Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(9), 1508-1521
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.99177

Hans汉斯

分数阶Schrödinger-Poisson系统正束缚态解的存在性

闫云霞[1]，滕凯民[1]，崔艳丽[2]

[1]太原理工大学数学学院，山西 晋中
[2]防空兵学院郑州校区教学考评中心，河南 郑州
Email: 18404904342@163.com, tengkaimin2013@163.com, 619806227@qq.com

收稿日期：2020年8月21日；录用日期：2020年9月10日；发布日期：2020年9月17日

摘 要

本文研究如下分数阶Schrödinger-Poisson系统

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+V(x)u+K(x)\phi u=Q(x)|u|^{p-1}u, & x\in R^3\\(-\Delta)^t\phi=K(x)u^2, & x\in R^3,\end{cases}$$

其中 $s,t\in(0,1)$，$2s+2t>3$，$p\in(3,5)$。在位势满足适当假设下，我们采用Nehari流形方法及结合形变讨论证明了正束缚态解的存在性。

关键词

分数阶Schrödinger-Poisson系统，变分法，束缚态解

Existence of Positive Bound State Solutions for Fractional Schrödinger-Poisson System

Yunxia Yan[1], Kaimin Teng[1], Yanli Cui[2]

[1]School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi
[2]Teaching Evaluation Center, Zhengzhou Campus of Air Defense Academy, Zhengzhou Henan
Email: 18404904342@163.com, tengkaimin2013@163.com, 619806227@qq.com

Received: Aug. 21st, 2020; accepted: Sep. 10th, 2020; published: Sep. 17th, 2020

文章引用: 闫云霞, 滕凯民, 崔艳丽. 分数阶 Schrödinger-Poisson 系统正束缚态解的存在性[J]. 应用数学进展, 2020, 9(9): 1508-1521. DOI: 10.12677/aam.2020.99177

Abstract

This paper is to deal with the following fractional Schrödinger-Poisson system

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+V(x)u+K(x)\phi u=Q(x)|u|^{p-1}u, & x\in R^3\\ (-\Delta)^t\phi=K(x)u^2, & x\in R^3,\end{cases}$$

where $s,t\in(0,1)$, $2s+2t>3$, $p\in(3,5)$. Under some suitable assumptions for the potentials, we prove the existence of positive bound state solutions by using the Nehari manifold method combining with the deformation argument.

Keywords

Fractional Schrödinger-Poisson System, Variational Methods, Bound State Solutions

1. 引言

本文研究如下分数阶 Schrödinger-Poisson 系统

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+V(x)u+K(x)\phi u=Q(x)|u|^{p-1}u, & x\in R^3,\\ (-\Delta)^t\phi=K(x)u^2, & x\in R^3,\end{cases} \tag{1}$$

正束缚态解的存在性，其中$s,t\in(0,1)$，$2s+2t>3$，$p\in(3,5)$，位势$V(x)$，$K(x)$和$Q(x)$满足合适的假设。

当$s=t=1$时，问题(1)退化为经典的 Schrodinger-Poisson 系统，其更一般的形式记为：

$$\begin{cases}-\Delta u+V(x)u+K(x)\phi u=f(x,u), & x\in R^3\\ -\Delta\phi=K(x)u^2, & x\in R^3.\end{cases} \tag{2}$$

该系统出现在量子力学模型和半导体理论中[1] [2]，非线性项$f(x,u)$表示粒子的相互作用，$K(x)\phi u$表示与电场的相互作用。

近年来，对于$V(x)$，$K(x)$和$f(x,u)$的不同假设，很多学者对系统(2)进行了大量的研究，可参见[3] [4] [5]等。在文献[4]中，作者用热流法证明了当$V=K\equiv1$，$f=|u|^{p-2}u$且$4<p<6$时，系统(2)具有指定变号次数的径向变号解。当V为非径向，$K\equiv1$，$f=|u|^{p-2}u$时，在文献[3]和[5]中分别证明了$4<p<6$和$3<p\le4$时系统(2)存在基态解。

我们记问题(1)的一般形式为

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+V(x)u+K(x)\phi u=f(x,u), & x\in R^3\\ (-\Delta)^t\phi=K(x)u^2, & x\in R^3.\end{cases} \tag{3}$$

在文献[6]中，当$V(x)=0$，$K(x)=\lambda>0$且$f(x,u)$具有一般的临界或次临界非线性时，作者证明了径向基态解的存在性。在文献[7]中，当$f(x,u)=|u|^{p-1}u$，$p\in(2,2_s^*-1)$时，作者用 Nehari-Pohozaev 流形方法证明了正基态解的存在性。在文献[8]中，作者研究了当$V(x)=1$，$f(x,u)=a(x)|u|^{p-2}u+|u|^{2_s^*-2}u$时，

系统(3)存在基态解和变号解。关于该系统的研究进展可参见[9] [10] [11] [12]等等。

本文的目的是描述当系数$V(x)$，$K(x)$和$Q(x)$竞争时发生的一些现象。为了陈述我们的主要结果，令

$$V(x)=V_\infty+a(x),\ Q(x)=Q_\infty-b(x)$$

其中$a(x)$和$b(x)$满足下面的假设：

(H_1) $a(x)\in L^2(R^3)$，$a(x)\ge 0$，$a(x)\not\equiv 0$且$\lim_{|x|\to\infty}a(x)=0$；

(H_2) $b(x)\in L^\infty(R^3)$，$0\le b(x)<Q_\infty$，$b(x)\not\equiv 0$且$\lim_{|x|\to\infty}b(x)=0$；

(H_3) $K(x)\in L^{\frac{6}{4s+2t-3}}(R^3)\cap L^{\frac{2}{2t-1}}(R^3)$，$K(x)\ge 0$，$K(x)\not\equiv 0$且存在$R_0>0$使得当$|x|\ge R_0$时，

$$K(x)\le\frac{1}{(1+|x|)^{3-2t}}.$$

此时，问题(1)变为下面的形式：

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u+(V_\infty+a(x))u+K(x)\phi u=(Q_\infty-b(x))|u|^{p-1}u, & x\in R^3,\\ (-\Delta)^t\phi=K(x)u^2, & x\in R^3.\end{cases}\tag{4}$$

就目前的文献来看，关于分数阶 Schrödinger-Poisson 系统(1)，在位势$V(x)$，$K(x)$和$Q(x)$满足上述假设的条件下，其束缚态解的研究成果还不多见。本文的目的是推广文献[13]中的主要结果到非局部情形。该推广是非平凡的，一方面由于$(-\Delta)^s$的非局部性，使得文献[13]中的方法不能够直接使用。另一方面，极限方程在无穷远的衰减性是多项式衰减的，而不是指数阶衰减，这会需要更加精细的估计。因此，本文的研究结果更加具有一般性。

下面陈述本文的主要结果：

定理 1.1 假设条件(H_1)~(H_3)成立且

(H_4) $\int_{R^3}a^2(x)(1+|x|)^2\,\mathrm{d}x<+\infty$，$\int_{R^3}b^2(x)(1+|x|)^2\,\mathrm{d}x<+\infty$。则系统(1)存在正束缚态解。

这篇论文的结构如下。在第 2 节，我们给出了工作空间和准备性引理。在第 3 节，我们给出了定理 1.1 的证明。

2. 预备知识

2.1. 工作空间

定义分数阶 Sobolev 空间$D^{s,2}(R^3)$为：

$$D^{s,2}(R^3)=\left\{u\in L^{2_s^*}(R^3):\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2\mathrm{d}x<+\infty\right\},$$

其对应的范数为

$$\|u\|_{D^{s,2}}=\left(\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

接着引入 Hilbert 空间$H^s(R^3)$，定义为：

$$H^s(R^3)=\left\{u\in L^2(R^3):\int_{R^3}\left(\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2+V_\infty|u|^2\right)\mathrm{d}x<+\infty\right\},$$

其上赋予内积

$$\langle u,v\rangle=\int_{R^3}\left((-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v+V_\infty uv\right)\mathrm{d}x,$$

及对应的范数为

$$\|u\|_{H^s}=\left(\int_{R^3}\left(\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2+V_\infty|u|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

接着，我们介绍要使用到的符号：

- $1\le q\le\infty$，$O\in R^3$ 是一个可测集，$L^q(O)$ 表示 Lebesgue 空间。当 O 是 R^3 的可测子集时，用 $|\cdot|_{L^q(O)}$ 表示 $L^q(O)$ 的范数；当 $O=R^3$ 时，用 $|\cdot|_q$ 表示 $L^q(O)$ 的范数。
- $B_R(y)$ 表示以 y 为中心 R 为半径的球；当 $y=0$ 时，我们用 B_R 来表示。
- c,C,c_i,C_i 表示不同的正常数。

2.2. 准备性引理

对任何固定的 $u\in H^s(R^3)$，定义泛函 $L_u:D^{t,2}(R^3)\to R$ 为

$$L_u(v)=\int_{R^3}K(x)u^2v\mathrm{d}x,$$

注意到，当 $4s+2t\ge3$ 时，$H^s(R^3)$ 嵌入 $L^{\frac{12}{3+2t}}(R^3)$，利用(H$_3$)推得

$$\begin{aligned}|L_u(v)|&\le\left(\int_{B_{R_0}}|K|^{\frac{6}{4s+2t-3}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{4s+2t-3}{6}}\left(\int_{B_{R_0}}|u|^{\frac{6}{3-2s}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3-2s}{3}}\left(\int_{B_{R_0}}|v|^{\frac{6}{3-2t}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3-2t}{6}}+C\int_{B_{R_0}^c}u^2v\mathrm{d}x\\&\le\left(\int_{B_{R_0}}|K|^{\frac{6}{4s+2t-3}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{4s+2t-3}{6}}|u|^2_{L^{\frac{6}{3-2s}}(R^3)}|v|_{L^{\frac{6}{3-2t}}(R^3)}+C\left(\int_{B_{R_0}^c}|u|^{\frac{12}{3+2t}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3+2t}{6}}\left(\int_{B_{R_0}^c}|v|^{\frac{6}{3-2t}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3-2t}{6}}\\&\le C\|u\|^2_{H^s}\|v\|_{D^{t,2}(R^3)}.\end{aligned}$$

因此，L_u 是 $D^{t,2}(R^3)$ 上的连续性泛函。应用 Lax-Milgram 定理，存在唯一的 $\phi_{K,u}^t\in D^{t,2}(R^3)$ 满足 $(-\Delta)^t\phi_{K,u}^t=K(x)u^2$，且 $\phi_{K,u}^t$ 的表达式如下：

$$\phi_{K,u}^t=c_t\int_{R^3}\frac{K(y)u^2(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y,\ x\in R^3，\text{其中 } c_t=\pi^{\frac{-3}{2}}2^{-2t}\frac{\Gamma\left(\frac{3-2t}{2}\right)}{\Gamma(t)}.$$

因此，系统(1)约化为分数阶 Schrödinger 方程：

$$(-\Delta)^su+V(x)u+K(x)\phi_{K,u}^tu=Q(x)|u|^{p-1}u,\ u\in H^s(R^3).\tag{5}$$

对应于方程(5)的能量泛函定义为：

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\right|^2+(V_\infty+a(x))u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{R^3}K(x)\phi_{K,u}^tu^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{R^3}(Q_\infty-b(x))|u|^{p+1}\mathrm{d}x.$$

显然，$I\in C^1(H^s(R^3),R)$ 并且其临界点是问题(5)的弱解。因此，为了找到系统(1)的解，我们只需找到泛函 I 的临界点即可，事实上，如果 $u\in H^s(R^3)$ 是 I 的临界点，那么 $(u,\phi_{K,u}^t)$ 就是系统(1)的弱解。

下面给出 $\phi_{K,u}^t$ 的性质[8]。

引理 2.1 对任意的 $u\in H^s(R^3)$，有

(i) $\phi_{K,u}^t \ge 0$；

(ii) $\phi_{K,lu}^t = l^2\phi_{K,u}^t, \forall l \in R$；

(iii) $\int_{R^3} K(x)\phi_{K,u}^t u^2 \mathrm{d}x \le c\|u\|_{H^s}^4$。

证 (i)和(ii)是显然成立的，下面只需证明结论(iii)。由(H_3)，Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理有

$$\left|\phi_{K,u}^t\right|_{L^{\frac{6}{3-2t}}}^2 \le \left\|\phi_{K,u}^t\right\|_{D^{t,2}}^2 = \int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac{t}{2}}\phi_{K,u}^t\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{R^3} K(x)u^2\phi_{K,u}^t \mathrm{d}x \le |K|_{L^{\frac{6}{4s+2t-3}}}|u|_{L^{\frac{6}{3-2s}}}^2\left|\phi_{K,u}^t\right|_{L^{\frac{6}{3-2t}}} \le C\|u\|_{H^s}^2\left|\phi_{K,u}^t\right|_{L^{\frac{6}{3-2t}}},$$

因此，由上式可得，$\left|\phi_{K,u}^t\right|_{L^{\frac{6}{3-2t}}} \le C\|u\|_{H^s}^2$。结论(iii)得证。

类似于文献[14]中命题 2.2 的证明，不难证得如下结论：

定理 2.2 设序列 u_n 满足 $u_n \subset H^s(R^3)$，如果在 $H^s(R^3)$ 中 u_n 弱收敛于 u，那么

(i) $\phi_{K,u_n}^t \to \phi_{K,u}^t$ 在 $D^{t,2}(R^3)$ 中；

(ii) $\int_{R^3} K(x)\phi_{K,u_n}^t u_n^2 \mathrm{d}x \to \int_{R^3} K(x)\phi_{K,u}^t u^2 \mathrm{d}x$；

(iii) $\int_{R^3} K(x)\phi_{K,u_n}^t u_n\varphi \mathrm{d}x \to \int_{R^3} K(x)\phi_{K,u}^t u\varphi \mathrm{d}x, \forall \varphi \in H^s(R^3)$。

由于泛函 I 在 $H^s(R^3)$ 中既无上界也无下界，简单计算可知泛函 I 限制在 Nehari 流形 N 上有下界，其中

$$N := \left\{u \in H^s(R^3)\setminus\{0\} : I'(u)[u] = 0\right\}.$$

显然，Nehari 流形 N 包含了泛函 I 的所有临界点，通常称极小化问题的极小元为极小能量解或基态解。根据标准的讨论，易证得 Nehari 流形 N 具有如下性质：

引理 2.3 (i)存在正常数 $c > 0$，使得对于所有的 $u \in N$，

$$|u|_{p+1} \ge c > 0.$$

(ii) N 是 C^1 正则流行且微分同胚于 $H^s(R^3)$ 的球面。

(iii) I 限制在 N 上有正下界。

(iv) u 是 I 在 $H^s(R^3)$ 上的临界点当且仅当 u 是 I 限制在 Nehari 流形 N 上的临界点。

下面考虑问题(5)对应的极限方程为：

$$(-\Delta)^s u + V_\infty u = Q_\infty |u|^{p-1} u, \tag{7}$$

其对应的能量泛函 $I_\infty : H^s(R) \to R$ 定义如下

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\right|^2 + V_\infty u^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_{R^3} Q_\infty |u|^{p+1} \mathrm{d}x.$$

易证 $I_\infty \in C^2\left(H^s(R^3), R\right)$，并记泛函 I_∞ 对应的 Nehari 流形为

$$N_\infty := \left\{u \in H^s(R^3)\setminus\{0\} : I_\infty'(u)[u] = 0\right\}.$$

设

$$m_\infty := \inf_{u \in N_\infty} I_\infty(u).$$

由文献[15]中的结果知，问题(7)存在唯一正基态解 $\omega \in H^s(R^3)$，满足 $\lim_{|x|\to\infty}\omega(x) = 0$，且存在 $c > 0$ 使得

$$0 < \omega(x) \le \frac{c}{(1+|x|)^{3+2s}}, \quad \forall x \in R^3. \tag{8}$$

对于 I_∞ 的任一变号临界点，下面关系式成立：

$$I_\infty(u) \ge 2m_\infty. \tag{9}$$

现在，我们考虑约束极小化问题 $m := \inf\{I(u): u \in N\}$。我们发现最小能量 m 与 m_∞ 之间的关系。

引理 2.4 $m = m_\infty$ 且 m 不可达。

证 设 $u \in N$，则存在 $t_u > 0$ 满足 $t_u u \in N_\infty$。因此，易得

$$I(u) > I(t_u u) \ge \frac{t_u^2}{2}\|u\|_{H^s}^2 - \frac{t_u^{p+1}}{p+1}\int_{R^3} Q_\infty |u|^{p+1}\,dx = I_\infty(t_u u) \ge m_\infty,$$

故 $m \ge m_\infty$。

下面我们要找到一组序列 $(u_n)_n$，$u_n \in N$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} I(u_n) = m_\infty$。为此，我们考虑 $(y_n)_n$，$y_n \in R^3$，且当 $n \to \infty$ 时，$|y_n| \to +\infty$。设 $u_n = t_n\omega_{y_n} = t_n\omega(\cdot - y_n)$，其中 $t_n = t(\omega_{y_n})$ 满足 $u_n = t_n\omega_{y_n} \in N$，那么

$$\begin{aligned}
I(u_n) &= \frac{t_n^2}{2}{}_n\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\omega_{y_n}\right|^2 dx + \frac{t_n^2}{2}\int_{R^3}(V_\infty + a(x))\omega_{y_n}^2\,dx \\
&\quad + \frac{t_n^4}{4}\int_{R^3} K(x)\phi_{K,\omega_{y_n}}^t \omega_{y_n}^2\,dx - \frac{t_n^{p+1}}{p+1}\int_{R^3}(Q_\infty - b(x))|\omega_{y_n}|^{p+1}\,dx \\
&= \frac{t_n^2}{2}{}_n\int_{R^3}\left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\omega\right|^2 dx + \frac{t_n^2}{2}\int_{R^3}(V_\infty + a(x+y_n))\omega^2\,dx \\
&\quad + \frac{t_n^4}{4}\int_{R^3} K(x+y_n)\phi_{K,\omega_{y_n}}^t \omega^2\,dx - \frac{t_n^{p+1}}{p+1}\int_{R^3}(Q_\infty - b(x+y_n))|\omega|^{p+1}\,dx.
\end{aligned}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理及假设(H_1)~(H_3)可推得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^3} a(x+y_n)\omega^2 = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{R^3} b(x+y_n)|\omega|^{p+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^3} K(x+y_n)\phi_{K,\omega}^t\omega^2 = 0.$$

结合 $t_n\omega_{y_n} \in N$，推出 $1 \le t_n \le c$，其中 $c > 0$ 是一正常数。因此，由 $p \in (3,5)$ 及 $\omega \in N_\infty$，有 $t_n \to 1$，从而 $I(u_n) \to m_\infty$。

反证法。假设存在 $v \in N$ 满足 $I(v) = m = m_\infty$。显然，存在 $\kappa_v > 0$ 满足 $\kappa_v v \in N_\infty$，经计算得

$$\begin{aligned}
m_\infty \le I_\infty(\kappa_v v) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|\kappa_v v\|_{H^s}^2 \\
&\le \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|\kappa_v v\|_{H^s}^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}\right)\int_{R^3} K(x)\phi_{K,\kappa_v v}^t |\kappa_v v|^2\,dx \\
&\le I(\kappa_v v) \le I(v) = m = m_\infty.
\end{aligned}$$

这说明 $\kappa_v = 1$ 且 $\int_{R^3} K(x)\phi_{K,v}^t|v|^2\,dx = 0$，因此 $v \in N_\infty$ 且 $I_\infty(v) = m_\infty$。

另一方面，由问题(7)的解的唯一性知，存在 $y \in R^3$，对于每一个 $x \in R^3$，满足 $v(x) = \omega(x-y) > 0$，也就是说 $\int_{R^3} K(x)\phi_{K,v}^t|v|^2\,dx > 0$，矛盾。证毕。

我们试图在 $(m_\infty, 2m_\infty)$ 中找到一个高能量水平解，为此，需要下面的全局紧性引理来恢复 PS 序列的紧性。

引理 2.5 ([12]，引理 3.1)设 u_n 是 I 限制在 N 上的 PS 序列，也就是说，

$$I(u_n) \to c,\quad \nabla I|_N(u_n) \to 0$$

问题(5)的解为 u，子序列仍用 u_n 表示，则

要么在 $H^s\left(R^3\right)$ 中 $u_n \to u$ 成立；

要么在 $H^s\left(R^3\right)$ 中 u_n 弱收敛于 u，且存在整数 $k \ge 1$，函数列 $u^1,\cdots,u^k$，点击序列 $\left\{y_n^j\right\} \subset R^3$，$1 \le j \le k$，满足

1) 当 $n \to \infty$，$i \ne j$ 时，$\left|y_n^j\right| \to +\infty$，$\left|y_n^i - y_n^j\right| \to +\infty$；

2) $u_n - \sum_{j=1}^{k} u^j\left(\cdot - y_n^j\right) \to u$；

3) $I\left(u_n\right) \to I(u) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty\left(u^j\right)$；

4) u^j 是问题(7)的非平凡解。

3. 定理 1.1 的证明

下面我们采用拓扑方法来证明，当(5)没有基态解时，存在更高能量解。设

$$\mu(u)(x) = \frac{1}{\left|B_1(0)\right|}\int_{B_1(x)} \left|u(y)\right| \mathrm{d}y,$$

那么 $\mu(u) \in L^\infty\left(R^3\right)$ 且在 $H^s\left(R^3\right)$ 中连续。令

$$\hat{u}(x) = \left[\mu(u)(x) - \frac{1}{2}\max \mu(u)(x)\right]^+,$$

易证 $\hat{u}(x) \in C_0\left(R^3\right)$。定义 $\beta : H^s\left(R^3\right)\setminus\{0\} \to R^3$ 如下：

$$\beta(u) = \frac{1}{\left|\hat{u}\right|_1}\int_{R^3} x\hat{u}(x)\mathrm{d}x \in R^3.$$

因为 $\hat{u}$ 有紧支集，故 β 的定义有意义且具有以下性质：

1) β 在 $H^s\left(R^3\right)\setminus\{0\}$ 中连续；

2) 若 u 是径向函数，则 $\beta(u) = 0$；

3) 对于所有 $t \ne 0$，$u \in H^s\left(R^3\right)$，有 $\beta(tu) = \beta(u)$；

4) 给定 $z \in R^3$，设 $u_z(x) = u(x - z)$，则 $\beta\left(u_z\right) = \beta(u) + z$。

由引理 2.4 我们知道 m 不可达，借助重心映射 β，我们加细 Nehari 流形，构造新的约束。为此，定义极小化问题如下：

$$B_0 := \inf\left\{I(u) : u \in N, \beta(u) = 0\right\}.$$

显然，$m = m_\infty \le B_0$ 且下面的严格不等式成立。

类似于文献[14]中引理 3.3 的证明，我们可得：

引理 3.1 $m = m_\infty < B_0$。

引理 3.2 I 限制在 N 上在 $\left(m_\infty, 2m_\infty\right)$ 中满足 PS 条件。

证 设 u_n 是 $I|_N$ 的 PS 序列满足 $I\left(u_n\right) \to c \in \left(m_\infty, 2m_\infty\right)$。由引理 2.5，我们有

$$c = I\left(u_n\right) + o_n(1) = I(u) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty\left(u^j\right) + o_n(1).$$

I 的任一临界点 v 满足 $I(v) \ge m = m_\infty$。问题(7)的解 u 满足 $I_\infty(u) \ge m_\infty$。若 u 是变号解，则 $I_\infty(u) \ge 2m_\infty$。故 $\left\{u_n\right\}$ 在 $H^s\left(R^3\right)$ 中强收敛。证毕。

令 $\xi \in R^3$，$|\xi| = 1$ 且 $\Sigma = \left\{z \in R^3 : |z - \xi| = 2\right\}$。对于 $\rho > 0$，$(z, \varsigma) \in \Sigma \times [0,1]$，定义

$$\overline{\psi}_{\rho}[z,\varsigma](x):=(1-\varsigma)\omega_{\rho z}(x)+\varsigma\omega_{\rho\xi}(x)=(1-\varsigma)\omega(x-\rho z)+\varsigma\omega(x-\rho\xi),\ x\in R^3,$$

其中 ω 是问题(7)的一个正基态解。存在正数 $\kappa_{\rho,z,\varsigma}:=\kappa_{\overline{\psi}_{\rho}[z,\varsigma]}$，$\tau_{\rho,z,\varsigma}:=\tau_{\overline{\psi}_{\rho}[z,\varsigma]}$ 使得

$$\psi_{\rho}[z,\varsigma]=\kappa_{\rho,z,\varsigma}\overline{\psi}_{\rho}[z,\varsigma]\in N,\quad \psi_{\infty,\rho}[z,\varsigma]=\tau_{\rho,z,\varsigma}\overline{\psi}_{\rho}[z,\varsigma]\in N_{\infty}. \tag{10}$$

类似于[16]中引理 4.4 的证明，易得如下结论：

引理 3.3 对于所有 $\rho>0$，

$$B_0\le T_{\rho}:=\max_{\Sigma\times[0,1]}I\{\psi_{\rho}[z,\varsigma]\}.$$

为了证明 $T_{\rho}<2m_{\infty}$ 我们做出以下估计。

引理 3.4 ([17]，引理 A.1)设 $0<s<N$ 且 $t>s$，那么

$$\int_{R^N}\frac{1}{|x-y|^{N-s}}\frac{1}{(1+|y|)^t}\mathrm{d}y\le\begin{cases}C(1+|x|)^{s-t} & t<N,\\ C(1+|x|)^{s-N}\left[1+\log(1+|x|)\right] & t=N,\\ C(1+|x|)^{s-N} & t>N.\end{cases}$$

利用引理 3.4 以及假设(H_3)，可得如下得估计：

引理 3.5 对于 $\varsigma\in R^3$ 且 $|\varsigma|\ge1$，

$$\int_{R^3}K(x)\phi^t_{K,\omega_{\rho\varsigma}}\omega^2_{\rho\varsigma}\mathrm{d}x=o(\varepsilon).$$

证 根据(8)、(H_3)、引理 3.4，

$$\begin{aligned}\phi^t_{K,\omega_{\rho\varsigma}}(x)&=\int_{R^3}\frac{K(y)\omega^2_{\rho\varsigma}(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y=\int_{R^3}\frac{K(y)\omega^2(y-\rho\varsigma)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y\le\int_{R^3}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\frac{1}{(1+|y-\rho\varsigma|)^{2(3+2s)}}\mathrm{d}y\\&=\int_{|y|\le\frac13\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\frac{1}{(1+|y-\rho\varsigma|)^{2(3+2s)}}\mathrm{d}y+\int_{|y|>\frac13\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\frac{1}{(1+|y-\rho\varsigma|)^{2(3+2s)}}\mathrm{d}y\\&\le\frac{1}{\left(1+\frac23\rho\right)^{2(3+2s)}}\int_{|y|\le\frac13\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y+\frac{1}{\left(1+\frac13\rho\right)^{3-2t}}\int_{|y|>\frac13\rho}\frac{1}{|x-y|^{3-2t}}\frac{1}{(1+|y-\rho\varsigma|)^{2(3+2s)}}\mathrm{d}y\\&\le C\left[\int_{|y|\le\frac13\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y+\frac{C}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{3-2t}}\right].\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}&\int_{R^3}K(x)\phi^t_{K,\omega_{\rho\varsigma}}(x)\omega^2_{\rho\varsigma}(x)\mathrm{d}x\\&\le C\int_{R^3}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\left[\int_{|y|\le\frac13\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y+\frac{C}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{3-2t}}\right]\mathrm{d}x\\&=C\int_{R^3}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\int_{|y|\le\frac13\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+C\int_{R^3}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\frac{C}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{3-2t}}\mathrm{d}x\\&=C\left(\int_{|x|\le\frac23\rho}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\int_{|y|\le\frac13\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{|x|>\frac23\rho}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\int_{|y|\le\frac13\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right.\\&\quad\left.+\int_{|x|\le\frac23\rho}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\frac{C}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{3-2t}}\mathrm{d}x+\int_{|x|>\frac23\rho}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\frac{C}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{3-2t}}\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

下面利用 Hölder 不等式及(H_3)可得：

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\le\frac{2}{3}\rho}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\int_{|y|\le\frac{1}{3}\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&\le C\int_{|x|\le\frac{2}{3}\rho}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\left(\int_{|y|\le\frac{1}{3}\rho}(K(y))^{\frac{2}{2t-1}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{2t-1}{2}}\left(\int_{|y|\le\frac{1}{3}\rho}\left(\frac{1}{|x-y|^{3-2t}}\right)^{\frac{2}{3-2t}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{3-2t}{2}}\mathrm{d}x\\
&\le C\int_{|x|\le\frac{2}{3}\rho}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\left(\int_{|x-y|\le\rho}\frac{1}{|x-y|^2}\mathrm{d}y\right)^{\frac{3-2t}{2}}\mathrm{d}x\\
&\le C\rho^{\frac{3-2t}{2}}\left(\int_{|x|\le\frac{2}{3}\rho}(K(x))^{\frac{2}{2t-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2t-1}{2}}\left(\int_{|x|\le\frac{2}{3}\rho}\left(\frac{1}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{2(3+2s)}}\right)^{\frac{2}{3-2t}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3-2t}{2}}\\
&\le C\rho^{\frac{3-2t}{2}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\rho\right)^{2(3+2s)}}\rho^{\frac{3-2t}{2}}=C\frac{\rho^{3-2t}}{\left(1+\frac{1}{3}\rho\right)^{6+4s}}\le C\frac{\rho^{3-2t}}{(1+\rho)^{6+4s}}\le C\frac{1}{(1+\rho)^{3+4s+2t}}.
\end{aligned}
$$

当$|x|>\frac{2}{3}\rho$，$|y|\le\frac{1}{3}\rho$时，$|x-y|>\frac{1}{3}\rho$，下面利用(8)、(H_3)、Hölder 不等式及引理 3.4，计算得

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|>\frac{2}{3}\rho}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\int_{|y|\le\frac{1}{3}\rho}\frac{K(y)}{|x-y|^{3-2t}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&\le\int_{|x|>\frac{2}{3}\rho}\frac{K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)}{\left(\frac{1}{3}\rho\right)^{3-2t}}\int_{|y|\le\frac{1}{3}\rho}K(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&\le C\frac{1}{\rho^{3-2t}}\int_{|x|>\frac{2}{3}\rho}K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)\mathrm{d}x\left(\int_{|y|\le\frac{1}{3}\rho}(K(y))^{\frac{2}{2t-1}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{2t-1}{2}}\rho^{\frac{3-2t}{2}}\\
&\le C\frac{1}{\rho^{\frac{3-2t}{2}}}\int_{R^3}\frac{1}{(1+|x|)^{3-2t}}\frac{1}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{2(3+2s)}}\mathrm{d}x\\
&\le C\frac{1}{\rho^{\frac{3-2t}{2}}}\frac{1}{(1+|\rho\varsigma|)^{3-2t}}\le C\rho^{\frac{3-2t}{2}}\frac{1}{(1+\rho)^{3-2t}}.
\end{aligned}
$$

当$|x|\le\frac{2}{3}\rho$时，$|x-\rho\varsigma|\ge\frac{1}{3}\rho$，从而，

$$
\begin{aligned}
&\int_{|x|\le\frac{2}{3}\rho}\frac{K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{3-2t}}\mathrm{d}x\\
&\le\int_{|x|\le\frac{2}{3}\rho}\frac{K(x)}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{2(3+2s)}}\frac{1}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{3-2t}}\mathrm{d}x\\
&\le C\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\rho\right)^{3-2t}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\rho\right)^{2(3+2s)}}\int_{|x|\le\frac{2}{3}\rho}K(x)\mathrm{d}x\\
&\le C\frac{1}{(1+\rho)^{9+4s-2t}}\left(\int_{|x|\le\frac{2}{3}\rho}(K(x))^{\frac{2}{2t-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2t-1}{2}}\rho^{\frac{3-2t}{2}}\le C\frac{1}{(1+\rho)^{\frac{15}{2}+4s-t}}.
\end{aligned}
$$

又

$$\int_{|x|>\frac{2}{3}\rho}\frac{K(x)\omega^2(x-\rho\varsigma)}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{3-2t}}\mathrm{d}x\le C\int_{R^3}\frac{1}{(1+|x|)^{3-2t}}\frac{1}{(1+|x-\rho\varsigma|)^{2(3+2s)}}\mathrm{d}x\le C\frac{1}{(1+\rho)^{3-2t}}.$$

综上所述，记 $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{\rho}}$，引理 3.5 得证。

利用引理 3.5，很容易推得如下估计：

引理 3.6

$$\int_{R^3}K(x)\phi^t_{K,\bar{\psi}_\rho[z,\varsigma]}\bar{\psi}^2_\rho[z,\varsigma]\mathrm{d}x=o(\varepsilon),\ \forall\varsigma\in[0,1],z\in\Sigma. \tag{11}$$

根据假设(H_4)，以及引理 3.4，可得如下估计：

引理 3.7

$$\int_{R^3}\omega^p_{\rho\xi}\omega_{\rho z}\mathrm{d}x=o(\varepsilon),\ \int_{R^3}\omega^p_{\rho z}\omega_{\rho\xi}\mathrm{d}x=o(\varepsilon), \tag{12}$$

$$\int_{R^3}a(x)\omega^2_{\rho\xi}\mathrm{d}x=o(\varepsilon),\ \int_{R^3}a(x)\omega^2_{\rho z}\mathrm{d}x=o(\varepsilon),\ \int_{R^3}a(x)\bar{\psi}^2_\rho[z,\varsigma]\mathrm{d}x=o(\varepsilon), \tag{13}$$

$$\int_{R^3}b(x)\left|\bar{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right|^{p+1}\mathrm{d}x=o(\varepsilon). \tag{14}$$

证 由(8)及引理 3.4 有

$$\begin{aligned}\int_{R^3}\omega^p_{\rho\xi}\omega_{\rho z}\mathrm{d}x&=\int_{R^3}\omega^p(x-\rho\xi)\omega(x-\rho z)\mathrm{d}x\\&\le\int_{R^3}\frac{1}{(1+|x-\rho z|)^{3+2s}}\frac{1}{(1+|x-\rho\xi|)^{p(3+2s)}}\mathrm{d}x\\&\le\int_{R^3}\frac{1}{(1+|x-\rho z|)^{3-2t}}\frac{1}{(1+|x-\rho\xi|)^{p(3+2s)}}\mathrm{d}x\\&\le\int_{R^3}\frac{1}{(|x-\rho\xi-\rho(z-\xi)|)^{3-2t}}\frac{1}{(1+|x-\rho\xi|)^{p(3+2s)}}\mathrm{d}x\\&\le\frac{C}{(1+|\rho(z-\xi)|)^{3-2t}}=\frac{C}{(1+2\rho)^{3-2t}}\le\frac{C}{\rho^{3-2t}},\end{aligned}$$

类似于上面的证明，我们能得到 $\int_{R^3}\omega^p_{\rho z}\omega_{\rho\xi}\mathrm{d}x=o(\varepsilon)$。

由(8)、引理 3.4、(H_4)及 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}\int_{R^3}a(x)\omega^2_{\rho\xi}\mathrm{d}x&=\int_{R^3}a(x)\omega^2(x-\rho\xi)\mathrm{d}x\\&\le\int_{R^3}a(x)(1+|x|)\frac{1}{1+|x|}\frac{C}{(1+|x-\rho\xi|)^{2(3+2s)}}\mathrm{d}x\\&\le\left(\int_{R^3}(a(x)(1+|x|))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R^3}\left(\frac{1}{1+|x|}\frac{C}{(1+|x-\rho\xi|)^{2(3+2s)}}\right)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le C\frac{1}{1+|\rho\xi|}\le\frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

同理可证 $\int_{R^3}a(x)\omega^2_{\rho z}\mathrm{d}x=o(\varepsilon)$。

由$\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]$的定义及上面的估算有：

$$\int_{R^3} a(x)\overline{\psi}_\rho^2[z,\varsigma]\mathrm{d}x \le 2\int_{R^3} a(x)\left[\omega_{\rho z}^2+\omega_{\rho\xi}^2\right]\mathrm{d}x = o(\varepsilon).$$

最后类似于上面的证明，易证$\int_{R^3} b(x)\left|\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right|^{p+1}\mathrm{d}x = o(\varepsilon)$。证毕。

类似于[14]中引理 3.7 的证明过程，我们可以得到：

引理 3.8 $\kappa_{\rho,z,\varsigma}$和$\tau_{\rho,z,\varsigma}$如(10)定义，则存在常数$C>0$满足

$$0<\kappa_{\rho,z,\varsigma}\le C,\ \forall\rho>0,\ \forall(z,\varsigma)\in\Sigma\times[0,1], \tag{15}$$

而且

$$\kappa_{\rho,z,\varsigma}=\tau_{\rho,z,\varsigma}+o(\varepsilon). \tag{16}$$

基于上面的估计，经计算我们得到下面的关键估计：

引理 3.9 存在ρ_0满足，对于$\rho>\rho_0$，

$$T_\rho := \max_{\Sigma\times[0,1]} I\left(\psi_\rho[z,\varsigma]\right)<2m_\infty.$$

证 由引理 3.6、引理 3.7 及引理 3.8，

$$\begin{aligned}
I\left(\psi_\rho[z,\varsigma]\right) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\left\|\kappa_{\rho,z,\varsigma}\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right\|_{H^s}^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\kappa_{\rho,z,\varsigma}^2\int_{R^3} a(x)\overline{\psi}_\rho^2[z,\varsigma]\mathrm{d}x \\
&\quad+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p+1}\right)\kappa_{\rho,z,\varsigma}^4\int_{R^3} K(x)\phi_{K,\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]}^t\overline{\psi}_\rho^2[z,\varsigma]\mathrm{d}x \\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\left\|\tau_{\rho,z,\varsigma}\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right\|_{H^s}^2+o(\varepsilon) \\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{\left\|\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right\|_{H^s}^2}{\left|\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right|_{p+1}^2}\right)^{\frac{p+1}{p-1}}+o(\varepsilon) \\
&=I_\infty\left(\psi_\infty[z,\varsigma]\right)+o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{17}$$

因为$\omega_{\rho\xi}$是(7)的正解，故

$$\left(\omega_{\rho\xi},\omega_{\rho z}\right)_{H^s}=\int_{R^3}\omega_{\rho\xi}^p\omega_{\rho z}\mathrm{d}x := A_\rho.$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right\|_{H^s}^2 &= \left(\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma],\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right)_{H^s} \\
&=\left[(1-\varsigma)^2+\varsigma^2\right]\|\omega\|_{H^s}^2+2\varsigma(1+\varsigma)\left(\omega_{\rho\xi},\omega_{\rho z}\right)_{H^s} \\
&=\left[(1-\varsigma)^2+\varsigma^2\right]\|\omega\|_{H^s}^2+2\varsigma(1+\varsigma)A_\rho.
\end{aligned} \tag{18}$$

根据文献[18]中的引理 2.1，对于$a,b\in R^+$及$p\ge 2$有：

$$(a+b)^{p+1}\ge a^{p+1}+b^{p+1}+(p+1)\left(a^p+b^p\right).$$

那么

$$\begin{aligned}
\left|\overline{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right|_{p+1}^{p+1} &= \int_{R^3}\left[(1-\varsigma)\omega_{\rho z}+\varsigma\omega_{\rho\xi}\right]^{p+1}\mathrm{d}x \\
&\ge\left[(1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}\right]|\omega|_{p+1}^{p+1}+(p+1)\left[(1-\varsigma)^p\varsigma+(1-\varsigma)\varsigma^p\right]A_\rho.
\end{aligned} \tag{19}$$

当ς或$(1-\varsigma)$充分小时，$\psi_{\infty,\rho}[z,\varsigma]$趋于$\omega_{\rho\xi}$或$\omega_{\rho z}$。那么，此时$I_\infty\left(\psi_{\infty,\rho}[z,\varsigma]\right)\to m_\infty$。因此，存在$\delta>0$，当$\min\{\varsigma,1-\varsigma\}\le\delta$时，

$$I_\infty\left(\psi_{\infty,\rho}[z,\varsigma]\right)<2m_\infty.$$

下面我们考虑$\min\{\varsigma,1-\varsigma\}>\delta$时，由(18)和(19)知：

$$\begin{aligned}
\frac{\left\|\bar{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right\|_{H^s}^2}{\left|\bar{\psi}_\rho[z,\varsigma]\right|_{p+1}^2} &\le \frac{\left[(1-\varsigma)^2+\varsigma^2\right]\|\omega\|_{H^s}^2+2\varsigma(1-\varsigma)A_\rho}{\left(\left[(1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}\right]|\omega|_{p+1}^{p+1}+(p+1)\left[(1-\varsigma)\varsigma+(1-\varsigma)\varsigma^p\right]A_\rho\right)^{\frac{2}{p+1}}}\\
&=\frac{(1-\varsigma)^2+\varsigma^2}{\left((1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}\frac{\|\omega\|_{H^s}^2}{|\omega|_{p+1}^{p+1}}\cdot\frac{1+\dfrac{2\varsigma(1-\varsigma)}{(1-\varsigma)^2+\varsigma^2}\dfrac{A_\rho}{\|\omega\|_{H^s}^2}}{\left(1+\dfrac{(p+1)\left[(1-\varsigma)^p\varsigma+(1-\varsigma)\varsigma^p\right]}{(1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}}\dfrac{A_\rho}{|\omega|_{p+1}^{p+1}}\right)^{\frac{2}{p+1}}}\\
&\le\frac{(1-\varsigma)^2+\varsigma^2}{\left((1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}\frac{\|\omega\|_{H^s}^2}{|\omega|_{p+1}^{p+1}}\cdot\frac{1+\dfrac{2\varsigma(1-\varsigma)}{(1-\varsigma)^2+\varsigma^2}\dfrac{A_\rho}{\|\omega\|_{H^s}^2}}{1+\dfrac{2\left[(1-\varsigma)^p\varsigma+(1-\varsigma)\varsigma^p\right]}{(1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}}\dfrac{A_\rho}{|\omega|_{p+1}^{p+1}}+o(A_\rho)}.
\end{aligned}$$

易证下面两个不等式：

$$\frac{\varsigma(1-\varsigma)}{(1-\varsigma)^2\varsigma^2}<\frac{(1-\varsigma)^p\varsigma+(1-\varsigma)\varsigma^p}{(1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}}(0<\varsigma<1),\quad\frac{(1-\varsigma)^2+\varsigma^2}{\left((1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}<2^{\frac{p-1}{p+1}}(0\le\varsigma\le1).$$

因此，

$$\begin{aligned}
I_\infty\left(\psi_{\infty,\rho}[z,\varsigma]\right)&\le\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{(1-\varsigma)^2+\varsigma^2}{\left((1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}\frac{\|\omega\|_{H^s}^2}{|\omega|_{p+1}^2}\right)^{\frac{p+1}{p-1}}\\
&\quad\times\frac{1+\dfrac{2\varsigma(1-\varsigma)}{(1-\varsigma)^2+\varsigma^2}\dfrac{A_\rho}{\|\omega\|_{H^s}^2}}{1+\dfrac{2\left((1-\varsigma)^p\varsigma+(1-\varsigma)\varsigma^p\right)}{(1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}}\dfrac{A_\rho}{|\omega|_{p+1}^{p+1}}+o(A_\rho)}\\
&\le\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{(1-\varsigma)^2+\varsigma^2}{\left((1-\varsigma)^{p+1}+\varsigma^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}}\frac{\|\omega\|_{H^s}^2}{|\omega|_{p+1}^2}\right)^{\frac{p+1}{p-1}}\\
&<2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)|\omega|_{p+1}^{p+1}=2m_\infty.
\end{aligned}$$

引理 3.10 存在$\rho_1>0$满足

$$A_\rho := \max\left\{I\left(\psi_\rho[z,0]\right): z\in\Sigma\right\} < B_0,\ \forall\rho>\rho_1. \tag{20}$$

根据ψ_ρ的定义和引理3.1易证上述结果，在此忽略其证明过程。

定理1.1的证明：

由引理2.4我们知道$m=m_\infty$且m不可达，并且该问题不能通过极小化来解决。因此，我们将通过形变论证来证明系统(1)存在比m_∞能量更高的正解。

对于任意$c\in R$，定义$I^c=\{u\in N: I(c)\le c\}$。

根据引理3.3，引理3.9和引理3.10得到下列不等式：

$$m_\infty < A_\rho < B_0 \le T_\rho < 2m_\infty,\ \forall\rho>\max\{\rho_0,\rho_1\}.$$

下面证明限制在N上的I在水平$c^*\in[B_0,T_\rho]$上存在PS序列。如果已征得该断言成立，则根据引理3.2知，存在非平凡临界点u且$I(u)<2m_\infty$。

反证法。假设$[B_0,T_\rho]$内不存在PS序列。根据形变引理，存在$\delta>0$和连续映射$\eta: I^{T_\rho}\to I^{B_0-\delta}$，对于$u\in I^{B_0-\delta}$，有$B_0-\delta>A_\rho$且$\eta(u)=u$。

定义映射$H:\Sigma\times[0,1]\to R^3$为$H(z,\varsigma)=\beta\circ\eta\circ\psi_\rho[z,\varsigma]$。由引理3.10知$\psi_\rho[z,0]\subset I^{A_\rho}\subset I^{B_0-\delta}$。因此$\eta(\psi_\rho[z,0])=\psi_\rho[z,0]$，从而$\beta\circ\eta\circ\psi_\rho[z,0]=\beta(\psi_\rho[z,0])=\rho z$。定义$h(t,z,\varsigma)=tG(z,\varsigma)+(1-t)H(z,\varsigma):[0,1]\times\Sigma\times(0,1]\to R^3$，其中$G(z,\varsigma)=\varsigma\rho\xi+(1-\varsigma)\rho z$。显然，对于$t\in[0,1]$，$z\in\Sigma$有$h\in C([0,1]\times\Sigma\times(0,1])$。于是$h(t,z,0)=\rho z\ne 0$，也就是说$0\notin h(t,\partial(\Sigma\times(0,1]))$。因此，存在$(\bar z,\bar\varsigma)\in\Sigma\times(0,1]$满足

$$\beta\circ\eta\circ\psi_\rho[\bar z,\bar\varsigma]=0. \tag{21}$$

由引理3.3得$\psi_\rho[z,\varsigma]\in I^{T_\rho}$，再根据$\eta$的性质，得到

$$\eta\circ\psi[z,\varsigma]\in I^{B_0-\delta},\ \forall[z,\varsigma]\in\Sigma\times[0,1]. \tag{22}$$

显然，$\eta\circ\psi[z,\varsigma]\in N$，$\forall[z,\varsigma]\in\Sigma\times[0,1]$，特别地，$\eta\circ\psi[\bar z,\bar\varsigma]\in N$。结合(21)和$B_0$的定义，易知$I(\eta\circ\psi[\bar z,\bar\varsigma])\ge B_0$，与(22)矛盾。

设$u\in I^{T_\rho}$是我们找到的临界点满足$I(u)<2m_\infty$。下证 u 是正函数即不是变号函数。反证法，假设$u=u^++u^-$且$u^\pm\ne 0$。类似于[19]中定理1.2的证明，我们推出，存在$0<t_u^+<1$和$0<t_u^-<1$满足$t_u^\pm u^\pm\in N$。因此，利用引理2.4及上面的事实，可得

$$2m_\infty=2m\le I(t_u^+u^+)+I(t_u^-u^-)\le I(t_u^+u^++t_u^-u^-)<I(u^++u^-)=I(u).$$

这与$I(u)<2m_\infty$相矛盾。证毕。

致　谢

国家自然科学基金(No.11501403)，山西省留学回国择优项目(2018)，和山西省自然科学面上项目(201901D111085)。

参考文献

[1] Bokanowski, O. and Mauser, N.J. (1999) Local Approximation of the Hartree-Fock Exchange Potential: A Deformation Approach. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, **9**, 941-961. https://doi.org/10.1142/S0218202599000439

[2] Benguria, R., Lieb, E.H. and Brezis, H. (1997) The Thomas-Fermi-Von Weizäscker Theory of Atoms and Molecules.

Communications in Mathematical Physics, **79**, 167-180. https://doi.org/10.1007/BF01942059

[3] Azzollini, A. and Pomponio, A. (2008) Ground State Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **345**, 90-108. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.057

[4] Ianni, I. (2013) Sign-Changing Radial Solutions for the Schroodinger-Poisson-Slater Problem. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **41**, 365-385.

[5] Zhao, L.G. and Zhao, F.K. (2015) On the Existence of Solutions for the Schrödinger-Poisson Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **346**, 155-169. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.04.053

[6] Zhang, J.J., Do Ó, J.M. and Squassina, M. (2016) Schrödinger-Poisson Systems with a General Subcritical or Critical Nonlinearity. *Advanced Nonlinear Studies*, **16**, 15-30. https://doi.org/10.1515/ans-2015-5024

[7] Teng, K.M. (2019) Ground State Solutions for the Nonlinear Fractional Schrödinger-Poisson System. *Applicable Analysis*, **98**, 1959-1996. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1441998

[8] Ye, C.X. and Teng, K.M. (2020) Ground State and Sign-Changing Solutions for fractional Schrödinger-Poisson System with Critical Growth. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **65**, 1360-1393. https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1652278

[9] Edwin, G.M. and Gaetano, S. (2017) Positive Semiclassical States for a Fractional Schrödinger-Poisson System. *Differential & Integral Equations*, **30**, 231-258.

[10] Felmer, P., Quaas, A. and Tan, J.G. (2012) Positive Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation with the Fractional Laplacian. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **142**, 1237-1262. https://doi.org/10.1017/S0308210511000746

[11] Teng, K.M. and Agarwal, R.P. (2018) Existence and Concentration of Positive Ground State Solutions for Nonlinear Fractional Schrödinger-Poisson System with critical Growth. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 8258-8293. https://doi.org/10.1002/mma.5289

[12] Teng, K.M. and Agarwal, R.P. (2019) Ground State and Bounded State Solution for the Nonlinear Fractional Choquard-Schrödinger-Poisson System. *Journal of Mathematical Physics*, **60**, Article ID: 103507. https://doi.org/10.1063/1.5052473

[13] Cerami, G. and Molle, R. (2019) Multiple Positive Bound States for critical Schrödinger-Poisson Systems. *ESAIM*: *Control*, *Optimisation and Calculus of Variations*, **25**, Article No. 73. https://doi.org/10.1051/cocv/2018071

[14] Cerami, G. and Molle, R. (2016) Positive Bound State Solutions for Some Schrödinger-Poisson Systems. *Nonlinearity*, **29**, 3103-3119. https://doi.org/10.1088/0951-7715/29/10/3103

[15] Frank, R. and Lenzmann, E. (2013) Uniqueness of Ground States for Fractional Laplacians in *R*. *Acta Mathematica*, **210**, 261-318. https://doi.org/10.1007/s11511-013-0095-9

[16] Cerami, G. and Pomponio, A. (2017) On Some Scalar Field Equations with Competing Coefficients. *International Mathematics Research Notices*, **2018**, 2481-2507. https://doi.org/10.1093/imrn/rnw315

[17] Wei, J.C. and Zhao, C.Y. (2013) Non-Compactness of the Prescribed Q-Curvature Problem in Large Dimensions. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **46**, 123-164. https://doi.org/10.1007/s00526-011-0477-9

[18] Abbas, B. and Li, Y.Y. (1990) On a Min-Max Procedure for the Existence of a Positive Solution for Certain Scalar Field Equations in R^N. *Revista Matematica Iberoamericana*, **6**, 1-15. https://doi.org/10.4171/RMI/92

[19] Ji, C. (2019) Ground State Sign-Changing Solutions for a Class of Nonlinear Fractional Schrödinger-Poisson System in R^3. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **198**, 1563-1579. https://doi.org/10.1007/s10231-019-00831-2