

# 具有幂律非线性的(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov方程的行波解

韦 丽

成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都  
Email: 1466991541@qq.com

收稿日期: 2020年8月16日; 录用日期: 2020年9月3日; 发布日期: 2020年9月10日

---

## 摘 要

本文应用动力系统分岔理论研究了具有幂律非线性的(3 + 1)维Zakharov-Kuznetsov方程的行波。通过将Zakharov-Kuznetsov方程的行波系统转化为 $R^2$ 中的动力学系统,得到了保证其有界和无界轨道存在的各种参数条件。此外,通过计算这些轨道上的复杂椭圆积分,我们得到了(3 + 1)维Zakharov-Kuznetsov方程 $n = 1$ 的所有可能行波解的精确表达式。

## 关键词

行波分岔, 动力系统, 椭圆积分

---

# Traveling Wave Solutions of the (3 + 1)-Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation with Power Law Nonlinearity

Li Wei

Department of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu Sichuan  
Email: 1466991541@qq.com

Received: Aug. 16<sup>th</sup>, 2020; accepted: Sep. 3<sup>rd</sup>, 2020; published: Sep. 10<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

In this paper, the bifurcation theory of dynamical system is applied to study the traveling waves of

the (3 + 1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation with power law nonlinearity. By transforming the traveling wave system of the Zakharov-Kuznetsov equation into a dynamical system in  $R^2$ , we derive various parameter conditions that guarantee the existence of its bounded and unbounded orbits. Furthermore, by calculating complicated elliptic integrals along these orbits, we obtain exact expressions of all possible traveling wave solutions of the (3 + 1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation for  $n = 1$ .

## Keywords

Bifurcation of Traveling Waves, Dynamical System, Elliptic Integral

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

ZK 方程是研究地球物理流动中旋涡的一个非常有吸引力的模型方程, ZK 方程出现在物理、应用数学和工程的许多领域。特别是作为描述由冷离子和热等温电子组成的强磁化无损等离子体中非线性离子声波的重要模型, (3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的行波问题受到广泛关注。

2010 年, 利用经典向量场方法和相关向量场方法, Dong 等人导出了(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的约化和一些新的解[1]。2012 年, Zhang 和 Zhou [2]利用分岔理论得到了一般形式的 ZK 方程的有界孤立波解、周期解、扭结解和反扭结解。2013 年, Wronskian 利用形式展开法获得了(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的新的相互作用解[3]。随后, S. Sahoo 和 S. Saha-Ray 利用改进的分式子方程方法, 构造了(3 + 1)维广义分式 KdV-Zakharov-Kuznetsov 方程的解析精确解[4]。2016 年, Moleleki 等人提出用 Kudryashov 和 Jacobi 椭圆函数方法构造(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的精确解[5]。2017 年, Lu 等人利用改进的扩展直接代数方法得到了(3 + 1)维非线性扩展 Zakharov-Kuznetsov 方程和修正的 KdV-Zakharov-Kuznetsov 方程的新的精确孤波解、孤子解和椭圆函数解[6]。同年, 利用 Kudryashov 方法的修正形式, 得到了共形时间分数维(3 + 1)维方程的精确解[7]。2018 年, Wang 等人利用改进的扩展映射方法, 得到了不同形式的精确行波解, 如亮孤子、周期孤波、暗孤子等[8]。2019 年, 利用( $G'/G, 1/G$ )展开法得到了(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的三角函数解、双曲函数解和有理函数解。近年来, 利用统一方法得到了孤立波解、孤子波解、椭圆波解和周期(双曲)波有理解[10]。

虽然关于(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的行波解已有许多深入的研究成果, 但仍存在一些有待解决的问题。首先, 我们注意到(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的行波没有被讨论完全, 特别是其无界行波。此外, 虽然上述重要方法可以用来求(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的行波解, 但仍有一些行波解丢失。这些问题再次引起我们对(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程行波的研究兴趣。

本文考虑具有幂律非线性的(3 + 1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程:

$$U_t + aU^n U_x + b(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz})_x = 0, \quad (1)$$

在这里  $a, b$  是实数, 我们的目的是用动力系统的分岔方法研究当  $n = 1$  时方程(1)的所有行波解, 并给出所有行波解(包括有界和无界)的显式表达式。论文的其余部分安排如下。第二节详细研究了方程(1)行波系统的相空间几何, 得到了各种有界和无界轨道的参数分岔集。第三节利用第二节的结果, 对方程(1)行波

系统的所有轨道进行了分类。最后，通过对复杂椭圆积分的计算，给出了方程(1)所有行波解的精确表达式，包括有界和无界。第四部分是本文的结论。

## 2. 使用行波系统及其分岔分析

做以下行波变换

$$U = U(x, y, z, t) = u(\xi) = u(x + y + z - ct),$$

我们将方程(1.7)转换成相应的行波系统，如下所示：

$$-cu' + au^n u' + 3bu'' = 0 \tag{2}$$

这里'表示d/dξ，c ≠ 0表示波数。对方程(2)积分并且保留一个积分常数，我们可以得到：

$$-cu + \frac{a}{n+1}u^{n+1} + 3bu'' = e, \tag{3}$$

e是一个积分常数。方程(3)有以下等价形式：

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = \frac{1}{3b} \left( -\frac{a}{n+1}u^{n+1} + cu + e \right), \end{cases} \tag{4}$$

系统(4)是一个哈密顿系统，其能量函数为：

$$H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3b} \left( \frac{a}{(n+1)(n+2)}u^{n+2} - \frac{c}{2}u^2 - eu \right). \tag{5}$$

当n = 1时，系统(4)转换成以下形式：

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = \frac{1}{3b} \left( -\frac{a}{2}u^2 + cu + e \right), \end{cases} \tag{6}$$

首先，我们讨论系统(6)的平衡点个数及类型。

**定理 2.1:** 当  $c^2 + 2ae > 0$ ，系统(6)有两个平衡点，如果  $b > 0$ ，一个鞍点  $P_1 \left( \frac{c - \sqrt{c^2 + 2ae}}{a}, 0 \right)$  和一个中心  $P_2 \left( \frac{c + \sqrt{c^2 + 2ae}}{a}, 0 \right)$ ；如果  $b < 0$ ，一个中心  $B_1 \left( \frac{c - \sqrt{c^2 + 2ae}}{a}, 0 \right)$  和鞍点  $B_2 \left( \frac{c + \sqrt{c^2 + 2ae}}{a}, 0 \right)$ 。当  $c^2 + 2ae = 0$ ，系统(6)有一个独特的尖点  $P_3 \left( \frac{c}{a}, 0 \right)$ 。当  $c^2 + 2ae < 0$ ，系统(6)没有平衡点。

**证明:** 当  $c^2 + 2ae > 0, b > 0$ ，通过直接计算，系统(6)有两个平衡点  $P_1 \left( \frac{c - \sqrt{c^2 + 2ae}}{a}, 0 \right)$ ， $P_2 \left( \frac{c + \sqrt{c^2 + 2ae}}{a}, 0 \right)$ 。用  $M(P_i) (i = 1, 2, 3)$  表示系统(6)的在平衡点  $P_i$  的雅可比矩阵，可以得到：

$$M(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{c^2 + 2ae}}{3b} & 0 \end{bmatrix},$$

$$M(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{c^2+2ae}}{3b} & 0 \end{bmatrix}.$$

其行列式为:

$$\det M(P_1) = -\frac{\sqrt{c^2+2ae}}{3b} < 0,$$

$$\det M(P_2) = \frac{\sqrt{c^2+2ae}}{3b} > 0.$$

通过哈密顿系统的性质, 可以得到  $P_1$  是一个鞍点并且  $P_2$  是一个中心。类似的证明可以得到  $b < 0$  的情况。

当  $c^2 + 2ae = 0$ , 系统有一个平衡点  $P_3\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ , 其幂零矩阵为:

$$M(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这意味着  $P_3$  是一个退化的平衡点。为了进一步讨论  $P_3$  的类型, 我们做以下同胚变换:

$$\alpha = u - \frac{c}{a}, \beta = v,$$

把系统(6)转化成以下标准形式:

$$\begin{cases} \alpha' = \beta, \\ \beta' = -\frac{a}{6b}\alpha^2. \end{cases}$$

通过微分方程定性理论[11], 可以得到  $k = 2$ ,  $b_n = 0$ , 这证明了  $P_3$  是一个尖点。

当  $c^2 + 2ae < 0$ , 很容易得到系统没有平衡点。证毕。

接下来我们需要讨论分岔参数集  $\{(a, c, e) | c^2 + 2ae > 0\}$ ,  $\{(a, c, e) | c^2 + 2ae = 0\}$  和  $\{(a, c, e) | c^2 + 2ae < 0\}$ 。基于平衡点的分析以及哈密顿系统的性质, 我们有以下结果:

**Case 1:** 对于  $c^2 + 2ae > 0$ , 这里有一个同宿轨  $\gamma$  连接着鞍点  $P_1$ 。在同宿环  $\gamma \cup P_2$  内部, 存在一系列周期轨  $P_2$ , 这些轨道围绕着中心:

$$\Gamma(h) = \{H(p, q) = h, h \in (h(P_2), h(P_1))\},$$

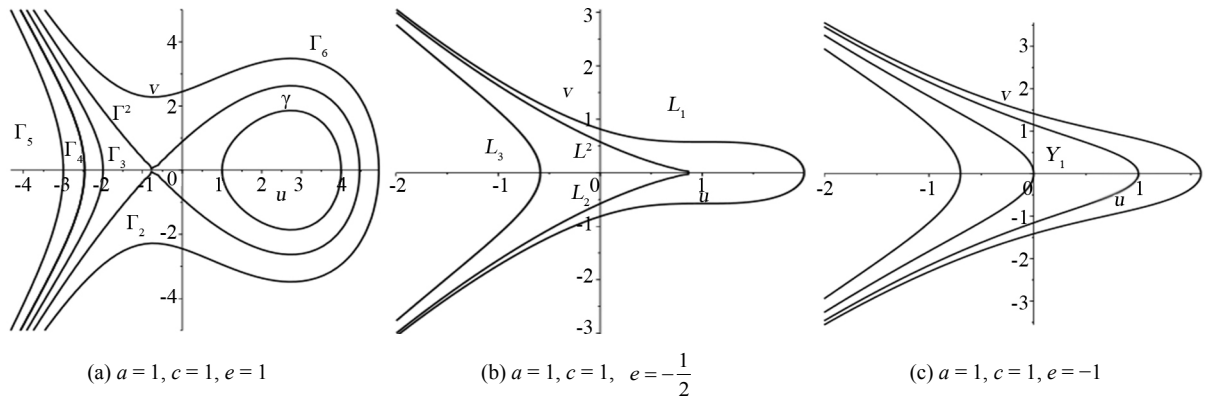
$$h(P_1) = \frac{-c^3 + (c^2 + 2ae)\sqrt{c^2 + 2ae} - 3aec}{9a^2b},$$

$$h(P_2) = \frac{-c^3 - (c^2 + 2ae)\sqrt{c^2 + 2ae} - 3aec}{9a^2b}.$$

此外, 当  $h \rightarrow h(P_2)$ ,  $\Gamma(h)$  趋近于  $P_2$ ; 当  $h \rightarrow h(P_1)$ ,  $\Gamma(h)$  趋近于  $\gamma$ 。在同宿环  $\gamma \cup P_2$  之外的, 所有轨道都是无界轨道, 如图 1(a)。

**Case 2:** 对于  $c^2 + 2ae = 0$ , 系统(6)的所有的轨道都是无界的。这里存在两个特殊的轨道  $L^2$  和  $L_2$ ,  $L^2$  的  $\omega$  极限集和  $L_2$  的  $\alpha$  极限集对应于相同的平衡点  $P_3$ , 如图 1(b)。

**Case 3:** 对于  $c^2 + 2ae < 0$ , 系统(6)仅有一种类型的轨道。所有的轨道都是无界的, 如图 1(c)。



**Figure 1.** The phase portraits of (6)  
**图 1.** 系统 6 的相图

### 3. 方程(1)的精确解

在这一节中，我们寻求方程(1)所有行波解的精确表达式。它需要我们根据不同参数分岔集中能量函数的不同水平曲线来识别系统(6)的各种轨道，包括有界轨道和无界轨道。

#### 3.1. 系统(6)的有界行波解

通过定理 2.1，只有当  $c^2 + 2ae > 0$ ，才会存在有界行波，分别是周期波和孤立波，实际上，这些有界行波解已经在我们的前期工作中得到了[12]，但为了本文的完整性，我们给出其计算结果。

周期轨：

$$u_1(\xi) = u_1 + \frac{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)}{(u_3 - u_1) - (u_3 - u_2) \cdot \text{sn}^2\left(\sqrt{\frac{a(u_3 - u_1)}{36b}}\xi\right)}, \quad -T < \xi < T.$$

同宿轨：

$$u_2(\xi) = u_5 - \frac{(u_5 - u_4) \left(1 - \exp\left(\sqrt{\frac{a}{9b}}(u_5 - u_4)\xi\right)\right)^2}{\left(1 + \exp\left(\sqrt{\frac{a}{9b}}(u_5 - u_4)\xi\right)\right)^2}, \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

#### 3.2. 系统(6)的无界行波解

除同宿轨道和周期轨道外，系统(2.5)的所有轨道都是无界的。我们需要分三种情况讨论。

1) 首先，我们讨论  $c^2 + 2ae > 0$  的情况。这里包含了 5 种情况( $U_1 \sim U_5$ )。

$U_1$ ：考虑图 1(a)中的第一种无界轨道  $\Gamma^2$  和  $\Gamma_2$ ，其能量等于鞍点  $P_1$ 。它们可以分别表示为：

$$v = \pm \sqrt{\frac{a}{9b}} \sqrt{(u - u_4)^2 (u - u_5)}$$

这里  $u_4 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 2ae}}{a}$  和  $u_5 = \frac{c + 2\sqrt{c^2 + 2ae}}{a}$  并且  $-\infty < u < u_4 < u_5$ 。首先，我们用  $\Gamma^2$  作为例子来计算相应的解。给一个初始值  $u(0) = -\infty$ ，有：

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{9b}(u_4-u)}\sqrt{(u-u_5)}} = \int_0^\xi d\xi, \quad 0 < \xi < T.$$

注意到,

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{(u_4-u)\sqrt{(u-u_5)}} = -\frac{1}{\sqrt{u_5-u_4}} \ln \frac{\sqrt{u_5-u}-\sqrt{u_5-u_4}}{\sqrt{u_5-u}+\sqrt{u_5-u_4}},$$

我们得到第一种类型的无界解:

$$u_{v_1}(\xi) = u_5 - \frac{(u_5-u_4) \left( 1 - \exp\left( \sqrt{\frac{a}{9b}(u_5-u_4)}\xi \right) \right)^2}{\left( 1 + \exp\left( \sqrt{\frac{a}{9b}(u_5-u_4)}\xi \right) \right)^2}, \quad \xi > 0.$$

对于轨道  $\Gamma_2$ , 采用类似的计算可以求出相应的无界解, 其形式与  $u_{v_1}(\xi)$  相同。

$U_2$ : 考虑图 1(a) 中的第二种无界轨道, 以  $\Gamma^3$  为例, 其能量低于鞍点  $P_1$ , 但高于中心  $P_2$ 。任意一个轨道可以表示为:

$$v = \pm \sqrt{\frac{a}{9b} \sqrt{(u_6-u)(u_7-u)(u_8-u)}}$$

这里  $-\infty < u < u_6 < u_7 < u_8$ 。选择一个初始值  $u(0) = -\infty$ , 有:

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{9b} \sqrt{(u_6-u)(u_7-u)(u_8-u)}}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0.$$

通过计算,

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{\sqrt{(u_6-u)(u_7-u)(u_8-u)}} = g \cdot \operatorname{sn}^{-1} \left( \sqrt{\frac{u_8-u_6}{u_8-u}}, k \right),$$

这里  $g = \frac{2}{\sqrt{u_8-u_6}}$ ,  $k^2 = \frac{u_3-u_2}{u_3-u_1}$ , 我们得到第二种类型的无界解:

$$u_{v_2}(\xi) = u_8 - \frac{(u_8-u_6)}{\operatorname{sn}^2 \left( \sqrt{\frac{a(u_8-u_6)}{9b}} \right)}, \quad 0 < \xi < \xi_1,$$

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{36b}{u_8-u_6}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{u_8-u_7}{u_8-u_6} \sin^2 \theta}}.$$

$U_3$ : 考虑图 1(a) 中的第三种无界轨道, 以  $\Gamma_4$  为例, 其能量等于中心  $P_2$ 。其轨道可以被表示为:

$$v = \pm \sqrt{\frac{a}{9b} \sqrt{(u_{10}-u)^2(u_9-u)}},$$

这里  $u_9 = \frac{c-2\sqrt{c^2+2ae}}{a}$ ,  $u_{10} = \frac{c+\sqrt{c^2+2ae}}{a}$  并且  $-\infty < u < u_9 < u_{10}$ 。类似的选择  $\Gamma_4$  上面的轨道, 给定初

值  $u(0) = -\infty$ ，有以下精确表达式：

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{9b}(u_{10}-u)}\sqrt{(u_9-u)}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0,$$

注意到：

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{(u_{10}-u)\sqrt{(u_9-u)}} = \frac{1}{\sqrt{u_{10}-u_9}} \left( \pi - \arctan \sqrt{\frac{u_9-u}{u_{10}-u_9}} \right),$$

我们得到第三种类型的无界轨道：

$$u_{v_3}(\xi) = u_9 - (u_{10} - u_9) \tan^2 \left( \sqrt{\frac{a(u_{10}-u_9)}{9b}} \xi \right), \quad 0 < \xi < \xi_2$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{9b}{a(u_{10}-u_9)}} \cdot \pi.$$

U<sub>4</sub>：考虑图 1(a) 中的第四种无界轨道，以  $\Gamma_5$  为例，其能量低于中心  $P_1$ 。任一轨道可以被表示为

$$v = \pm \sqrt{\frac{a}{9b}} \sqrt{(u_{11}-u) \left[ u^2 + \left( u_{11} - \frac{3c}{a} \right) u + \left( u_{11}^2 - \frac{3c}{a} u_{11} - \frac{6e}{a} \right) \right]},$$

在这里  $-\infty < u < u_{11} < u_9$ 。令  $u(0) = -\infty$ ，有

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{9b}} \sqrt{(u_{11}-u) \left[ u^2 + \left( u_{11} - \frac{3c}{a} \right) u + \left( u_{11}^2 - \frac{3c}{a} u_{11} - \frac{6e}{a} \right) \right]}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0,$$

通过计算：

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{9b}} \sqrt{(u_{11}-u) \left[ u^2 + \left( u_{11} - \frac{3c}{a} \right) u + \left( u_{11}^2 - \frac{3c}{a} u_{11} - \frac{6e}{a} \right) \right]}} = g \cdot cn^{-1} \left( \sqrt{\frac{u_{11}-A-u}{u_{11}+A-u}}, k \right),$$

这里  $A^2 = 3u_{11}^2 - \frac{6c}{a}u_{11} - \frac{6e}{a}$ ， $g = \frac{1}{\sqrt{A}}$  以及  $k^2 = \frac{2Aa + 3au_{11} - 3c}{4A}$ 。我们可以得到第四种类型的解：

$$u_{v_4}(\xi) = u_{11} + \sqrt{3u_{11}^2 - \frac{6c}{a}u_{11} - \frac{6e}{a}} - \frac{2\sqrt{3u_{11}^2 - \frac{6c}{a}u_{11} - \frac{6e}{a}}}{1 - cn \left( \sqrt[4]{\frac{\left( 3u_{11}^2 - \frac{6c}{a}u_{11} - \frac{6e}{a} \right) a^2}{81b^2}} \right)}, \quad 0 < \xi < \xi_3,$$

$$\xi_3 = \frac{12\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt[4]{3u_{11}^2 - \frac{6c}{a}u_{11} - \frac{6e}{a}}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2a\sqrt{3u_{11}^2 - \frac{6c}{a}u_{11} - \frac{6e}{a}} - 3au_{11} - 3c}}{\sqrt[4]{3u_{11}^2 - \frac{6c}{a}u_{11} - \frac{6e}{a}}} \cdot \sin^2 \theta}}$$

U<sub>5</sub>: 考虑图 1(a)中的第五种无界轨道, 以  $\Gamma_6$  为例, 其能量高于中心  $P_2$ 。任一轨道可以被表示为

$$v = \pm \sqrt{\frac{a}{9b}} \sqrt{(u_{12} - u) \left[ u^2 + \left( u_{12} - \frac{3c}{a} \right) u + \left( u_{12}^2 - \frac{3c}{a} u_{12} - \frac{6e}{a} \right) \right]},$$

在这里  $u_{12} > \frac{c + 2\sqrt{c^2 + 2ae}}{a}$ ,  $-\infty < u < u_{12}$ 。令  $u(0) = -\infty$ , 有

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{9b} \sqrt{(u_{12} - u) \left[ u^2 + \left( u_{12} - \frac{3c}{a} \right) u + \left( u_{12}^2 - \frac{3c}{a} u_{12} - \frac{6e}{a} \right) \right]}}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0,$$

类似的计算如 U<sub>4</sub>, 可以得到第五种类型的无界解:

$$u_{v_5}(\xi) = u_{12} + \sqrt{3u_{12}^2 - \frac{6c}{a}u_{12} - \frac{6e}{a}} - \frac{2\sqrt{3u_{12}^2 - \frac{6c}{a}u_{12} - \frac{6e}{a}}}{1 - cn \sqrt[4]{\frac{\left(3u_{12}^2 - \frac{6c}{a}u_{12} - \frac{6e}{a}\right)a^2}{81b^2}}}, \quad 0 < \xi < \xi_4,$$

$$\xi_4 = \frac{12\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt[4]{3u_{12}^2 - \frac{6c}{a}u_{12} - \frac{6e}{a}}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2a\sqrt{3u_{12}^2 - \frac{6c}{a}u_{12} - \frac{6e}{a}} - 3au_{12} - 3c}}{\sqrt[4]{3u_{12}^2 - \frac{6c}{a}u_{12} - \frac{6e}{a}}} \cdot \sin^2 \theta}}.$$

2) 接下来, 我们讨论  $c^2 + 2ae = 0$  的情况。这里包含了 2 种情况(U<sub>6</sub>~U<sub>7</sub>)。

U<sub>6</sub>: 考虑图 1(b)中的第一种无界轨道  $L^1$  和  $L_2$ , 其能量等于尖点  $P_3$ 。它们可以分别表示为:

$$v = \pm \sqrt{\frac{a}{9b}} \left( \frac{c}{a} - u \right) \sqrt{\frac{c}{a} - u},$$

这里  $-\infty < u < \frac{c}{a}$ 。选择  $u(0) = -\infty$ , 有

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{9b} \left( \frac{c}{a} - u \right) \sqrt{\frac{c}{a} - u}}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0,$$

直接计算, 可以得到第六种无界解:

$$u_{v_6}(\xi) = \frac{c}{a} - \frac{36b}{a\xi^2}, \quad \xi > 0.$$

U<sub>7</sub>: 考虑图 1(b)中的第一种无界轨道  $L_1$  或  $L_3$ , 其能量等于尖点  $P_3$ 。任意一个轨道可被表示为:

$$v = \pm \sqrt{\frac{a}{9b}} \sqrt{(u_{13} - u) \left[ u^2 + \left( u_{13} - \frac{3c}{a} \right) u + \left( u_{13}^2 - \frac{3c}{a} u_{13} - \frac{6e}{a} \right) \right]},$$

在这里  $-\infty < u < u_{13}$  同时  $u_{13} \neq \frac{c}{a}$ 。给定初值  $u(0) = -\infty$ , 直接计算可以得到第七种无界轨道:



$$u_{v_7}(\xi) = u_{13} + \sqrt{3u_{13}^2 - \frac{6c}{a}u_{13} - \frac{6e}{a}} - \frac{2\sqrt{3u_{13}^2 - \frac{6c}{a}u_{13} - \frac{6e}{a}}}{1 - cn \sqrt[4]{\frac{\left(3u_{13}^2 - \frac{6c}{a}u_{13} - \frac{6e}{a}\right)a^2}{81b^2}}}, \quad 0 < \xi < \xi_5,$$

$$\xi_5 = \frac{12\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt[4]{3u_{13}^2 - \frac{6c}{a}u_{13} - \frac{6e}{a}}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2a\sqrt{3u_{13}^2 - \frac{6c}{a}u_{13} - \frac{6e}{a}} - 3au_{13} - 3c}}{\sqrt[4]{3u_{13}^2 - \frac{6c}{a}u_{13} - \frac{6e}{a}}} \cdot \sin^2 \theta}}.$$

3) 最后, 我们讨论  $c^2 + 2ae < 0$  的情况。这种情况下, 只有一种类型的无界轨道。任意一个都可以被表示为:

$$v = \pm \sqrt{\frac{a}{9b}} \sqrt{(u_{14} - u) \left[ u^2 + \left( u_{14} - \frac{3c}{a} \right) u + \left( u_{14}^2 - \frac{3c}{a} u_{14} - \frac{6e}{a} \right) \right]},$$

在这里  $-\infty < u < u_{14}$ 。给定初值  $u(0) = -\infty$ , 有

$$\int_{-\infty}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{9b} \sqrt{(u_{14} - u) \left[ u^2 + \left( u_{14} - \frac{3c}{a} \right) u + \left( u_{14}^2 - \frac{3c}{a} u_{14} - \frac{6e}{a} \right) \right]}}} = \int_0^\xi d\xi, \quad \xi > 0$$

因此, 我们得到了最后一个无界解:

$$u_{v_8}(\xi) = u_{14} + \sqrt{3u_{14}^2 - \frac{6c}{a}u_{14} - \frac{6e}{a}} - \frac{2\sqrt{3u_{14}^2 - \frac{6c}{a}u_{14} - \frac{6e}{a}}}{1 - cn \sqrt[4]{\frac{\left(3u_{14}^2 - \frac{6c}{a}u_{14} - \frac{6e}{a}\right)a^2}{81b^2}}}, \quad 0 < \xi < \xi_6,$$

$$\xi_6 = \frac{12\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt[4]{3u_{14}^2 - \frac{6c}{a}u_{14} - \frac{6e}{a}}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2a\sqrt{3u_{14}^2 - \frac{6c}{a}u_{14} - \frac{6e}{a}} - 3au_{14} - 3c}}{\sqrt[4]{3u_{14}^2 - \frac{6c}{a}u_{14} - \frac{6e}{a}}} \cdot \sin^2 \theta}}.$$

#### 4. 结论

本文应用动力系统分岔法延伸了以前的工作同时研究了当  $n = 1$  时,  $(3 + 1)$  维 Zakharov-Kuznetsov 方程的所有类型的单波解。我们的结果展示了  $n = 1$  时的所有的 ZK 方程行波解可以被划分为 10 种类型, 包括周期波解、孤波解和 8 种类型的无界行波解。它们的精确表达式完全可以用各种椭圆函数来计算。

## 参考文献

- [1] Dong, Z.Z., Chen, Y. and Lang, Y.H. (2010) Symmetry Reduction and Exact Solutions of the (3 + 1)-Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation. *Chinese Physics B*, **19**, Article ID: 090205(1-7). <https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/9/090205>
- [2] Zhang, W.B. and Zhou, J.B. (2012) Traveling Wave Solutions of a Generalized Zakharov-Kuznetsov Equation. *ISRN Mathematical Analysis*, **2012**, 1-10. <https://doi.org/10.5402/2012/107846>
- [3] Lü, D.Z., Cui, Y.Y., Lü, C. and Huang, S.Y. (2013) New Interaction Solutions of (3 + 1)-Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation. *Indian Journal of Physics*, **87**, 897-901. <https://doi.org/10.1007/s12648-013-0302-8>
- [4] Sahoo, S. and Saha Ray, S. (2015) Improved Fractional Sub-Equation Method for (3 + 1)-Dimensional Generalized Fractional KdV-Zakharov-Kuznetsov Equations. *Computers Mathematics with Applications*, **70**, 158-166. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.05.002>
- [5] Moleleki, L.D., Muatjetjeja, B. and Adem, A.R. (2017) Solutions and Conservation Laws of a (3 + 1)-Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation. *Nonlinear Dynamics*, **87**, 2187-2192. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3182-6>
- [6] Lu, D.C., Seadawy, A.R., Arshad, M. and Wang, J. (2017) New Solitary Wave Solutions of (3 + 1)-Dimensional Nonlinear Extended Zakharov-Kuznetsov and Modified KdV-Zakharov-Kuznetsov Equations and Their Applications. *Results in Physics*, **7**, 899-909. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2017.02.002>
- [7] Korkmaz, A. (2017) Exact Solutions to (3 + 1) Conformable Time Fractional Jimbo-Miwa, Zakharov-Kuznetsov and Modified Zakharov-Kuznetsov Equations. *Communications in Theoretical Physics*, **67**, 479-482. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/67/5/479>
- [8] Seadawy, A.R. and Lu, D. (2016) Ion-Acoustic Solitary Wave Solutions of Three-Dimensional Nonlinear Extended Zakharov-Kuznetsov Dynamical Equation in a Magnetized Two-Ion-Temperature Dusty Plasma. *Results in Physics*, **6**, 590-593. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2016.08.023>
- [9] Yokus, A., Kuzu, B. and Demiroglu, U. (2019) Investigation of Solitary Wave Solutions for the (3 + 1)-Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation. *International Journal of Modern Physics B*, **33**, Article ID: 1950350(1-19). <https://doi.org/10.1142/S0217979219503508>
- [10] Osman, M.S., Rezazadeh, H. and Eslami, M. (2019) Traveling Wave Solutions for (3 + 1) Dimensional Conformable Fractional Zakharov-Kuznetsov Equation with Power Law Nonlinearity. *Nonlinear Engineering*, **8**, 559-567. <https://doi.org/10.1515/nleng-2018-0163>
- [11] Zhang, Z.F., Ding, T.R., Huang, W.Z. and Dong, Z.X. (1992) Qualitative Theory of Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, RI.
- [12] Wei, L. and Ren, M.R. (2019) Bounded Traveling Wave Solutions of the (3 + 1)-Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation with Power Law Nonlinearity. *Schoras Journal of Physics*, **7**, 1-5.