X_p\right)+S\left(X_1,\cdots,X_p\right)=\left(-\nabla^2\omega+S\right)\left(X_1,\cdots,X_p\right). \tag{3.1.9}$$

即

$$\Delta\omega=-\nabla^2\omega+S.$$

□

3.2. 向量丛 E 值 p 形式的 Weitzenböck 公式的应用

由 Weitzenböck 公式可推导出调和映照的能量密度的 Bochner 公式[1]。

对光滑映照 $f:M\to N$，取 $\omega=df\in\Gamma\left(T^*M\otimes f^{-1}TN\right)$，对 $\forall X\in\Gamma(TM)$，

$$S(X)=-R^N\left(f_*e_i,f_*X\right)f_*e_i+f_*Ric^MX. \tag{3.2.1}$$

命题 3.2：设 $f:M\to N$ 是调和映照，那么证明下式成立，

$$\Delta e(f)=\left|B(f)\right|^2-\left\langle R^N\left(f_*e_i,f_*e_j\right)f_*e_i,f_*e_j\right\rangle+\left\langle f_*Ric^Me_i,f_*e_i\right\rangle. \tag{3.2.2}$$

证明：取 M 上的任何一点 q 附近局部幺正标架场 $\{e_i\}$，并且 $\nabla_{e_i}e_j\big|_q=0$，因为

$$e(f)=(1/2)\left|df\right|^2=(1/2)\langle df,df\rangle,\left|B(f)\right|^2=\langle\nabla df,\nabla df\rangle.$$

因此

$$\Delta e(f)=\Delta(1/2)\langle df,df\rangle=\left\langle\nabla^2df,df\right\rangle+\langle\nabla df,\nabla df\rangle=\left\langle\nabla^2df,df\right\rangle+\left|B(f)\right|^2. \tag{3.2.3}$$

又由 Weitzenböck 公式可得，

$$\left\langle \nabla^2 df, df \right\rangle = \left\langle -\Delta df + S, df \right\rangle = \left\langle -\Delta df, df \right\rangle - \left\langle R^N\left(f_* e_i, f_* e_j\right) f_* e_i, f_* e_j \right\rangle + \left\langle f_* Ric^M e_i, f_* e_i \right\rangle. \tag{3.2.4}$$

考虑到 f 是调和映照， $\Delta df = 0$，因此就可得到所证公式，即

$$\Delta e(f) = \left|B(f)\right|^2 - \left\langle R^N\left(f_* e_i, f_* e_j\right) f_* e_i, f_* e_j \right\rangle + \left\langle f_* Ric^M e_i, f_* e_i \right\rangle. \qquad \square$$

3.3. Weitzenböck 恒等式

命题 3.3： 复流形 M 上 $\bar\partial$-Laplace 算子 $\Delta_{\bar\partial} = \bar\partial \circ \bar\partial^* + \bar\partial^* \circ \bar\partial$ 的 Weitzenböck 恒等式为：

$$(\Delta\psi)_{I,\bar J} = \left(-\sum_{k=1}^{n} \nabla_k \nabla_{\bar k} \psi_{I,\bar J}\right) + A^1(\psi), \tag{3.3.1}$$

其中 $\psi \in A^{p,q}(M)$，

$$\psi = (1/p!q!) \sum_{\substack{\# I = p \\ \# J = q}} \psi_{I,\bar J} \varphi_I \wedge \bar\varphi_J = (1/p!q!) \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n \\ 1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n}} \psi_{i_1,\cdots,i_p \bar j_1,\cdots,\bar j_q} \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \bar\varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar\varphi_{j_q} \tag{3.3.2}$$

其中 $\psi_{I,\bar J}$ 对指标 i_α 和 $\bar j_\beta$ 是反对称的，对 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是 Hermite 度量 $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \bar\varphi_i$ 的局部幺正余标架。

精确的 Weitzenböck 公式与低阶项有关。对于一个一般的厄米特度量， $A^1(\psi)$ 是在它的第一阶项中包含挠率的麻烦的算子。然而，当度量是 Kähler 度量时，它们消失了，并且 $A^1(\psi)$ 是一个代数算子，

$$A^1(\psi)_{I\bar J} = \sum_{k, j_\alpha} R_{j_\alpha \bar k} \psi_{I \bar j_1 \cdots \bar j_{\alpha-1} \bar k \bar j_{\alpha+1} \cdots \bar j_q},$$

其中

$$R_{j\bar k} = \sum_i R^i_{ij\bar k}$$

是 Ricci 曲率。

证明：令 $v_1,\cdots,v_n$ 是 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的对偶向量标架场，记 $v_{\bar i} = \bar v_i$。对于函数 f， $\bar\partial f = \sum_i \left(v_i \cdot f\right) \bar\varphi_i$ ，对于张量 $\tau = \{\tau_I\}$，它的 $\bar z$ -协变微分 $\bar\nabla_\tau$ 的分量为 $\left(\bar\nabla_\tau\right)_I = \bar\partial \tau_I + A^0(\tau)$，为方便，使用“ $\equiv$ ”表示“模掉低价项”，则有 $\left(\bar\nabla_\tau\right)_I \equiv \bar\partial \tau_I$。

设 $\Phi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$， 下面只需证 $\psi = f \varphi_I \wedge \bar\varphi_J$ (不求和)时，(3.3.1)式成立。

由于 dz 的作用尤如向量丛指标，我们将假定 $p = 0$，根据式(3.3.1)的对称性，取 $J = (1,\cdots,q)$，有

$$\psi = f \bar\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \bar\varphi_q \in A^{0,q}(M).$$

则

$$\bar\partial \psi \equiv \bar\partial f \wedge \bar\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \bar\varphi_q = \sum_{k=p+1}^{n} f_{\bar k} \bar\varphi_k \wedge \bar\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \bar\varphi_q = \sum_{k=p+1}^{n} f_{\bar k} (-1)^q \bar\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \bar\varphi_q \wedge \bar\varphi_k \in A^{0,q+1}(M), \tag{3.3.3}$$

$$*\bar\partial\psi = (-1)^q \cdot 2^{q+1-n} \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^{(k-(q+1))n} (-1)^{n(n-k)} \bar f_{\bar k} \cdot \bar\varphi_{q+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\bar\varphi_k} \wedge \cdots \wedge \bar\varphi_n \wedge \Phi' \in A^{n,n-q-1}(M), \tag{3.3.4}$$

$$\begin{aligned} \bar\partial * \bar\partial \psi = 2^{q+1-n} \Bigg(& \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{l=1}^{q} \bar f_{\bar k, l} \bar\varphi_l \wedge \bar\varphi_{q+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\bar\varphi_k} \cdots \wedge \bar\varphi_n \wedge \Phi' \\ & + \sum_{k=p+1}^{n} \bar f_{\bar k, k} \bar\varphi_{q+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\bar\varphi_k} \cdots \wedge \bar\varphi_n \wedge \Phi' \Bigg) \in A^{n,n-q}(M) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

$$*\bar{\partial}*\bar{\partial}\psi=2\sum_{k=p+1}^{n}f_{\bar{k},k}\bar{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_q+2\sum_{k=q+1}^{n}\sum_{l=1}^{q}(-1)^{l-1+q}f_{\bar{k},l}\bar{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\bar{\varphi}_l}\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_q\wedge\bar{\varphi}_k\in A^{0,q}(M), \tag{3.3.6}$$

对另一项 $\bar{\partial}*\bar{\partial}*\psi$，同理得

$$*\psi=2^{0+q-n}\bar{f}\bar{\varphi}_{q+1}\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_n\wedge\Phi'\in A^{n,n-q}(M), \tag{3.3.7}$$

$$\bar{\partial}*\psi=2^{q-n}\sum_{l=1}^{q}\bar{f}_l\bar{\varphi}_l\wedge\bar{\varphi}_{q+1}\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_n\wedge\Phi'\in A^{n,n-q+1}(M), \tag{3.3.8}$$

$$*\bar{\partial}*\psi=2\sum_{l=1}^{q}(-1)^{l-1}f_l\bar{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\bar{\varphi}_l}\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_q\in A^{0,q-1}(M), \tag{3.3.9}$$

$$\bar{\partial}*\bar{\partial}*\psi=2\sum_{l=1}^{q}f_{l,\bar{l}}\bar{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_q+2\sum_{l=1}^{q}\sum_{k=q+1}^{n}(-1)^{q+l}f_{l,\bar{k}}\bar{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_l\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_q\wedge\bar{\varphi}_k\in A^{0,q}(M), \tag{3.3.10}$$

注意到 $v_i(v_{\bar{j}}f)-v_{\bar{j}}(v_if)=0$， $f_{\bar{j},i}-f_{i,\bar{j}}\equiv A^1(f)$，模掉 $A^{0,q}(M)$ 中的一阶项，便得

$$\Delta_{\bar{\partial}}\psi=\left(\bar{\partial}\bar{\partial}^*+\bar{\partial}^*\bar{\partial}\right)\psi=-\bar{\partial}*\bar{\partial}*\psi-*\bar{\partial}*\bar{\partial}\psi=-2\sum_{k=1}^{n}f_{\bar{k},k}\bar{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_q$$

这就证明了 Weitzenböck 公式。 □

3.4. Gårding 不等式的证明

已证得的 Weitzenböck 公式形如：

$$(\Delta\psi)_{I,\bar{J}}=\left(-2\sum_{k=1}^{n}\psi_{I,\bar{J},\bar{k},k}\right)+A^1(\psi),\forall\psi\in A^{p,q}(M). \tag{3.4.1}$$

记 $\Phi=C_n\Phi'\wedge\bar{\Phi}'$ 为体积形式，其中 $C_n=\left(\sqrt{-1}/2\right)^n(-1)^{C_n^2}$， $\Phi'=\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$，设

$$\eta=C_n\left(-\sum_{I,J,k}(-1)^{k-1}\psi_{I\bar{J},\bar{k}}\overline{\psi_{I\bar{J}}}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\hat{\varphi}_k\wedge\cdots\wedge\varphi_n\right)\wedge\Phi'=C_n'\left(\bar{\nabla}\psi,\psi\right)\wedge\omega^{n-1}, \tag{3.4.2}$$

这表明 η 是整体定义的，并且因为它有 $(n-1,n)$ 型，$\bar{\partial}\big|_{A^{n-1,n}(M)}=0$，$\eta\in A^{n-1,n}(M)$，所以 $d\eta=\left(\partial+\bar{\partial}\right)\eta=\partial\eta$，由 Stokes 定理有

$$\int_M\partial\eta=\int_M\mathrm{d}\eta=\int_{\partial M}\eta=0\quad(\partial M=\varnothing),$$

又

$$\partial\eta=\left(-2\sum_{I,J,k}\psi_{I\bar{J},\bar{k},k}\bar{\psi}_{IJ}\right)\Phi-\left(2\sum_{I,J,k}\psi_{I\bar{J},\bar{k}}\overline{\psi_{I\bar{J},\bar{k}}}\right)\Phi+\left(A^1\psi,\psi\right)\Phi,$$

所以，由 Weitzenböck 公式，

$$(\Delta\psi,\psi)=\left\|\bar{\nabla}\psi\right\|^2+\left(A^1\psi,\psi\right), \tag{3.4.3}$$

其中，$\left\|\bar{\nabla}\psi\right\|^2=\int_M\left(\bar{\nabla}\psi,\bar{\nabla}\psi\right)\Phi$ 是张量 ψ 的 $\bar{z}$ 协变微分的 L^2-范数， $A^1(\psi)$ 是包括 ψ 的 $\bar{z}$ 微分的第一阶算子，利用不等式 $2\alpha\beta\le\varepsilon\alpha^2+(1/\varepsilon)\beta^2$，有

$$2\left|\left(A^1\psi,\psi\right)\right|\le\varepsilon\left\|\bar{\nabla}\psi\right\|^2+(1/\varepsilon)\|\psi\|^2, \tag{3.4.4}$$

即

$$\|\bar{\nabla}\psi\|^2 \le C'\left\{(\Delta\psi,\psi)+\|\psi\|^2\right\}, C'>0. \tag{3.4.5}$$

将上面的讨论重复到

$$\gamma = C_n\left(-\sum_{I,J,k}(-1)^{k-1}\psi_{I\bar{J},k}\overline{\psi_{I\bar{J}}}\bar{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\bar{\varphi}_k}\wedge\cdots\wedge\bar{\varphi}_n\right)\wedge\Phi',$$

通过 Dirichlet 范数，由 $f_{k,\bar{k}} = f_{\bar{k},k} + A^1(f)$ 去估计 z 微分的 L^2-范数 $\|\nabla\psi\|^2$。那么，

$$\|\nabla\psi\|^2 + \|\bar{\nabla}\psi\|^2 + \|\psi\|^2 \ge C''\left((\Delta\psi,\psi)+\|\psi\|^2\right) = C''\mathscr{D}(\psi). \tag{3.4.6}$$

这就是 Gårding 不等式。

注：在 Kähler 情形，可以利用精确的 Weitzenböck 公式和分部积分运算来证明 Kodaira 恒等式

$$(\Delta\psi,\psi) = \|\bar{\nabla}\psi\|^2 + (R\psi,\psi), \tag{3.4.7}$$

其中，对 $\psi\in A^{0,q}(M)$ 和重复指标求和，得

$$(R\psi,\psi) = q\int_M\left(R_{i\bar{j}}\psi_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_{q-1}\bar{i}}\overline{\psi}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_{q-1}\bar{j}}\right)\Phi,$$

如果 ψ 是调和的，并且 Hermite 形式 $R_{i\bar{j}}\xi^i\bar{\xi}^j$ 是正定的，那么我们推到出 $\psi=0$。由 Hodge 定理，

$$0 = \mathscr{H}^{0,q}(M) \cong H^{0,q}_{\bar{\partial}}(M), q>0. \tag{3.4.8}$$

这是著名的 Kodaira 消没定理的特殊情形。

4. 正则性引理

引理 4.1 [2] (正则性引理)假设 $\varphi\in\mathscr{H}_s^{p,q}(M)$，并且对所有 $\eta\in A^{p,q}(M)$，在

$$(\psi,\Delta\eta) = (\varphi,\eta)$$

的意义上，$\psi\in\mathscr{H}_0^{p,q}(M)$ 是方程

$$\Delta\psi = \varphi \tag{4.1}$$

的弱解。那么 $\psi\in\mathscr{H}_{s+2}^{p,q}(M)$。

5. Hodge 定理的证明：整体理论

在环面 $T^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ 上，Sobolev s-范数由加权 Fourier 级数或由 L^2-范数

$$\sum_{|\alpha|\le s}\int_T\left|D^\alpha\varphi\right|^2 \mathrm{d}x$$

给出。设 $U\subset V\subset\mathbb{R}^n$，并且 U 相对于 V 是紧致的。U 上具有紧致支集的函数可以看作 $T^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ 上的函数。假设 $v_1(x),\cdots,v_n(x)$ 是 V 上处处线性无关的 C^∞ 矢量场，$\rho(x)$ 是 V 上的正定函数。对 $\varphi\in C_c^\infty(U)$，Sobolev 0-范数和 1-范数分别等价于

$$\int_V\rho(x)|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x, \quad \int_V\rho(x)\left\{|\varphi(x)|^2 + \sum_i|v_i(x)\cdot\varphi(x)|^2\right\}\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

注意到交换子

$$[v_i,v_j]\varphi = v_i(v_j\varphi) - v_j(v_i\varphi)$$

是一个阶为 1 的算子，其中一个阶为 s 的算子最多包含 s 次微分。表达式

$$v^{\alpha}\varphi = v_1^{\alpha_1}\left(v_1^{\alpha_2}\cdots\left(v_n^{\alpha_n}\varphi\right)\cdots\right)$$

和模阶 $<[\alpha]$ 的算子的顺序无关。所以 $\varphi\in C_c^{\infty}(U)$ 的 Sobolev s-范数等价于 $\sum_{|\alpha|\le s}\int\left|v^{\alpha}\varphi(x)\right|^2 \mathrm{d}x$ 。

假设 $E\to M$ 是紧致流形 M 上的矢量丛。若 ∇ 是 E 和 M 的切丛 TM 上的联络，$\{e_\alpha\}$ 是 E 的局部标架，$\{v_i\}$ 是 TM 的局部标架，$\{\varphi_i\}$ 是 TM 的余标架，则 $E\to M$ 的截面 $f=\sum_\alpha f_\alpha e_\alpha$ 的协变微分 $\nabla_i f_\alpha = f_{\alpha,i}$ 定义为

$$\nabla f = \sum_{\alpha,i} f_{\alpha,i} e_\alpha \otimes \varphi_i .$$

我们得到

$$f_{\alpha,i} = v_i f_\alpha + A^0(f), \tag{5.2}$$

其中，A^0 是包括联络矩阵阶为 0 的算子。

把这些讨论应用到 $E\otimes T^*(M)$，定义 $f_{\alpha,i,j}=\nabla_j(\nabla_i f_\alpha)$，则有

$$\left[\nabla_i,\nabla_j\right]f_\alpha = A^1(f).$$

假设 E 和 $T(M)$ 有度量，并且 $\{e_\alpha\},\{v_i\}$ 是正交标架。截面 $f\in C^{\infty}(M,E)$ 的整体 Sobolev s-范数定义为

$$\|f\|_s^2 = \sum_{k\le s}\left\|\nabla^k f\right\|_0^2 \mathrm{d}x, \tag{5.3}$$

其中，

$$\nabla^k f = \underbrace{\nabla\left(\nabla\left(\cdots\left(\nabla f\right)\cdots\right)\right)}_{k\text{次}}$$

用 $\mathscr{H}_s(M,E)$ 表示在这个范数 $C^{\infty}(M,E)$ 的完备化。那么由单位分解，整体的 Sobolev 范数诱导了一个范数，这个范数与某点邻域中有紧致支集的截面上的通常 Sobolev 范数等价，我们可以得到：

引理 5.1 [2] **(整体 Sobolev 引理)** $H_{[n/2]+1+s}(M,E)\subset C^{\infty}(M,E)$，它是 M 上可微类的截面，并且

$$\bigcap_s \mathscr{H}(M,E) = C^{\infty}(M,E). \tag{5.4}$$

引理 5.2 [2] **(整体 Rellich 引理)** 对于 $s>r$，包含映射：

$$\mathscr{H}_s(M,E)\to\mathscr{H}_r(M,E)$$

是一个紧致算子。

现在，设 M 是一个在切丛上有 Hermite 联络的紧致 Hermite 流形，$\mathscr{H}_s^{p,q}(M)$ 表示 $A^{p,q}(M)$ 在 Sobolev s-范数 $\|\cdot\|=\|\ \|_0$ 下的完备化，把 Dirichlet 内积和 Dirichlet 范数分别定义为

$$\mathscr{D}(\varphi,\psi)=(\varphi,\psi)+\left(\bar\partial\varphi,\bar\partial\psi\right)+\left(\bar\partial^*\varphi,\bar\partial^*\psi\right)=\left(\varphi,(I+\Delta)\psi\right)$$

$$\mathscr{D}(\varphi)=\mathscr{D}(\varphi,\varphi)=\|\varphi\|^2+\left\|\bar\partial\varphi\right\|^2+\left\|\bar\partial^*\varphi\right\|^2$$

理论中的基本估计来自

Gårding 不等式：对 $\varphi\in A^{p,q}(M)$，

$$\|\varphi\|_1^2 \le C\mathscr{D}(\varphi)(C>0). \tag{5.5}$$

我们注意到，不只是 Laplace 算子 Δ，而是算子 $I+\Delta$ 被采用，这是因为 $\Delta\ge 0$ 意味着 $I+\Delta$ 没有核，

并且因此我们可以求它的逆。

Gårding 不等式的一个用处就是证明定理 4.1，例如，假设 $\psi \in \mathscr{H}_0^{p,q}(M)$ 是 Laplace 算子的特征函数，意思就是，对常数 λ，方程

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi \tag{5.6}$$

在弱解的意义上成立，那么，由正则性引理，对所有的 s 有 $\varphi \in \mathscr{H}_s^{p,q}(M)$，并且由整体 Sobolev 引理，我们得到，任意 Δ 的本征函数是光滑的。

我们注意到，任意的本征函数 $\lambda \ge 0$，并且 $\lambda = 0 \Leftrightarrow \varphi$ 在弱解上的意义是调和的。由正则性和 Sobolev 引理，任意这样的弱解调和形式在通常意义上是和 C^∞ 调和的。

下面我们将假定 Gårding 不等式和正则性引理成立，继续来完成 Hodge 定理的证明。

基本的 Hilbert 空间的工具是紧致自伴算子的谱定理，以及通过与一个固定向量取内积而表示有界线性函数的原理，形式如下：

引理 5.3 [3] 给定 $\psi \in \mathscr{H}_0^{p,q}(M)$，存在一个唯一的 $\psi \in \mathscr{H}_1^{p,q}(M)$，使得对所有的 $\eta \in A^{p,q}(M)$，有

$$(\varphi,\eta) = \mathscr{D}(\psi,\eta) = (\psi,(I+\Delta)\eta). \tag{5.7}$$

从 $\mathscr{H}_0^{p,q}(M)$ 到 $\mathscr{H}_1^{p,q}(M)$ 的映射

$$\psi = T(\varphi)$$

是有界的，并且从而映射

$$T: \mathscr{H}_0^{p,q}(M) \to \mathscr{H}_1^{p,q}(M)$$

是紧致和自伴的。

证明：从 Gårding 不等式得到，Dirichlet 范数 $\mathscr{D}(\varphi)$ 等价于 $\mathscr{H}_1^{p,q}(M)$ 上的 Sobolev 1-范数 $\|\varphi\|_1^2$。利用

$$|(\varphi,\eta)| \le \|\varphi\|_0 \|\eta\|_0 \le \|\varphi\|_0 \mathscr{D}(\eta), \tag{5.8}$$

线性泛函

$$\eta \to (\varphi,\eta), \quad \forall \eta \in A^{p,q}(M)$$

扩张到有 Dirichlet 范数的 $\mathscr{H}_1^{p,q}(M)$ 上的有界线性形式。从而方程

$$(\varphi,\eta) = \mathscr{D}(\psi,\eta) \tag{5.9}$$

有唯一解 $\psi = T(\varphi)$，其特征为

$$(\varphi,\eta) = (T\varphi,(I+\Delta)\eta) \quad \forall \eta \in A^{p,q}(M).$$

因为 I 和 Δ 是自伴的，所以 T 是自伴的。从不等式

$$2\alpha\beta \le \varepsilon\alpha^2 + (1/\varepsilon)\beta^2$$

有

$$\|T\varphi\|_1^2 \le C\mathscr{D}(T\varphi,T\varphi) \le C\|\varphi\|_0 \|T\varphi\|_0 \le (\varepsilon C/2)\|T\varphi\|_0^2 + (2C/\varepsilon)\|\varphi\|_0^2, \tag{5.10}$$

则我们可以推导出

$$\|T\varphi\|_1^2 \le C'\|\varphi\|_0^2. \tag{5.11}$$

也就是说，从 $\mathscr{H}_0^{p,q}(M)$ 到 $\mathscr{H}_1^{p,q}(M)$ 的映射 T 是有界的，并且由引理 5.2 (整体 Rillich 引理)，T 是紧致

的。 □

按照紧致自伴算子的谱定理[4]，有一个 Hilbert 空间分解

$$\mathscr{H}_0^{p,q}(M)=\bigoplus_m E(\rho_m),$$

其中 ρ_m 是 T 的本特征值并且 $E(\rho_m)$ 是有限维特征空间。因为 T 是一对一的，所以所有的 $\rho_m\neq 0$，而且方程

$$T\varphi=\rho_m\varphi$$

与

$$(\varphi,\eta)=(\rho_m\varphi,(I+\Delta)\eta)\quad \forall\eta\in A^{p,q}(M)$$

是一样的，它意味着在弱的意义上，

$$\Delta\varphi=(1-\rho_m/\rho_m)\varphi. \tag{5.12}$$

因此，T 和 Δ 的特征空间是一样的，并且是由 C^∞ 形式组成的有限维向量空间。Δ 的特征值 λ_m 和 T 的特征值 ρ_m 有下列关系

$$\lambda_m=(1-\rho_m)/\rho_m,\ \rho_m=1/(1+\lambda_m),$$

假设

$$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_m<\cdots,$$

其中当 $m\to\infty$ 时，λ_m 趋于 ∞，ρ_m 趋于 0。调和空间 $\mathscr{H}^{p,q}(M)$ 对应于 $\lambda_0=0$，对 $\varphi\in\mathscr{H}^{p,q}(M)^\perp$，

$$\|\varphi\|_0\geq\lambda_1\|\varphi\|_0\quad(\lambda_1>0),$$

并且如果我们把 Green 算子定义为

$$\begin{cases}G=0, & 在\mathscr{H}^{p,q}(M)上\\ G\varphi=1/\lambda_m\,\varphi, & \varphi\in E(1/(1+\lambda_m))\end{cases}$$

那么 G 是紧致自伴算子，并且有谱分解 $\mathscr{H}_0^{p,q}(M)=\mathscr{H}^{p,q}(M)\oplus\left(\bigoplus_m E(\rho_m)\right)$，其中，

$$G\varphi=(\rho_m/(1-\rho_m))\varphi,\varphi\in E(\rho_m).$$

至此，我们已经证明了 Hodge 定理。本质的想法是由 Hilbert 空间技巧产生 Green 算子，再根据基本估计来证明它是紧致光滑算子。实际上，G 是形式

$$(G\varphi)(x)=\int_M G(x,y)\varphi(y) \tag{5.13}$$

的积分算子，其中 $G(x,y)$ 是 $M\times M$ 上的好核，沿着对角 Δ 有一定的奇异。Hilbert 空间方法的缺点是没有在这种形式中给出 Green 算子。如果我们使用分布而不只是 L^2-范数，那么，我们通过解

$$\Delta_x G(x,y)=\delta_y+S_y \tag{5.14}$$

这种类型的分布方程来得到 $G(x,y)$，其中，δ_y 是在 y 处的 δ 函数，S_y 是阶为 $-\infty$ 的算子。

基金项目

课题部分受到项目 2017KJQD00，2019GXNSFAA245043，gxun-chxzs2019029 的资助。

参考文献

[1] 忻元龙. 调和映照[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.

[2] Griffiths, P. and Harris, J. (1978) Principles of Algebraic Geometry. Wiley, New York.

[3] 梅加强. 流形与几何初步[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[4] 徐森林, 薛春华. 微分几何[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1997.